Dichavados.blogspot.com

HALLIDAY • RESNICK

Volume 2

Gravitação, Ondas e Termodinâmica

Digitalizado por Universo Restrito
www.universorestrito.com

# Fundamentos de Física

8ª Edição

gen | LTC

Jearl Walker

# Fórmulas Matemáticas*

### *Equação do Segundo Grau*

Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

### *Teorema Binomial*

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

### *Produtos de Vetores*

Seja $\theta$ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \operatorname{sen}\theta$$

### *Identidades Trigonométricas*

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

### *Derivadas e Integrais*

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \int e^x\, dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

### *Regra de Cramer*

Um sistema de duas equações com duas incógnitas $x$ e $y$,

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2 x + b_2 y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

*Uma lista mais completa está no Apêndice E.

## Prefixos do SI

| Fator | Prefixo | Símbolo | Fator | Prefixo | Símbolo |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{24}$ | yotta | Y | $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{21}$ | zetta | Z | $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{18}$ | exa | E | $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{9}$ | giga | G | $10^{-12}$ | pico | P |
| $10^{6}$ | mega | M | $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{3}$ | quilo | k | $10^{-18}$ | atto | a |
| $10^{2}$ | hecto | h | $10^{-21}$ | zepto | z |
| $10^{1}$ | deca | da | $10^{-24}$ | yocto | y |

# Fundamentos de Física

8E

VOLUME 2

530
H155f v.2
8. ed. v.2 / FE
1010755848

# GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

abdr
Respeite o direito autoral

UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

Duzentos anos de tradição produzindo, publicando e comercializando livros. Este é o valor da marca Wiley que, desde sua fundação, em 1807, acompanha as mudanças políticas, sociais e econômicas ocorridas em todo o mundo.

Renomada pela divulgação das mais recentes teorias e técnicas acadêmicas nas áreas científica, tecnológica e de engenharia, a editora norte-americana promove, assim, o intercâmbio e o debate globais.

A tradicional parceria da LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, com a John Wiley & Sons, Inc., responde, em parte, por esse sucesso no Brasil, uma vez que traz para o mercado conceitos técnico-científicos de ponta essenciais para a formação das futuras gerações de profissionais e pesquisadores.

HALLIDAY/RESNICK

# Fundamentos de Física

8E

VOLUME 2


## Jearl Walker

Cleveland State University


**Tradução e Revisão Técnica**


**Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.**

Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia — IME



gen | LTC



UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

UNIDADE: FE
Nº CHAMADA:
530
H155f
V: 2 EX: 8ª ed
TOMBO: 755848
PROC.: 2982/09
C: D: X
PREÇO: 94,00
DATA: 02/06/09
Nº CPD: 438024

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

FUNDAMENTALS OF PHYSICS Eighth Edition Volume 1
Copyright © 2008 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2009 by
**LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.**
**Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional**

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3970-9480
Fax: 21-2221-3202
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Cover Designer: Norm Christiansen
Cover Image: ©Eric Heller/Photo Researchers
Usada com permissão de John Wiley & Sons, Inc.

Editoração Eletrônica: REDBSTYLE

**CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE**
**SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.**

H184f
v.2

Halliday, David, 1916-
Fundamentos de física, volume 2 : gravitação, ondas e termodinâmica / Halliday, Resnick, Jearl Walker ; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. - Rio de Janeiro : LTC, 2009.
4v.

Tradução de: Fundamentals of physics, 8th ed.
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-216-1606-1

1. Gravitação. 2. Ondas (Física). 3. Física. I. Resnick, Robert, 1923-. II. Walker, Jearl, 1945-. III. Título

08-4478. CDD: 530
CDU: 53

# Sumário Geral

## Volume 1


Capítulo 1 Medição
Capítulo 2 Movimento Retilíneo
Capítulo 3 Vetores
Capítulo 4 Movimento em Duas e Três Dimensões
Capítulo 5 Força e Movimento — I
Capítulo 6 Força e Movimento — II
Capítulo 7 Energia Cinética e Trabalho
Capítulo 8 Energia Potencial e Conservação da Energia
Capítulo 9 Centro de Massa e Momento Linear
Capítulo 10 Rotação
Capítulo 11 Rolamento, Torque e Momento Angular


## Volume 2


Capítulo 12 Equilíbrio e Elasticidade
Capítulo 13 Gravitação
Capítulo 14 Fluidos
Capítulo 15 Oscilações
Capítulo 16 Ondas — I
Capítulo 17 Ondas — II
Capítulo 18 Temperatura, Calor e Primeira Lei da Termodinâmica
Capítulo 19 A Teoria Cinética dos Gases
Capítulo 20 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica


## Volume 3


Capítulo 21 Cargas Elétricas
Capítulo 22 Campos Elétricos
Capítulo 23 Lei de Gauss
Capítulo 24 Potencial Elétrico
Capítulo 25 Capacitância
Capítulo 26 Corrente e Resistência
Capítulo 27 Circuitos
Capítulo 28 Campos Magnéticos
Capítulo 29 Campos Magnéticos Produzidos por Correntes
Capítulo 30 Indução e Indutância
Capítulo 31 Oscilações Eletromagnéticas e Corrente Alternada
Capítulo 32 Equações de Maxwell; Magnetismo da Matéria


## Volume 4


Capítulo 33 Ondas Eletromagnéticas
Capítulo 34 Imagens
Capítulo 35 Interferência
Capítulo 36 Difração
Capítulo 37 Relatividade
Capítulo 38 Fótons e Ondas de Matéria
Capítulo 39 Mais Ondas de Matéria
Capítulo 40 Tudo sobre os Átomos
Capítulo 41 Condução de Eletricidade nos Sólidos
Capítulo 42 Física Nuclear
Capítulo 43 Energia Nuclear
Capítulo 44 Quarks, Léptons e o Big Bang

Apêndices/Respostas dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares/Índice

# Sumário

## VOLUME 2


### 12 Equilíbrio e Elasticidade 1

*Por que a pequena inclinação da torre de Pisa coloca a construção em risco?*

12-1 O que É Física? 2
12-2 Equilíbrio 2
12-3 As Condições de Equilíbrio 3
12-4 O Centro de Gravidade 5
12-5 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático 6
12-6 Estruturas Indeterminadas 11
12-7 Elasticidade 12
Revisão e Resumo 16
Perguntas 16 / Problemas 17

### 13 Gravitação 27

*Qual é o "monstro" que está escondido no centro da Via Láctea?*

13-1 O que É Física? 28
13-2 A Lei da Gravitação de Newton 28
13-3 Gravitação e o Princípio de Superposição 30
13-4 A Gravitação nas Proximidades da Superfície da Terra 32
13-5 A Gravitação no Interior da Terra 35
13-6 Energia Potencial Gravitacional 36
13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler 40
13-8 Satélites: Órbitas e Energia 43
13-9 Einstein e a Gravitação 45
Revisão e Resumo 47
Perguntas 48 / Problemas 49

### 14 Fluidos 57

*Como um surfista surfa?*

14-1 O que É Física? 58
14-2 O que É um Fluido? 58
14-3 Massa Específica e Pressão 58
14-4 Fluidos em Repouso 61
14-5 Medindo a Pressão 63
14-6 O Princípio de Pascal 64
14-7 O Princípio de Arquimedes 66
14-8 Fluidos Ideais em Movimento 69
14-9 A Equação de Continuidade 70
14-10 A Equação de Bernoulli 72
Revisão e Resumo 76
Perguntas 77 / Problemas 78

### 15 Oscilações 86

*Como é possível atenuar as oscilações inofensivas, mas desagradáveis, que o vento produz em um edifício muito alto?*

15-1 O que É Física? 87
15-2 Movimento Harmônico Simples 87
15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples 90
15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples 93
15-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular 94
15-6 Pêndulos 95
15-7 Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme 99
15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido 101
15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância 103
Revisão e Resumo 104
Perguntas 105 / Problemas 106

### 16 Ondas - I 115

*O que provoca as oscilações, às vezes perigosas, de passarelas e pistas de dança?*

16-1 O que É Física? 116
16-2 Tipos de Ondas 116
16-3 Ondas Transversais e Longitudinais 116
16-4 Comprimento de Onda e Freqüência 118
16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva 121
16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada 124
16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda 126
16-8 A Equação de Onda 128
16-9 O Princípio da Superposição de Ondas 129
16-10 Interferência de Ondas 130
16-11 Fasores 132

16-12 Ondas Estacionárias 134
16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância 136
Revisão e Resumo 139
Perguntas 140 / Problemas 141

## 17 Ondas - II 149

*O que produz um eco musical nas escadas de uma pirâmide dos maias?*

17-1 O que É Física? 150
17-2 Ondas Sonoras 150
17-3 A Velocidade do Som 150
17-4 Ondas Sonoras Progressivas 153
17-5 Interferência 156
17-6 Intensidade e Nível Sonoro 158
17-7 Fontes de Sons Musicais 161
17-8 Batimentos 164
17-9 O Efeito Doppler 165
17-10 Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque 169
Revisão e Resumo 170
Perguntas 171 / Problemas 172

## 18 Temperatura, Calor e Primeira Lei da Termodinâmica 182

*Como um besouro é capaz de detectar um incêndio na floresta a uma grande distância sem usar a visão nem o olfato?*

18-1 O que É Física? 183
18-2 Temperatura 183
18-3 A Lei Zero da Termodinâmica 183
18-4 Medindo a Temperatura 184
18-5 As Escalas Celsius e Fahrenheit 186
18-6 Dilatação Térmica 188
18-7 Temperatura e Calor 190
18-8 A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos 191
18-9 Calor e Trabalho 195
18-10 A Primeira Lei da Termodinâmica 196
18-11 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica 198
18-12 Mecanismos de Transferência de Calor 200
Revisão e Resumo 204
Perguntas 205 / Problemas 207

## 19 A Teoria Cinética dos Gases 215

*O que produz a névoa que aparece no ar quando uma garrafa de bebida gasosa é aberta?*

19-1 O que É Física? 216
19-2 O Número de Avogadro 216
19-3 Gases Ideais 217
19-4 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática 220
19-5 Energia Cinética de Translação 222
19-6 Livre Caminho Médio* 223
19-7 A Distribuição de Velocidades das Moléculas 225
19-8 Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal 228
19-9 Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares 232
19-10 Efeitos Quânticos 235
19-11 A Expansão Adiabática de um Gás Ideal 235
Revisão e Resumo 239
Perguntas 240 / Problemas 241

## 20 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica 247

*Qual é a relação entre um elástico esticado e o sentido do tempo?*

20-1 O que É Física? 248
20-2 Processos Irreversíveis e Entropia 248
20-3 Variação de Entropia 249
20-4 A Segunda Lei da Termodinâmica 253
20-5 Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas 255
20-6 Entropia no Mundo Real: Refrigeradores 259
20-7 A Eficiência de Máquinas Térmicas Reais 261
20-8 Uma Visão Estatística da Entropia 262
Revisão e Resumo 266
Perguntas 267 / Problemas 268

## Apêndices 273

A O Sistema Internacional de Unidades (SI) 273
B Algumas Constantes Fundamentais da Física 275
C Alguns Dados Astronômicos 276
D Fatores de Conversão 277
E Fórmulas Matemáticas 281
F Propriedades dos Elementos 284
G Tabela Periódica dos Elementos 287

Respostas dos Testes (T) e das Perguntas (P) e Problemas Ímpares (PR) 288

Índice 291

*Também designado caminho médio livre. (N.E.)

# Prefácio

Diversão com um grande desafio. É assim que venho encarando a física desde o dia em que Sharon, uma das alunas do curso que eu estava ministrando como aluno de doutorado, me perguntou de repente:

— O que isso tem a ver com a minha vida?

Respondi prontamente:

— Sharon, isso é física! Tem tudo a ver com a sua vida!

A moça me pediu um exemplo. Dei tratos à bola, mas não consegui encontrar nenhum. Naquela noite criei *O Circo Voador da Física* para Sharon, mas também para mim, porque percebi que o problema de Sharon também era meu. Tinha passado seis anos estudando em dezenas de livros de física escritos com a melhor das intenções, mas alguma coisa estava faltando. A física é o assunto mais interessante do mundo porque descreve o modo como o mundo funciona, mas não havia nos livros qualquer ligação com o mundo real. A diversão estava faltando.

Procurei incluir muita física do mundo real neste livro, ligando-o à nova edição de *O Circo Voador da Física*. Boa parte dos assuntos vem das minhas aulas, onde posso julgar, pelas expressões e comentários dos alunos, quais são os assuntos e apresentações que funcionam. As notas que tomei a respeito de meus sucessos e fracassos ajudaram a estabelecer as bases para este livro. Minha mensagem aqui é a mesma que dei para todos os estudantes que encontrei desde o dia em que Sharon fez aquele comentário:

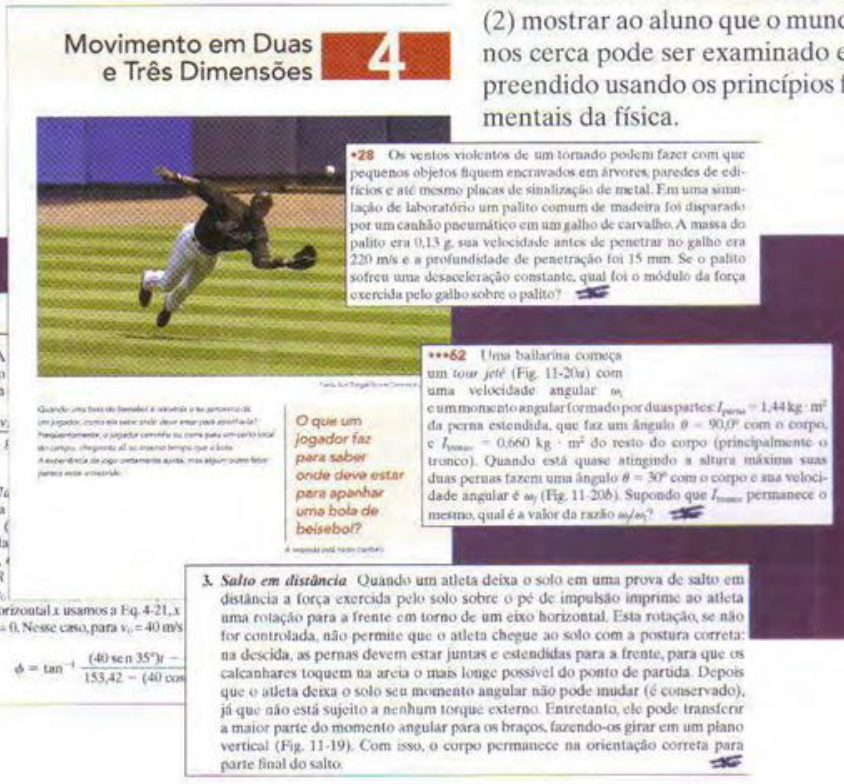
— Sim, você *pode* usar os conceitos básicos da física para chegar a conclusões válidas a respeito do mundo real, e é nesse entendimento do mundo real que está a diversão.

Tive muitos objetivos ao escrever este livro, mas o principal foi proporcionar aos professores um instrumento através do qual possam ensinar os alunos a estudar assuntos científicos, identificar conceitos fundamentais, pensar a respeito de questões científicas e resolver problemas quantitativos. Esse processo não é fácil, nem para os alunos nem para os professores. Na verdade, o curso associado a este livro pode ser um dos mais difíceis do currículo. Entretanto, pode ser também um dos mais interessantes, pois revela os mecanismos fundamentais do mundo, responsáveis por todas as aplicações científicas e de engenharia.

Muitos usuários da sétima edição (professores e alunos) enviaram comentários e sugestões para aperfeiçoar o livro. Esses melhoramentos foram incorporados à exposição e aos problemas desta edição. Nós (o autor Jearl Walker e a editora John Wiley & Sons) vemos este livro como um projeto permanente, e gostaríamos de contar com uma maior participação dos leitores. Sinta-se à vontade para enviar sugestões, correções e comentários positivos ou negativos para a LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço eletrônico www.ltceditora.com.br. Talvez não seja possível responder a todas as sugestões, mas lemos e consideramos cada uma delas.

## Principais Mudanças de Conteúdo

- Tópicos do *Circo Voador* foram introduzidos de várias formas: em textos de abertura dos capítulos, em exemplos e em problemas. Isso foi feito com dois objetivos: (1) tornar o assunto mais interessante e divertido; (2) mostrar ao aluno que o mundo que nos cerca pode ser examinado e compreendido usando os princípios fundamentais da física.



Movimento em Duas e Três Dimensões 4

*O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?*

•28 Os ventos violentos de um tornado podem fazer com que pequenos objetos fiquem encravados em árvores, paredes de edifícios e até mesmo placas de sinalização de metal. Em uma simulação de laboratório um palito comum de madeira foi disparado por um canhão pneumático em um galho de carvalho. A massa do palito era 0,13 g, sua velocidade antes de penetrar no galho era 220 m/s e a profundidade de penetração foi 15 mm. Se o palito sofreu uma desaceleração constante, qual foi o módulo da força exercida pelo galho sobre o palito?

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol *B* rebata uma bola na direção de um jogador *F* com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador *F* à posição da bola faz um ângulo $\phi$ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada $\phi$ em função do tempo *t*, supondo (a) que o jogador *F* está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador *B*; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor *B*.

IDEIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance *R*, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta_0$.

Cálculos: A

$$R = \frac{v_0}{t}$$

A Fig. 4-17

$$\phi = \tan^{-1}\frac{(40 \operatorname{sen} 35°)t - }{153{,}42 - (40 \cos}$$

•••62 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-20*u*) com uma velocidade angular $\omega_i$ e um momento angular formado por duas partes: $I_{perna} = 1{,}44\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ da perna estendida, que faz um ângulo $\theta = 90{,}0°$ com o corpo, e $I_{tronco} = 0{,}660\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima suas duas pernas fazem uma ângulo $\theta = 30°$ com o corpo e sua velocidade angular é $\omega_f$ (Fig. 11-20*b*). Supondo que $I_{tronco}$ permanece o mesmo, qual é a razão $\omega_f/\omega_i$?

3. ***Salto em distância*** Quando um atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao atleta uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Esta rotação, se não for controlada, não permite que o atleta chegue ao solo com a postura correta: na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem na areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que o atleta deixa o solo seu momento angular não pode mudar (é conservado), já que não está sujeito a nenhum torque externo. Entretanto, ele pode transferir a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (Fig. 11-19). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para parte final do salto.

• Os assuntos que também são discutidos em *O Circo Voador da Física* estão indicados pelo desenho de um biplano. A bibliografia do *Circo Voador* (mais de 10.000 referências a revistas científicas e de engenharia) pode ser encontrada no site http://www.flyingcircusofphysics.com.

• A lei da gravitação de Newton, a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart são agora apresentadas na notação de vetores unitários.

• A maior parte dos textos de abertura dos capítulos (exemplos de física aplicada que têm por objetivo despertar o interesse do leitor pelo assunto que será discutido no capítulo) é nova e foi extraída de artigos científicos em vários campos de pesquisa.

• Milhares de problemas no final dos capítulos foram reformulados para tornar mais claros tanto os enunciados como as respostas.

## Características dos Capítulos

**Textos de abertura.** Uma situação curiosa é descrita no início de cada capítulo e explicada em algum ponto do texto para motivar o estudante a ler o capítulo. Esses textos, que constituem uma das características tradicionais de *Fundamentos de Física*, são baseados em pesquisas recentes publicadas em revistas de ciência, engenharia, medicina e direito.

**O que É Física?** O corpo de cada capítulo agora começa com essa pergunta e com uma resposta que diz respeito ao assunto do capítulo. (Um bombeiro hidráulico uma vez me perguntou: "Em que você trabalha?" Respondi: "Sou professor de física." O bombeiro pensou por alguns instantes e depois me perguntou: "O que é física?" A profissão do bombeiro dependia inteiramente da física, ainda que ele não soubesse o que é física. Muitos estudantes de física introdutória não sabem o que é física, mas supõem que ela é irrelevante para a carreira que escolheram.)

Os **Testes** são pontos intermediários em que se pergunta ao estudante: "Você é capaz de responder a essa pergunta usando um raciocínio baseado no texto ou no exemplo que acaba de ler?" Se a resposta é negativa, o estudante deve voltar e rever o que já leu antes de prosseguir no capítulo. Veja, por exemplo, o Teste 1 da Seção 4-3, do Capítulo 4, e o Teste 2 da Seção 11-4, do Capítulo 11. *As respostas de todos os testes estão no final do livro.*

Os **Exemplos** foram escolhidos para mostrar que os problemas de física devem ser resolvidos usando o raciocínio e não simplesmente introduzindo números em uma equação, sem nenhuma preocupação com o seu significado. Os exemplos com a indicação "Aumente sua capacidade" são, em geral, mais longos e apresentam mais comentários.

As **Idéias-chave** dos exemplos mostram ao estudante quais são os conceitos básicos necessários para resolver um problema. O que queremos dizer com essas idéias-chave é o seguinte: "Vamos começar a solução usando este conceito básico, um método que nos prepara para resolver muitos outros problemas. Não começamos sacando do bolso uma equação para uma simples substituição de números, um método que não nos prepara para nada."

As **Táticas para a solução de problemas** são instruções para ajudar os alunos principiantes a resolver problemas e evitar os erros mais comuns.

A **Revisão e Resumo** é um breve sumário do capítulo que contém os conceitos essenciais, mas não substitui a leitura do capítulo.

As **Perguntas** se parecem com os testes e requerem raciocínio e entendimento, em vez de cálculos. *As respostas das perguntas ímpares estão no final do livro.*

Os **Problemas** estão agrupados por seções e possuem uma indicação do grau de dificuldade. *As respostas dos problemas ímpares estão no final do livro.*

**Símbolos.** O quadro a seguir, que é repetido no início de cada lista de problemas, mostra os símbolos usados neste livro.

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

**Problemas adicionais.** Esses problemas não estão classificados, de modo que cabe ao estudante determinar a que parte do capítulo se refere cada problema.

## Características Adicionais

**Raciocínio *versus* aplicação de fórmulas.** Um dos principais objetivos deste livro é ensinar os estudantes a usar o raciocínio para resolver problemas, desde os princípios básicos até a solução final. Embora tenham sido incluídos (de propósito) alguns problemas que envolvem a simples aplicação de fórmulas, a maioria dos problemas exige algum tipo de raciocínio.

**Capítulos de tamanho razoável.** Para não acabar escrevendo um livro suficientemente grosso para deter uma bala (e a maioria dos estudantes), procurei manter os capítulos com um tamanho razoável. Explico o suficiente para colocar o estudante no caminho certo, mas não tanto que o estudante não precise analisar e combinar idéias. Afinal de contas, o estudante ainda vai ter necessidade de analisar e combinar idéias muito depois de ler este livro e completar o curso.

**Uso de calculadoras gráficas.** Quando os cálculos vetoriais de um exemplo podem ser feitos diretamente da tela de uma calculadora gráfica esse fato é indicado na solução do exemplo, mas é apresentada a solução tradicional através de componentes. Quando os cálculos vetoriais não podem ser feitos diretamente na tela o motivo é explicado.

**Gráficos como enigmas.** Estes são problemas nos quais se fornece um gráfico e pede-se um resultado que exige muito mais do que simplesmente ler um dado em um gráfico. Na verdade, a solução exige uma compreensão do significado físico do problema e dos princípios que estão por trás das equações associadas. Esses problemas se parecem com enig-

mas de Sherlock Holmes, já que cabe ao estudante determinar quais são os dados importantes. Veja, por exemplo, o problema 50 do Capítulo 4, o problema 12 do Capítulo 5 e o problema 22 do Capítulo 9.

**Problemas de física aplicada**, baseados em pesquisas publicadas, aparecem em muitos lugares, como os textos de abertura dos capítulos, os exemplos e os problemas. Veja, por exemplo, o texto de abertura do Capítulo 4, o Exemplo 4-8, da Seção 4-6, e o problema 62 do Capítulo 11. Também existem séries de problemas encadeados, como os problemas 2, 39 e 61 do Capítulo 6.

**Problemas com situações inusitadas.** Aqui está um desses problemas, escolhido entre as centenas que existem no livro: o problema 69 do Capítulo 5 se baseia na história verdadeira de como o vôo 143 da Air Canada ficou sem combustível a 7,9 km de altitude porque a tripulação e o pessoal de terra não usaram as unidades corretas para a quantidade de combustível nos tanques (uma lição importante para os estudantes que costumam "misturar" unidades).

## Para o Professor

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Uma editora integrante do
GEN | Grupo Editorial Nacional
A/C Editorial Técnico
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3970-9480
Fax: 21-2221-3202
ltc@grupogen.com.br.
www.ltceditora.com.br

## Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para este livro. J. Richard Christman, da U.S. Coast Guard Academy, mais uma vez criou muitos suplementos valiosos; suas recomendações para este livro foram inestimáveis. Sen-Ben Liao, do Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton, da Southern Polytechnic State University, e Jerry Shi, do Pasadena City College, foram responsáveis pela tarefa hercúlea de resolver todos os problemas do livro. Na John Wiley o livro foi apoiado por Stuart Johnson, o editor que supervisionou todo o projeto, Tom Kulesa, que coordenou o estado-da-arte do pacote de mídia, e Geraldine Osnato, que gerenciou uma superequipe para produzir um impressionante pacote de suplementos. Agradecemos a Elizabeth Swain, editora de produção, por ter juntado todas as partes durante o complexo processo de produção. Agradecemos também a Maddy Lesure, pelo seu projeto gráfico tanto do texto quanto da produção da capa; Lee Goldstein, que foi responsável pela diagramação; Helen Walden, pela edição dos originais; Anna Melhorn, que cuidou das ilustrações; e Lilian Brady, que se encarregou da revisão. Hilary Newman foi brilhante na busca de fotografias inusitadas e interessantes. Tanto a editora John Wiley & Sons, Inc. como Jearl Walker gostariam de agradecer às seguintes pessoas por comentários e idéias a respeito da 7.ª edição: Richard Woodard, University of Florida; David Wick, Clarkson University; Patrick Rapp, University of Puerto Rico em Mayagüez; Nora Thornber, Raritan Valley Community College; Laurence I. Gould, University of Hartford; Greg Childers, California State University em Fullerton; Asha Khakpour, California State University em Fullerton; Joe F. McCullough, Cabrillo College. Finalmente, nossos revisores externos realizaram um trabalho excepcional, e expressamos a cada um deles nossos agradecimentos.

Maris A. Abolins
*Michigan State University*

Edward Adelson
*Ohio State University*

Nural Akchurin
*Texas Tech*

Barbara Andereck
*Ohio Wesleyan University*

Mark Arnett
*Kirkwood Community College*

Arun Bansil
*Northeastern University*

Richard Barber
*Santa Clara University*

Neil Basecu
*Westchester Community College*

Anand Batra
*Howard University*

Richard Bone
*Florida International University*

Michael E. Browne
*University of Idaho*

Timothy J. Burns
*Leeward Community College*

Joseph Buschi
*Manhattan College*

Philip A. Casabella
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Randall Caton
*Christopher Newport College*

Roger Clapp
*University of South Florida*

W. R. Conkie
*Queen's University*

Renate Crawford
*University of Massachusetts-Dartmouth*

Mike Crivello
*San Diego State University*

Robert N. Davie, Jr.
*St. Petersburg Junior College*

Cheryl K. Dellai
*Glendale Community College*

Eric R. Dietz
*California State University em Chico*

N. John DiNardo
*Drexel University*

Eugene Dunnam
*University of Florida*

Robert Endorf
*University of Cincinnati*

F. Paul Esposito
*University of Cincinnati*

Jerry Finkelstein
*San Jose State University*

Robert H. Good
*California State University-Hayward*

John B. Gruber
*San Jose State University*

Ann Hanks
*American River College*

Randy Harris
*University of California-Davis*

Samuel Harris
*Purdue University*

Harold B. Hart
*Western Illinois University*

Rebecca Hartzler
*Seattle Central Community College*

John Hubisz
*North Carolina State University*

Joey Huston
*Michigan State University*

David Ingram
*Ohio University*

Shawn Jackson
*University of Tulsa*

Hector Jimenez
*University of Puerto Rico*

Sudhakar B. Joshi
*York University*

Leonard M. Kahn
*University of Rhode Island*

Leonard Kleinman
*University of Texas em Austin*

Craig Kletzing
*University of Iowa*

Arthur Z. Kovacs
*Rochester Institute of Technology*

Kenneth Krane
*Oregon State University*

Priscilla Laws
*Dickinson College*

Edbertho Leal
*Polytechnic University of Puerto Rico*

Vern Lindberg
*Rochester Institute of Technology*

Peter Loly
*University of Manitoba*

Andreas Mandelis
*University of Toronto*

Robert R. Marchini
*Memphis State University*

Paul Marquard
*Caspar College*

David Marx
*Illinois State University*

James H. McGuire
*Tulane University*

David M. McKinstry
*Eastern Washington University*

Eugene Mosca
*United States Naval Academy*

James Napolitano
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Michael O'Shea
*Kansas State University*

Patrick Papin
*San Diego State University*

Kiumars Parvin
*San Jose State University*

Robert Pelcovits
*Brown University*

Oren P. Quist
*South Dakota State University*

Joe Redish
*University of Maryland*

Timothy M. Ritter
*University of North Carolina em Pembroke*

Gerardo A. Rodriguez
*Skidmore College*

John Rosendahl
*University of California em Irvine*

Todd Ruskell
*Colorado School of Mines*

Michael Schatz
*Georgia Institute of Technology*

Darrell Seeley
*Milwaukee School of Engineering*

Bruce Arne Sherwood
*North Carolina State University*

Ross L. Spencer
*Brigham Young University*

Paul Stanley
*Beloit College*

Harold Stokes
*Brigham Young University*

Michael G. Strauss
*University of Oklahoma*

Jay D. Strieb
*Villanova University*

Dan Styer
*Oberlin College*

Michael Tammaro
*University of Rhode Island*

Marshall Thomsen
*Eastern Michigan University*

David Toot
*Alfred University*

Tung Tsang
*Howard University*

J. S. Turner
*University of Texas em Austin*

T. S. Venkataraman
*Drexel University*

Gianfranco Vidali
*Syracuse University*

Fred Wang
*Prairie View A & M*

Robert C. Webb
*Texas A & M University*

William M. Whelan
*Ryerson Polytechnic University*

George Williams
*University of Utah*

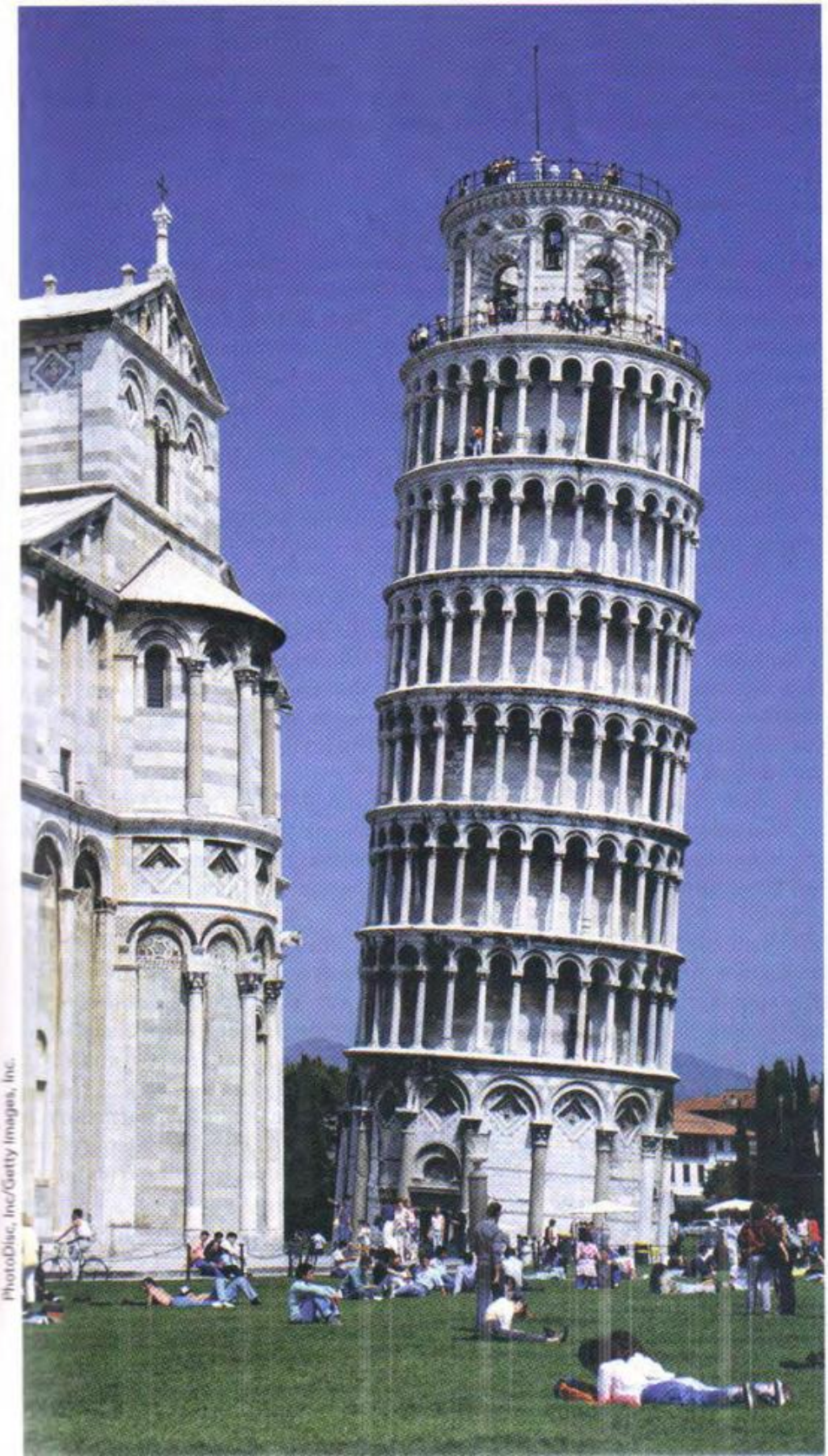
David Wolfe
*University of New Mexico*

## Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@grupogen.com.br.

# Equilíbrio e Elasticidade

# 12



PhotoDisc, Inc./Getty Images, Inc.

*A famosa torre de Pisa, na Itália, começou a se inclinar para o sul durante a construção, que levou dois séculos. A inclinação aumentou com o tempo, mas com a velocidade de tartaruga de 0,001° por ano. Recentemente, quando a inclinação chegou a 5,5°, o acesso à torre foi vedado aos turistas porque as autoridades temiam que ela desabasse. Entretanto, para que a torre desabasse não seria necessário que uma reta vertical traçada a partir do centro de massa passasse fora da base da torre? Isso não acontecerá no futuro próximo.*

*Sendo assim, qual era o risco que a torre estava correndo?*

A resposta está neste capítulo.

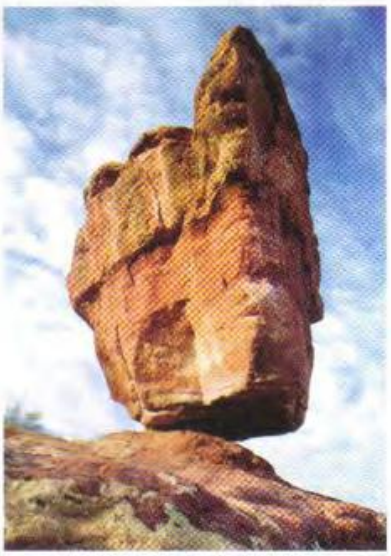


FIG. 12-1 Uma pedra em equilíbrio. Embora a sustentação pareça precária, a pedra está em equilíbrio estático. *(Symon Lobsang/Photis/Jupiter Images Corp.)*

## 12-1 O QUE É FÍSICA?

As obras civis devem ser estáveis, apesar das forças que atuam sobre elas. Um edifício, por exemplo, deve ser estável apesar da força da gravidade e do vento, e uma ponte deve ser estável apesar da força da gravidade e dos repetidos solavancos que ela recebe de carros e caminhões.

Um dos interesses da física é conhecer o que faz com que um objeto permaneça estável na presença de forças. Neste capítulo, examinamos os dois aspectos principais da estabilidade: o *equilíbrio* de forças e torques que agem sobre objetos rígidos e a *elasticidade* de objetos não-rígidos, uma propriedade que determina o modo como esses objetos se deformam. Quando esta física é feita corretamente ela é assunto de artigos publicados em revistas de física e de engenharia; quando é feita incorretamente, é assunto de manchetes de jornal e pendências judiciais.

## 12-2 | Equilíbrio

Considere os seguintes objetos: (1) um livro em repouso sobre uma mesa, (2) um disco de metal deslizando com velocidade constante em uma superfície sem atrito, (3) as pás de um ventilador de teto girando e (4) a roda de uma bicicleta que se move em uma estrada retilínea com velocidade constante. Para cada um desses objetos,

1. O momento linear $\vec{P}$ de seu centro de massa é constante.
2. O momento angular $\vec{L}$ em relação ao centro de massa, ou em relação a qualquer outro ponto, também é constante.

Dizemos que esses objetos estão em **equilíbrio**. Os dois requisitos para o equilíbrio são, portanto,

$$\vec{P} = \text{constante} \quad \text{e} \quad \vec{L} = \text{constante}. \tag{12-1}$$

Nosso interesse neste capítulo são as situações nas quais as constantes na Eq. 12-1 são nulas, ou seja, estamos interessados principalmente em objetos que não se movem, nem em translação nem em rotação, no sistema de referência em que estão sendo observados. Dizemos que esses objetos estão em **equilíbrio estático**. Dos quatro objetos mencionados no início desta seção apenas um, o livro em repouso sobre a mesa, está em equilíbrio estático.

A pedra da Fig. 12-1 é outro exemplo de um objeto que, pelo menos no momento em que foi fotografado, está em equilíbrio estático. Ela compartilha esta propriedade com um número incontável de outras estruturas, como catedrais, casas, mesas de jantar e postos de gasolina, que permanecem em repouso por um tempo indefinido.

Como foi discutido na Seção 8-6, se um corpo retorna ao mesmo estado de equilíbrio estático após ter sido deslocado pela ação de uma força dizemos que o corpo está em equilíbrio estático *estável*. Um exemplo é uma bola de gude colocada no fundo de uma vasilha côncava. Por outro lado, se uma pequena força é suficiente para deslocar o corpo de forma permanente, dizemos que o corpo está em equilíbrio estático *instável*.

Suponha, por exemplo, que equilibramos uma peça de dominó com o centro de massa na vertical em relação a uma aresta de apoio, como na Fig. 12-2*a*. O torque em relação à aresta de apoio devido à força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o dominó é zero porque a linha de ação de $\vec{F}_g$ passa pela aresta. Assim, o dominó está em equilíbrio. Evidentemente, mesmo uma pequena força é suficiente para romper este equilíbrio. Quando a linha de ação de $\vec{F}_g$ é deslocada para um dos lados da aresta de apoio (como na Fig. 12-2*b*), o torque devido a $\vec{F}_g$ faz o dominó girar até atingir uma posição de equilíbrio diferente da anterior. Assim, o dominó da Fig. 12-2*a* está em uma situação de equilíbrio estático instável.

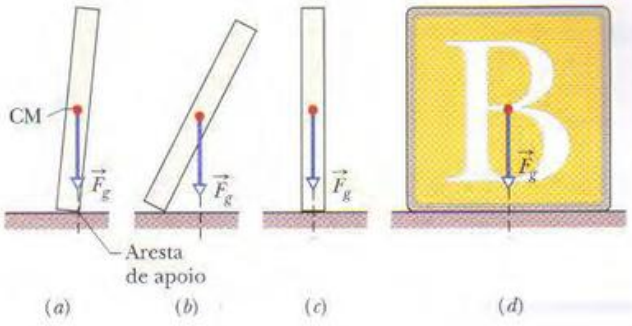



FIG. 12-2 (*a*) Um dominó equilibrado em uma aresta, com o centro de massa verticalmente acima dessa aresta. A linha de ação da força gravitacional $\vec{F}_g$ a que o dominó está submetido passa pela aresta de apoio. (*b*) Se o dominó sofre uma rotação, ainda que pequena, a partir da orientação de equilíbrio, $\vec{F}_g$ produz um torque que aumenta a rotação. (*c*) Um dominó apoiado no lado estreito está em uma situação um pouco mais estável do que a do dominó mostrado em (*a*). (*d*) Um cubo é ainda mais estável.

O caso do dominó da Fig. 12-2*c* é diferente. Para que este dominó tombe, a força tem que fazê-lo girar além da posição de equilíbrio da Fig. 12-2*a*, na qual o centro de massa está acima de uma aresta de apoio. Uma força muito pequena não é capaz de derrubar este dominó, mas um piparote com o dedo certamente o fará. (Se arrumarmos vários dominós em fila, um piparote no primeiro pode provocar a queda de toda a fila.)

O cubo de brinquedo da Fig. 12-2*d* é ainda mais estável, já que o seu centro de massa tem que ser deslocado ainda mais para passar além de uma aresta de apoio. Um simples piparote não faz o cubo tombar. (É por isso que nunca se vê alguém derrubar uma fileira de cubos.) O operário da Fig. 12-3 tem algo em comum tanto com o dominó como com o cubo: paralelamente à viga, sua postura favorece o equilíbrio, e este é estável; perpendicularmente à viga, sua postura é menos favorável ao equilíbrio, e este é instável (e à mercê de uma rajada de vento).

A análise do equilíbrio estático é muito importante para os engenheiros. Um engenheiro projetista deve identificar todas as forças e torques externos a que uma estrutura pode ser submetida e, através de um projeto bem feito e de uma escolha adequada de materiais, assegurar que a estrutura permaneça estável sob o efeito dessas cargas. Uma análise desse tipo é necessária, por exemplo, para garantir que uma ponte não vai desabar em um dia de ventania e que o trem de pouso de um avião vai funcionar mesmo em uma aterrissagem forçada.

FIG. 12-3 Um operário de pé sobre uma viga está em equilíbrio estático, mas sua posição é mais estável na direção paralela à viga que na direção perpendicular. *(Robert Brenner/PhotoEdit)*

## 12-3 | As Condições para o Equilíbrio

O movimento de translação de um corpo é descrito pela segunda lei de Newton para translações, Eq. 9-27:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \qquad (12\text{-}2)$$

Se o corpo está em equilíbrio para translações, ou seja, se $\vec{P}$ é uma constante, $d\vec{P}/dt = 0$ e devemos ter

$$\vec{F}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças).} \qquad (12\text{-}3)$$

O movimento de rotação de um corpo é descrito pela segunda lei de Newton para rotações, Eq. 11-29:

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (12\text{-}4)$$

Se o corpo está em equilíbrio para rotações, ou seja, se $\vec{L}$ é constante, $d\vec{L}/dt = 0$ e devemos ter

$$\vec{\tau}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques).} \qquad (12\text{-}5)$$

Assim, os dois requisitos para que um corpo esteja em equilíbrio são os seguintes:

1. A soma vetorial de todas as forças externas que agem sobre o corpo deve ser nula.
2. A soma vetorial de todos os torques externos que agem sobre o corpo, medidos em relação a *qualquer* ponto, deve ser nula.

Estes requisitos, obviamente, valem para o equilíbrio *estático*. Entretanto, eles valem também para o caso de equilíbrio mais geral no qual $\vec{P}$ e $\vec{L}$ são constantes, mas diferentes de zero.

As Eqs. 12-3 e 12-5, como equações vetoriais, são equivalentes, cada uma, a três equações independentes, uma para cada eixo do sistema de coordenadas:

| Equilíbrio de forças | Equilíbrio de torques |
|---|---|
| $F_{\text{res},x} = 0$ | $\tau_{\text{res},x} = 0$ |
| $F_{\text{res},y} = 0$ | $\tau_{\text{res},y} = 0$ |
| $F_{\text{res},z} = 0$ | $\tau_{\text{res},z} = 0$ |

(12-6)

Vamos simplificar o problema considerando apenas situações nas quais as forças que agem sobre o corpo estão no plano $xy$. Isso significa dizer que os torques que agem sobre o corpo tendem a provocar rotações apenas em torno de direções paralelas ao eixo $z$. Com esta suposição, eliminamos uma equação de força e duas equações de torque das Eqs. 12-6, ficando com

$$F_{\text{res},x} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças)}, \tag{12-7}$$

$$F_{\text{res},y} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças)}, \tag{12-8}$$

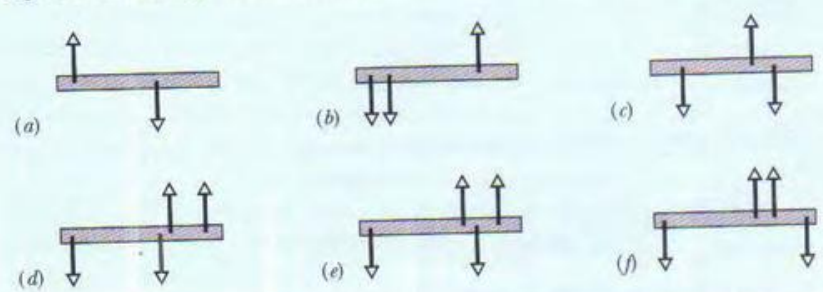
$$\tau_{\text{res},z} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques)}. \tag{12-9}$$

onde $\tau_{\text{res},z}$ é o torque resultante que as forças externas produzem em relação ao eixo $z$ ou em relação a *qualquer* eixo paralelo ao eixo $z$.

Um disco metálico que desliza sobre o gelo com velocidade constante satisfaz as Eqs. 12-7, 12-8 e 12-9 e está, portanto, em equilíbrio, *mas não em equilíbrio estático*. Para que o equilíbrio seja estático o momento linear $\vec{P}$ do disco deve ser não só constante, mas também igual a zero; o disco deve estar em repouso em relação ao gelo. Assim, existe um outro requisito para o equilíbrio estático:

3. O momento linear $\vec{P}$ do corpo deve ser nulo.

**TESTE 1** A figura mostra seis vistas superiores de uma barra uniforme sobre a qual duas ou mais forças atuam perpendicularmente à maior dimensão da barra. Se os módulos das forças são ajustados adequadamente (mas mantidos diferentes de zero), em que situações a barra pode estar em equilíbrio estático?



## 12-4 | O Centro de Gravidade

A força gravitacional que age sobre um corpo é a soma vetorial das forças gravitacionais que agem sobre todos os elementos (átomos) do corpo. Em vez de considerar todos esses elementos, podemos dizer que

> A força gravitacional $\vec{F}_g$ age efetivamente sobre um único ponto de um corpo, o chamado **centro de gravidade** (CG) do corpo.

A palavra "efetivamente" significa que se as forças que agem sobre os elementos do corpo fossem de alguma forma desligadas e a força $\vec{F}_g$ aplicada ao centro de gravidade fosse ligada, a força resultante e o torque resultante (em relação a qualquer ponto) que agem sobre o corpo não mudariam.

Até agora, supusemos que a força gravitacional $\vec{F}_g$ é aplicada ao centro de massa (CM) do corpo. Isto equivale a supor que o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Lembre-se de que para um corpo de massa $M$ a força $\vec{F}_g$ é igual a $M\vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a aceleração que a força produziria se o corpo estivesse em queda livre. Na demonstração que se segue, mostramos que

> Se $\vec{g}$ é a mesma para todos os elementos de um corpo, o centro de gravidade (CG) do corpo coincide com seu centro de massa (CM).

Isto é aproximadamente verdadeiro para objetos comuns porque $\vec{g}$ varia apenas ligeiramente com a altitude. Assim, para objetos como um rato ou um boi podemos supor que a força gravitacional age no centro de massa. Após a demonstração a seguir, passaremos a usar esta hipótese.

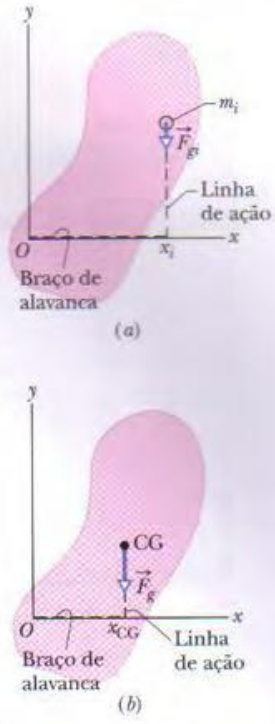



FIG. 12-4 (*a*) Um elemento de massa $m_i$ em um corpo de dimensões finitas. A força gravitacional $\vec{F}_{gi}$ a que o elemento está submetido tem um braço de alavanca $x_i$ em relação à origem $O$ do sistema de coordenadas. (*b*) Dizemos que a força gravitacional $\vec{F}_g$ a que um corpo está submetido age sobre o centro de gravidade (CG) do corpo. Neste caso, o braço de alavanca de $\vec{F}_g$ é $x_{CG}$ em relação à origem $O$.

### Demonstração

Primeiro, vamos considerar os elementos do corpo. A Fig. 12-4*a* mostra um corpo de massa $M$ e um de seus elementos, de massa $m_i$. Uma força gravitacional $\vec{F}_{gi}$ age sobre cada elemento e é igual a $m_i\vec{g}_i$. O índice de $\vec{g}_i$ significa que $\vec{g}_i$ é a aceleração da gravidade *na posição do elemento i* (ela pode ser diferente para outros elementos).

Na Fig. 12-4*a*, cada força $\vec{F}_{gi}$ produz um torque $\tau_i$ sobre o elemento em relação à origem $O$, com braço de alavanca $x_i$. Usando a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), podemos escrever o torque $\tau_i$ na forma

$$\tau_i = x_i F_{gi}. \tag{12-10}$$

O torque resultante sobre todos os elementos do corpo é, portanto,

$$\tau_{res} = \Sigma\tau_i = \Sigma x_i F_{gi}. \tag{12-11}$$

Em seguida, consideramos o corpo como um todo. A Fig. 12-4*b* mostra a força gravitacional $\vec{F}_g$ atuando no centro de gravidade do corpo. Esta força produz um torque $\tau$ sobre o corpo em relação a $O$, com uma braço de alavanca $x_{CG}$. Usando novamente a Eq. 10-41, podemos escrever este torque como

$$\tau = x_{CG} F_g. \tag{12-12}$$

Como a força gravitacional $\vec{F}_g$ a que o corpo está submetido é igual à soma das forças gravitacionais $\vec{F}_{gi}$ que agem sobre todos os seus elementos, podemos substituir $F_g$ por $\Sigma F_{gi}$ na Eq. 12-12 e escrever

$$\tau = x_{CG}\Sigma F_{gi}. \tag{12-13}$$

Acontece que o torque produzido pela aplicação da força $\vec{F}_g$ ao centro de gravidade é igual ao torque resultante de todas as forças $\vec{F}_{gi}$ aplicadas a todos os elementos do corpo. (Foi assim que definimos o centro de gravidade.) Assim, $\tau$ na Eq. 12-13 é igual a $\tau_{res}$ na Eq. 12-11. Combinando essas duas equações, podemos escrever

$$x_{CG}\Sigma F_{gi} = x_i F_{gi}.$$

Substituindo $F_{gi}$ por $m_i g_i$, obtemos

$$x_{CG}\Sigma m_i g_i = \Sigma x_i m_i g_i. \quad (12\text{-}14)$$

Vamos agora usar uma idéia-chave: Se as acelerações $g_i$ para todos os elementos são iguais, podemos cancelar $g_i$ nesta equação e escrever

$$x_{CG}\Sigma m_i = \Sigma x_i m_i. \quad (12\text{-}15)$$

Como a soma $\Sigma m_i$ das massas de todos os elementos é a massa $M$ do corpo, podemos escrever a Eq. 12-15 como

$$x_{CG} = \frac{1}{M}\Sigma x_i m_i. \quad (12\text{-}16)$$

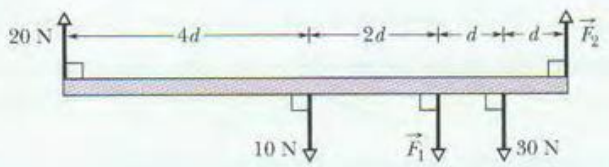
O lado direito desta equação é a coordenada $x_{CM}$ do centro de massa do corpo (Eq. 9-4). Chegamos, portanto, à igualdade que queríamos demonstrar:

$$x_{CG} = x_{CM}. \quad (12\text{-}17)$$

## 12-5 | Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

Nesta seção discutimos quatro exemplos que envolvem o equilíbrio estático. Em cada um escolhemos um sistema de um ou mais objetos, ao qual aplicamos as equações do equilíbrio (Eqs. 12-7, 12-8 e 12-9). As forças envolvidas no equilíbrio estão todas no plano $xy$, o que significa que os torques envolvidos são paralelos ao eixo $z$. Assim, ao aplicar a Eq. 12-9, o equilíbrio dos torques, escolhemos um eixo paralelo ao eixo $z$ em relação ao qual devemos calcular os torques. Embora a Eq. 12-9 seja satisfeita *qualquer* que seja o eixo escolhido, vamos ver que certas escolhas simplificam a aplicação desta equação ao eliminar um ou mais termos associados a forças desconhecidas.

**TESTE 2** A figura mostra uma vista de cima de uma barra uniforme em equilíbrio estático. (a) É possível determinar o módulo das forças desconhecidas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ equilibrando as forças? (b) Se você está interessado em determinar o módulo da força $\vec{F}_2$ usando uma equação de equilíbrio de torques, onde deve colocar o eixo de rotação para eliminar $\vec{F}_1$ da equação? (c) Se o módulo de $\vec{F}_2$ é 65 N, qual é o módulo de $\vec{F}_1$?




### Exemplo 12-1 Aumente sua capacidade

Na Fig. 12-5*a*, uma viga uniforme, de comprimento $L$ e massa $m = 1{,}8$ kg, está em repouso sobre duas balanças. Um bloco uniforme, de massa $M = 2{,}7$ kg, está em repouso sobre a viga, com o centro a uma distância $L/4$ da extremidade esquerda da viga. Quais são as leituras das balanças?

**IDÉIAS-CHAVE** Os primeiros passos na solução de *qualquer* problema de equilíbrio estático são os seguintes: definir claramente o sistema a ser analisado e desenhar um diagrama de corpo livre do sistema, indicando todas as forças externas que atuam sobre ele. Neste caso, vamos escolher o sistema como a viga e o bloco tomados em conjunto. As forças sobre o sistema aparecem no diagrama de corpo livre da Fig. 12-5*b*. (Escolher o sistema exige experiência, e freqüentemente existe mais de uma escolha adequada; veja o item 2 da Tática para Solução de Problemas 1, mais adiante.) Como o sistema está em equilíbrio estático, podemos usar as equações de equilíbrio de forças (Eqs. 12-7 e 12-8) e a equação de equilíbrio de torques (Eq. 12-9).

***Cálculos:*** As forças normais exercidas pelas balanças sobre a viga são $\vec{F}_e$ do lado esquerdo e $\vec{F}_d$ do lado direito. As leituras das balanças que desejamos determinar são iguais aos módulos dessas forças. A força gravitacional $\vec{F}_{g,viga}$ a que a viga está submetida está aplicada ao seu centro de massa e é igual a $m\vec{g}$. Analogamente, a força gravitacional $\vec{F}_{g,bloco}$ a que o bloco está submetido está aplicada ao seu centro de massa e é igual a $M\vec{g}$. Para simplificar a Fig. 12-5*b*, o bloco foi representado por um ponto dentro dos limites da viga e $\vec{F}_{g,bloco}$ foi desenhada com a origem nesse ponto. (Este deslocamento do vetor $\vec{F}_{g,bloco}$ ao longo de sua linha de ação não altera o torque produzido por $\vec{F}_{g,bloco}$ em relação a qualquer eixo perpendicular à figura.)

Como as forças não possuem componentes $x$, a Eq. 12-7 ($F_{res,x} = 0$) não fornece nenhuma informação. No caso das componentes $y$, a Eq. 12-8 ($F_{res,y} = 0$) nos dá

$$F_e + F_d - Mg - mg = 0. \qquad (12\text{-}18)$$

Como esta equação contém duas incógnitas, as forças $F_e$ e $F_d$, precisamos usar também a Eq. 12-9, a equação de equilíbrio dos torques. Podemos aplicá-la a *qualquer* eixo de rotação perpendicular ao plano da Fig. 12-5. Vamos escolher um eixo de rotação passando pela extremidade esquerda da viga. Vamos usar também nossa regra geral para atribuir sinais aos torques: se um torque tende a fazer um corpo inicialmente em repouso girar no sentido horário, o torque é negativo; se o torque tende a fazer o corpo girar no senti anti-horário, o torque é positivo. Finalmente, vamos escrever os torques na forma $r_\perp F$, onde o braço de alavanca $r_\perp$ é 0 para $\vec{F}_e$, $L/4$ para $M\vec{g}$, $L/2$ para $m\vec{g}$ e $L$ para $\vec{F}_d$.

Podemos agora escrever a equação do equilíbrio ($\tau_{res,z} = 0$) como

$$(0)(F_e) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_d) = 0,$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} F_d &= \tfrac{1}{4}Mg + \tfrac{1}{2}mg \\ &= \tfrac{1}{4}(2{,}7\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) + \tfrac{1}{2}(1{,}8\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) \\ &= 15{,}44\text{ N} \approx 15\text{ N}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Explicitando $F_e$ na Eq. 12-18 e substituindo os valores conhecidos, obtemos

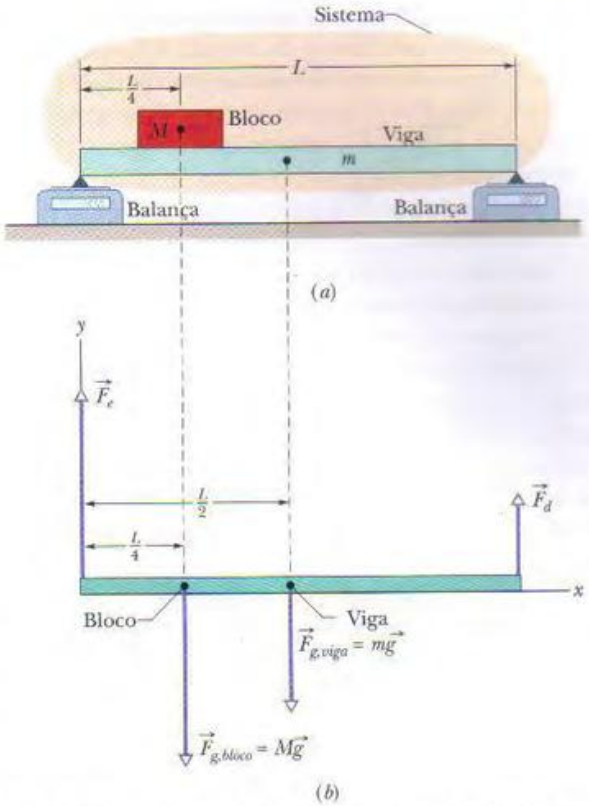



FIG. 12-5 (*a*) Uma viga de massa $m$ sustenta um bloco de massa $M$. (*b*) Diagrama de corpo livre, mostrando as forças que agem sobre o sistema *viga + bloco*.

$$\begin{aligned} F_e &= (M + m)g - F_d \\ &= (2{,}7\text{ kg} + 1{,}8\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) - 15{,}44\text{ N} \\ &= 28{,}66\text{ N} \approx 29\text{ N}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

*Observe a estratégia usada na solução:* Quando escrevemos uma equação para o equilíbrio das componentes das forças, esbarramos em duas incógnitas. Se tivéssemos escrito uma equação para o equilíbrio de torques em torno de um eixo *qualquer* teríamos esbarrado nas mesmas duas incógnitas. Entretanto, como escolhemos um eixo que passava pelo ponto de aplicação de uma das forças desconhecidas, $\vec{F}_e$, a dificuldade foi contornada. Nossa escolha eliminou $\vec{F}_e$ da equação do torque, permitindo que obtivéssemos o módulo da outra força, $F_d$. Em seguida, voltamos à equação do equilíbrio de forças para calcular o módulo da outra força.

## Exemplo 12-2

Na Fig. 12-6*a* uma escada de comprimento $L = 12$ m e massa $m = 45$ kg está encostada em um muro liso (sem atrito). A extremidade superior da escada está a uma altura $h = 9{,}3$ m acima do piso onde a extremidade inferior está apoiada (existe atrito entre a escada e o piso). O centro de massa da escada está a uma distância $L/3$ da extremidade inferior. Um bombeiro de massa $M = 72$ kg sobe na escada até que seu centro de massa esteja a uma distância $L/2$ da extremidade inferior. Quais são, neste momento, os módulos das forças exercidas pelo muro e pelo piso sobre a escada?

**IDÉIAS-CHAVE** Escolhemos nosso sistema como sendo o conjunto bombeiro-escada e desenhamos o diagrama de corpo livre da Fig. 12-6*b*. Como o sistema se encontra em equilíbrio estático, as equações de equilíbrio de forças e torques (Eqs. 12-7 a 12-9) podem ser usadas.

***Cálculos:*** Na Fig. 12-6*b* o bombeiro está representado por um ponto dentro dos limites da escada. A força gravitacional a que o bombeiro está submetido foi representada pelo vetor equivalente $M\vec{g}$, que foi deslocado ao longo de sua linha de ação para que a origem coincidisse com o ponto que representa o bombeiro. (O deslocamento não altera o torque produzido por $M\vec{g}$ em relação a qualquer eixo perpendicular à figura.)

Como não há atrito entre a escada e o muro, a única força exercida pelo muro sobre a escada é a força horizontal $\vec{F}_m$. A força $\vec{F}_p$ exercida pelo piso sobre a escada tem uma componente horizontal $\vec{F}_{px}$, que é uma força de atrito estática, e uma componente vertical $\vec{F}_{py}$, que é uma força normal.

Para aplicar as equações de equilíbrio, vamos começar com a Eq. 12-9 ($\tau_{res,z} = 0$). Para escolher um eixo em relação ao qual vamos calcular os torques, note que temos forças desconhecidas ($\vec{F}_m$ e $\vec{F}_p$) nas duas extremidades da escada. Para eliminar, digamos, $\vec{F}_p$ dos cálculos, colocamos o eixo no ponto $O$, perpendicular à figura. Colocamos também a origem de um sistema de coordenadas $xy$ em $O$. Podemos calcular os torques em relação a $O$ usando qualquer uma das Eqs. 10-39 a 10-41, mas a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$) é a mais fácil de usar neste caso.

Para determinar o braço de alavanca $r_\perp$ de $\vec{F}_m$ desenhamos a linha de ação deste vetor (reta horizontal tracejada da Fig. 12-6*b*); $r_\perp$ é a distância perpendicular entre $O$ e a linha de ação. Na Fig. 12-6*b* $r_\perp$ está sobre o eixo $y$ e é igual à altura $h$. Também desenhamos linhas de ação para $M\vec{g}$ e $m\vec{g}$, e constatamos que os braços de alavanca das duas forças estão sobre o eixo $x$. Para a distância $a$ mostrada na Fig. 12-6*a*, os braços de alavanca são $a/2$ (o bombeiro está no ponto médio da escada) e $a/3$ (o CM da escada está a um terço de seu comprimento a partir da extremidade inferior), respectivamente. Os braços de alavanca de $\vec{F}_{px}$ e $\vec{F}_{py}$ são nulos.

Com os torques escritos na forma $r_\perp F$, a equação de equilíbrio $\tau_{res,z} = 0$ assume a forma

$$-(h)(F_m) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{px}) + (0)(F_{py}) = 0. \quad (12\text{-}19)$$

(Lembre-se da nossa regra: Um torque positivo corresponde a uma rotação no sentido anti-horário, e um torque negativo corresponde a uma rotação no sentido anti-horário.)

Usando o teorema de Pitágoras, descobrimos que

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7{,}58\text{ m}.$$

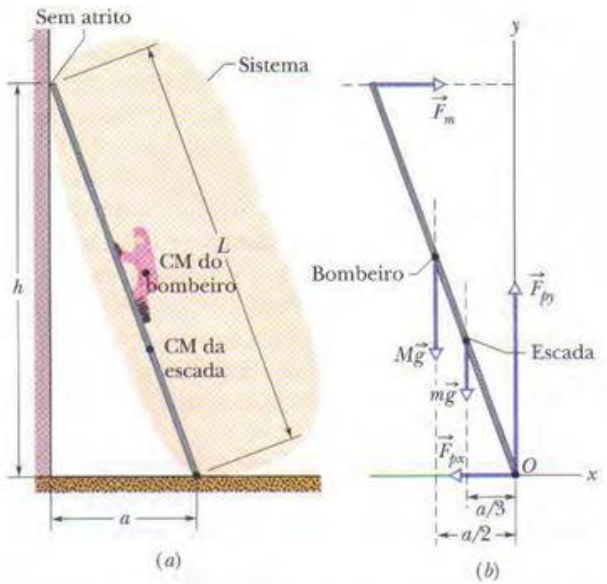



FIG. 12-6 (*a*) Um bombeiro sobe metade de uma escada que está apoiada em uma parede sem atrito. O piso abaixo da escada tem atrito. (*b*) Diagrama de corpo livre, mostrando as forças que agem sobre o sistema *bombeiro + escada*. A origem $O$ de um sistema de coordenadas é colocada no ponto de aplicação da força desconhecida $\vec{F}_p$ (cujas componentes $\vec{F}_{px}$ e $\vec{F}_{py}$ aparecem na figura).

Assim, a Eq. 12-19 nos dá

$$F_m = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} = \frac{(9{,}8\text{ m/s}^2)(7{,}58\text{ m})(72/2\text{ kg} + 45/3\text{ kg})}{9{,}3\text{ m}} = 407\text{ N} \approx 410\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Agora precisamos usar as equações de equilíbrio de forças. A equação $F_{res,x} = 0$ nos dá

$$F_m - F_{px} = 0,$$

e portanto $$F_{px} = F_m = 410\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

A equação $F_{res,y} = 0$ nos dá

$$F_{py} - Mg - mg = 0,$$

e portanto $$F_{py} = (M + m)g = (72\text{ kg} + 45\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 1146{,}6\text{ N} \approx 1100\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 12-3

A Fig. 12-7*a* mostra um cofre, de massa $M = 430$ kg, pendurado por uma corda presa a uma lança de guindaste de dimensões $a = 1{,}9$ m e $b = 2{,}5$ m. A lança é composta por uma viga articulada e um cabo horizontal. A viga, feita de material uniforme, tem uma massa $m$ de 85 kg; as massas do cabo e da corda são desprezíveis.

(a) Qual é a tensão $T_{cabo}$ do cabo? Em outras palavras, qual é o módulo da força $\vec{T}_{cabo}$ exercida pelo cabo sobre a viga?

**IDÉIAS-CHAVE** O sistema neste caso é apenas a viga, e as forças sobre ele estão mostradas no diagrama de corpo

livre da Fig. 12-7*b*. A força exercida pelo cabo é $\vec{T}_{cabo}$. A força gravitacional a que a viga está submetida está aplicada ao centro de massa (situado no centro da viga), e foi representada pela força equivalente $m\vec{g}$. A componente vertical da força que a dobradiça exerce sobre a viga é $\vec{F}_v$, e a componente horizontal é $\vec{F}_h$. A força exercida pela corda que sustenta o cofre é $\vec{T}_{corda}$. Como a viga, a corda e o cofre estão em repouso, o módulo de $\vec{T}_{corda}$ é igual ao peso do cofre: $T_c = Mg$. Posicionamos a origem $O$ de um sistema de coordenadas $xy$ na dobradiça. Como o sistema está em equilíbrio estático, as equações de equilíbrio podem ser usadas.

***Cálculos:*** Vamos começar com a Eq. 12-9 ($\tau_{res,z} = 0$). Note que o enunciado pede o módulo da força $\vec{T}_{cabo}$, mas não pede os módulos das forças $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ que agem sobre a dobradiça no ponto $O$. Para eliminar $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ do cálculo do torque, basta calcularmos os torques em relação a um eixo perpendicular ao papel passando pelo ponto $O$. Nesse caso, $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ têm braços de alavanca nulos. As linhas de ação de $\vec{T}_{cabo}$, $\vec{T}_{corda}$ e $m\vec{g}$ estão indicadas por retas tracejadas na Fig. 12-7*b*. Os braços de alavanca correspondentes são $a$, $b$ e $b/2$.

Escrevendo os torques na forma $r_\perp F$ e usando nossa regra para os sinais dos torques, a equação de equilíbrio $\tau_{res,z} = 0$ se torna

$$(a)(T_{cabo}) - (b)(T_{corda}) - (\tfrac{1}{2}b)(mg) = 0.$$

Substituindo $T_{corda}$ por $Mg$ e explicitando $T_{cabo}$, obtemos

$$T_{cabo} = \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a}$$
$$= \frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}5\ \text{m})(430\ \text{kg} + 85/2\ \text{kg})}{1{,}9\ \text{m}}$$
$$= 6093\ \text{N} \approx 6100\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Determine o módulo $F$ da força exercida pela dobradiça sobre a viga.

**IDÉIA-CHAVE** Agora precisamos conhecer $F_h$ e $F_v$ para combiná-las e calcular $F$. Como já conhecemos $T_{cabo}$, vamos aplicar as equações de equilíbrio das forças à viga.

***Cálculos:*** No caso do equilíbrio na horizontal, escrevemos $F_{res,x} = 0$ como

$$F_h - T_{cabo} = 0,$$

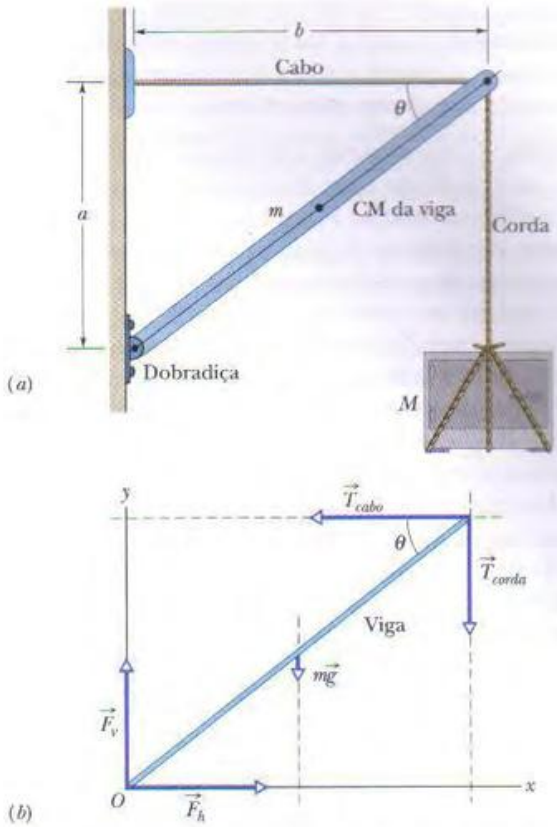



**FIG. 12-7** (*a*) Um cofre está pendurado em uma lança de guindaste composta por uma viga uniforme e um cabo de aço horizontal. (*b*) Diagrama de corpo livre da viga.

e portanto $$F_h = T_{cabo} = 6093\ \text{N}.$$

No caso do equilíbrio na vertical, escrevemos $F_{res,y} = 0$ como

$$F_v - mg - T_{corda} = 0.$$

Substituindo $T_{corda}$ por $Mg$ e explicitando $F_v$, obtemos

$$F_v = (m + M)g = (85\ \text{kg} + 430\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 5047\ \text{N}.$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2}$$
$$= \sqrt{(6093\ \text{N})^2 + (5047\ \text{N})^2} \approx 7900\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que $F$ é bem maior do que a soma dos pesos do cofre e da viga, 5000 N, ou que a tensão do cabo horizontal, 6100 N.

## Exemplo 12-4

Suponha que a torre de Pisa seja um cilindro uniforme oco de raio $R = 9{,}8$ m e altura $h = 60$ m. O centro de massa está a uma altura $h/2$, sobre o eixo central do cilindro. Na Fig. 12-8*a* o cilindro está na vertical. Na Fig. 12-8*b* está inclinado para a direita (na direção da parede sul da torre) de $\theta = 5{,}5°$, o que desloca o centro de massa de uma distância $d$. Suponha que o solo exerça apenas duas forças sobre a torre: uma força normal $\vec{F}_{NE}$ age sobre a parede da esquerda (a parede norte) e uma força normal $\vec{F}_{ND}$ age sobre a parede da direita (a parede sul). Qual é o aumento percentual do módulo de $F_{ND}$ devido à inclinação da torre?

**IDÉIA-CHAVE** Como a torre ainda está de pé, está em equilíbrio e, portanto, a soma dos torques aplicados à torre em relação a qualquer ponto é zero.

***Cálculos:*** Como estamos interessados em calcular $F_{ND}$, a força de reação do lado direito da torre, e não conhecemos a força de reação $F_{NE}$ do lado esquerdo, escolhemos o ponto de contato da parede da esquerda com o solo como ponto de referência para calcular os torques. A Fig. 12-8*c* mostra as forças que agiriam sobre a torre se ela estivesse na vertical. A força gravitacional $m\vec{g}$, que podemos supor aplicada ao centro de massa, tem uma linha de ação vertical e um braço de alavanca $R$ (distância perpendicular do ponto de referência à linha de ação). O torque associado a essa força tende a fazer a torre girar no sentido horário em torno do ponto de referência e, portanto, é negativo. A força normal $\vec{F}_{ND}$ exercida pelo solo sobre a parede da direita também tem uma linha de ação vertical, e seu braço de alavanca é $2R$. O torque associado a essa força tende a fazer a torre girar no sentido anti-horário em torno do ponto de referência e, portanto, é positivo. A equação de equilíbrio do torque ($\tau_{res,z} = 0$) pode ser escrita na forma

$$-(R)(mg) + (2R)(F_{ND}) = 0,$$

e portanto

$$F_{ND} = \tfrac{1}{2}mg. \qquad (12\text{-}20)$$

Este resultado já era esperado: com o centro de massa situado sobre o eixo central (o eixo de simetria do cilindro), a parede da direita sustenta metade do peso do cilindro.

Na Fig. 12-8*b*, o centro de massa foi deslocado de uma distância

$$d = \tfrac{1}{2}h \tan\theta.$$

As únicas mudanças na equação de equilíbrio de torques são que o braço de alavanca da força gravitacional agora é $R + d$, e o módulo da força de reação do lado direito da torre assume um novo valor, $F'_{ND}$ (Fig. 12-8*d*). Assim, podemos escrever

$$-(R + d)(mg) + (2R)(F'_{ND}) = 0,$$

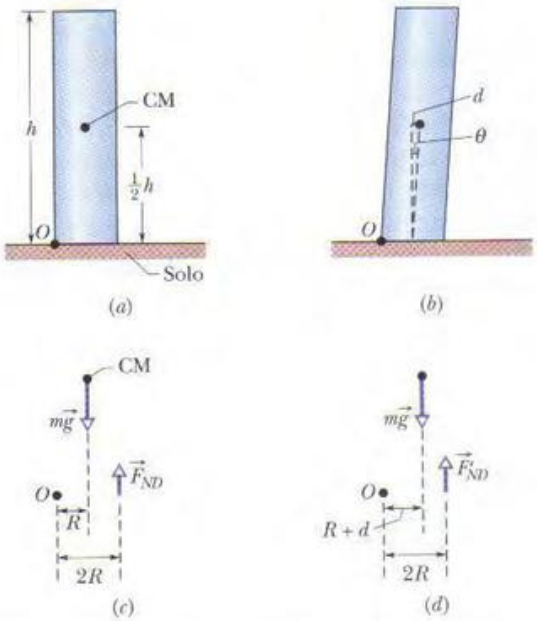



**FIG. 12-8** Cilindro usado como modelo da torre de Pisa: (*a*) na vertical e (*b*) inclinado, com o centro de massa deslocado para a direita. Forças e braços de alavanca usados para determinar os torques em relação ao ponto $O$ supondo que o cilindro está (*c*) na vertical e (*d*) inclinado.

o que nos dá

$$F'_{ND} = \frac{(R+d)}{2R}mg. \qquad (12\text{-}21)$$

Dividindo a Eq. 12-21 pela Eq. 12-20 e substituindo $d$ pelo seu valor, obtemos:

$$\frac{F'_{ND}}{F_{ND}} = \frac{R+d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{0{,}5h\tan\theta}{R}.$$

Fazendo $h = 60$ m, $R = 9{,}8$ m e $\theta = 5{,}5°$, temos:

$$\frac{F'_{ND}}{F_{ND}} = 1{,}29.$$

Assim, nosso modelo simples prevê que embora a inclinação seja pequena, a força normal a que está submetida a parede direita (parede sul) da torre aumentou cerca de 30%. Um risco para a torre é que esta força possa fazer a parede sul se encurvar para fora e se romper em vários pedaços.

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 1:*** *Problemas de Equilíbrio Estático* Aqui está uma lista de passos para a solução de problemas de equilíbrio estático:

1. Faça um *esboço* do problema.
2. Selecione o *sistema* ao qual serão aplicadas as leis do equilíbrio, desenhando uma curva fechada em torno do sistema para fixá-lo de modo claro em sua mente. Em algumas situações você pode selecionar um único objeto como sistema; é o objeto que você deseja que esteja em equilíbrio. Em outras situações você pode incluir outros objetos no sistema *se* essa inclusão simplificar os cálculos. Suponha, por exemplo, que você escolha apenas a escada como sistema no Exemplo 12-2. Nesse caso, você terá, na Fig. 12-6*b*, que levar em conta as forças desconhecidas exercidas sobre a escada pelas mãos e pés do bombeiro. Essas incógnitas adicionais complicam os cálculos do equilíbrio. O bombeiro foi incluído no sistema da Fig. 12-6 para que essas forças desconhecidas fossem *internas* ao sistema e, portanto, não fosse necessário calculá-las para resolver o Exemplo 12-2.
3. Desenhe um *diagrama de corpo livre* do sistema. Mostre todas as forças que agem sobre o sistema, identificando-as e certificando-se de que os pontos de aplicação e linhas de ação estão corretamente assinalados.

4. Desenhe os *eixos x e y* de um sistema de coordenadas com pelo menos um eixo paralelo a uma ou mais forças desconhecidas. Decomponha as forças que não estão alinhadas com um dos eixos. Em todos os nossos exemplos fez sentido escolher um eixo *x* horizontal e um eixo *y* vertical.
5. Escreva as duas *equações de equilíbrio das forças*, usando símbolos adequados.
6. Escolha um ou mais eixos de rotação perpendiculares ao plano da figura e escreva a *equação de equilíbrio de torques* para cada eixo. Se você escolher um eixo que coincide com a linha de ação de uma força desconhecida a equação ficará mais simples, já que esta força não irá aparecer.
7. *Resolva* as equações *algebricamente* para obter os valores das incógnitas. Alguns estudantes se sentem mais seguros substituindo os parâmetros conhecidos por valores numéricos no início deste estágio, especialmente se as manipulações algébricas forem trabalhosas. Entretanto, os estudantes experientes preferem resolver o problema até o final em forma literal, já que assim é possível avaliar a influência dos valores dos vários parâmetros sobre a solução final.
8. Finalmente, *substitua* os parâmetros da solução por valores numéricos, tomando cuidado para que as unidades usadas sejam coerentes.
9. Examine a resposta. Ela é razoável? O valor parece ser excessivamente grande ou excessivamente pequeno? O sinal está correto? As unidades são adequadas?

## 12-6 | Estruturas Indeterminadas

Para resolver os problemas deste capítulo temos apenas três equações independentes à nossa disposição, em geral duas equações de equilíbrio de forças e uma equação de equilíbrio de torques em relação a um certo eixo de rotação. Assim, se um problema tiver mais de três incógnitas não podemos resolvê-lo.

É fácil encontrar problemas desse tipo. No Exemplo 12-2, por exemplo, poderíamos ter suposto que existe atrito entre o muro e a extremidade superior da escada. Nesse caso, existiria uma força de atrito vertical no ponto onde a escada toca o muro, e teríamos quatro forças desconhecidas. Com apenas três equações não poderíamos resolver este problema.

Considere um carro assimetricamente carregado. Quais são as forças, todas diferentes, que agem sobre os quatro pneus? Mais uma vez, o problema não pode ser resolvido, pois temos apenas três equações independentes para trabalhar. Da mesma forma, podemos resolver o problema de equilíbrio para uma mesa de três pernas, mas não para uma de quatro pernas. Problemas como esses, nos quais existem mais incógnitas do que equações, são chamados de **indeterminados**.

No mundo real, porém, existem soluções para problemas indeterminados. Se você apoiar os pneus de um carro nos pratos de quatro balanças, cada balança fornecerá uma leitura definida, e a soma das quatro leituras será o peso do carro. O que está faltando em nossos esforços para obter as forças através de equações?

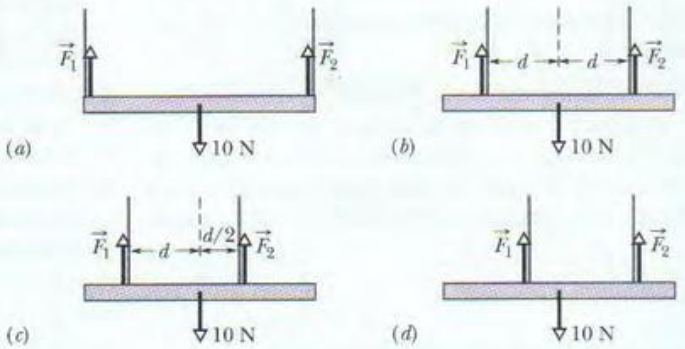
O problema está no fato de que supusemos implicitamente que os corpos aos quais aplicamos as equações do equilíbrio estático são perfeitamente rígidos, ou seja, não se deformam ao serem submetidos a forças. Na verdade, nenhum corpo é totalmente rígido. Os pneus de um carro, por exemplo, se deformam facilmente sob a ação de uma carga até que o carro atinja uma posição de equilíbrio estático.

Todos já tivemos a oportunidade de ocupar uma mesa bamba em um restaurante, a qual normalmente nivelamos colocando um calço de papel dobrado sob uma das pernas. Se um elefante se sentasse em uma dessas mesas, porém, pode ter certeza de que, se a mesa não quebrasse, ela se deformaria da mesma forma que os pneus do carro. Todas as pernas tocariam o piso, as forças normais do piso sobre as pernas da mesa assumiriam valores definidos (e diferentes), como na Fig. 12-9, e a mesa não ficaria mais bamba. Como podemos calcular os valores das forças que agem sobre as pernas?

Para resolver esses problemas de equilíbrio indeterminado precisamos suplementar as equações de equilíbrio com algum conhecimento de *elasticidade*, o ramo da física e da engenharia que descreve como os corpos se deformam quando são submetidos a forças. Uma introdução a este assunto é apresentada na próxima seção.

FIG. 12-9 A mesa é uma estrutura indeterminada. As quatro forças a que as pernas da mesa estão sujeitas diferem em módulo e não podem ser calculadas usando apenas as leis do equilíbrio estático.

**TESTE 3** Uma barra horizontal uniforme pesando 10 N deve ser pendurada no teto por dois fios que exercem forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sobre a barra. A figura mostra quatro configurações diferentes dos fios. Que configurações são indeterminadas (ou seja, tornam impossível calcular os valores numéricos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$)?




## 12-7 | Elasticidade

Quando muitos átomos se juntam para formar um sólido metálico, como, por exemplo, um prego de ferro, eles ocupam posições de equilíbrio em uma *rede cristalina* tridimensional, um arranjo repetitivo no qual cada átomo está a uma distância de equilíbrio bem definida dos vizinhos mais próximos. Os átomos são mantidos unidos por forças interatômicas, representadas por pequenas molas na Fig. 12-10. A rede é quase perfeitamente rígida, o que é outra forma de dizer que as "molas interatômicas" são extremamente duras. É por essa razão que temos a impressão de que alguns objetos comuns, como escadas, mesas e colheres, são indeformáveis. É claro que outros objetos comuns, como mangueiras de jardim e luvas de borracha, não dão absolutamente a impressão de serem indeformáveis. Os átomos de que são feitos esses objetos *não formam* uma rede rígida como a da Fig. 12-10, mas estão ligados em cadeias moleculares longas e flexíveis; cada uma dessas cadeias está ligada apenas fracamente às cadeias vizinhas.

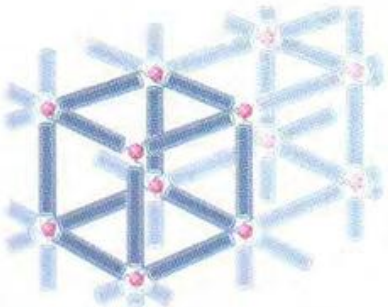


FIG. 12-10 Os átomos de um sólido metálico estão dispostos em uma rede regular tridimensional. As molas representam forças interatômicas.

Todos os corpos "rígidos" reais são na verdade ligeiramente **elásticos**, o que significa que podemos mudar ligeiramente suas dimensões puxando-os, empurrando-os, torcendo-os ou comprimindo-os. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas, considere uma barra de aço vertical, de 1 m de comprimento e 1 cm de diâmetro, presa no teto de uma fábrica. Se um carro compacto for pendurado na extremidade inferior da barra ela esticará apenas 0,5 mm, o que corresponde a 0,05% do comprimento original. Se o carro for removido, o comprimento da barra voltará ao valor inicial.

Se dois carros forem pendurados na barra ela ficará permanentemente deformada, ou seja, o comprimento não voltará ao valor inicial se a carga for removida. Se três carros forem pendurados na barra ela arrebentará. Imediatamente antes da ruptura o alongamento da barra será menor do que 0,2%. Embora deformações dessa ordem pareçam pequenas, elas são importantes para os engenheiros. (Se uma asa vai se partir ao ser submetida a uma certa força é, obviamente, uma questão importante.)

A Fig. 12-11 mostra três formas pelas quais as dimensões de um sólido podem mudar quando forças atuam sobre ele. Na Fig. 12-11*a* um cilindro é alongado. Na Fig. 12-11*b*, um cilindro é deformado por uma força perpendicular ao seu eixo maior, de modo parecido com a deformação em uma pilha de cartas de baralho. Na Fig. 12-11*c* um objeto sólido mergulhado em um fluido é comprimido uniformemente em todas as direções. O que esses três comportamentos têm em comum é que uma **tensão**, ou força deformadora por unidade de área, produz uma **deformação**. Na Fig. 12-11 a *tensão trativa* (associada ao alongamento) está ilustrada em (*a*), a *tensão de cisalhamento* em (*b*) e a *tensão hidrostática* em (*c*).

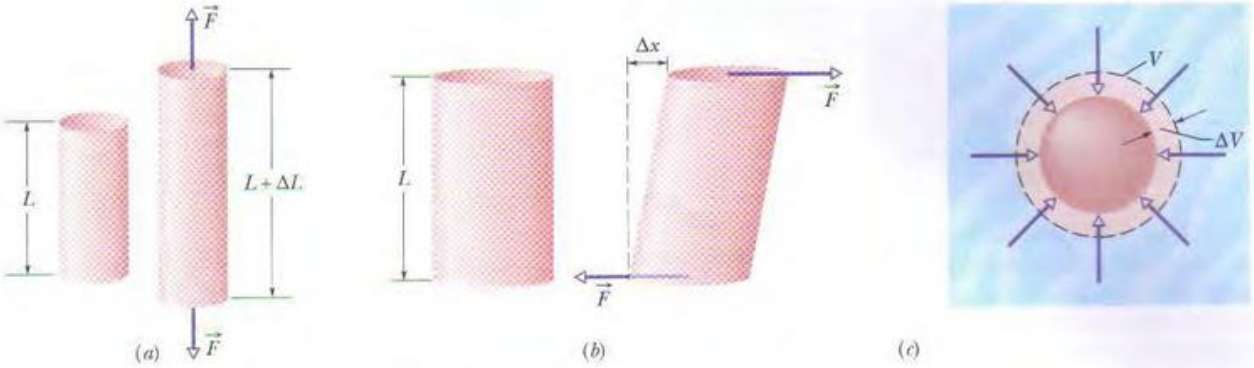



FIG. 12-11 (*a*) Um cilindro submetido a uma *tensão trativa* sofre um alongamento $\Delta L$. (*b*) Um cilindro submetido a uma *tensão de cisalhamento* sofre uma deformação $\Delta x$, semelhante à de uma pilha de cartas de baralho. (*c*) Uma esfera maciça submetida a uma *tensão hidrostática* uniforme aplicada por um fluido tem seu volume reduzido de um valor $\Delta V$. Todas as deformações mostradas estão muito exageradas.

As tensões e deformações assumem formas diferentes nas três situações da Fig. 12-11, mas para uma larga faixa de valores tensão e deformação são proporcionais. A constante de proporcionalidade é chamada de **módulo de elasticidade**, de modo que

$$\text{tensão} = \text{módulo} \times \text{deformação}. \tag{12-22}$$

Em um teste-padrão de propriedades elásticas a tensão trativa aplicada a um cilindro de teste (como o da Fig. 12-12) é lentamente aumentada de zero até o ponto em que o cilindro se rompe, e a deformação é medida e plotada. O resultado é um gráfico tensão-deformação como o da Fig. 12-13. Para uma larga faixa de tensões aplicadas, a relação tensão-deformação é linear e a amostra recupera as dimensões originais quando a tensão é removida; é nessa faixa que a Eq. 12-22 pode ser usada. Se a tensão ultrapassa o **limite elástico** $S_y$ da amostra a deformação se torna permanente. Se a tensão continua a aumentar a amostra acaba por se romper, em um valor de tensão conhecido como **limite de ruptura** $S_u$.

FIG. 12-12 Corpo de prova usado para obter uma curva tensão-deformação como a da Fig. 12-13. A variação $\Delta L$ que ocorre em uma certa distância $L$ é medida em um ensaio de tensão-deformação.

## Tração e Compressão

Para a tração ou para a compressão a tensão a que o objeto está submetido é definida como $F/A$, onde $F$ é o módulo da força aplicada perpendicularmente a uma área $A$ do objeto. A deformação é a grandeza adimensional $\Delta L/L$ que representa a variação fracionária (ou, às vezes, percentual) do comprimento da amostra. Se a amostra é uma barra longa e a tensão não ultrapassa o limite elástico, não só a barra como um todo mas qualquer trecho da barra experimenta a mesma deformação quando uma certa tensão é aplicada. Como a deformação é adimensional, o módulo de elasticidade da Eq. 12-22 tem dimensões da tensão, ou seja, força por unidade de área.

O módulo das tensões de tração e de compressão é chamado de **módulo de Young**, e é representado pelo símbolo $E$. Substituindo as grandezas da Eq. 12-22 por símbolos, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{12-23}$$

A deformação $\Delta L/L$ de uma amostra pode ser medida usando um instrumento conhecido como *extensômetro* (Fig. 12-14). Este dispositivo simples e útil, que pode ser preso a uma máquina de ensaios com fita adesiva, se baseia no princípio de que as propriedades elétricas de certos materiais dependem da deformação a que são submetidos.

Embora o módulo de Young de um objeto possa ser quase o mesmo para tração e compressão, o limite de ruptura pode ser bem diferente para os dois tipos de tensão. O concreto, por exemplo, resiste muito bem à compressão, mas é tão fraco sob tração que raramente é usado dessa forma. A Tabela 12-1 mostra o módulo de Young e outras propriedades elásticas para alguns materiais de interesse para a engenharia.

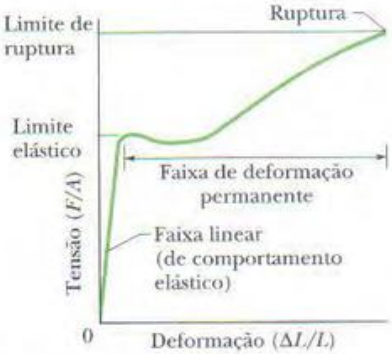



FIG. 12-13 Curva tensão-deformação de um corpo de prova de aço como o da Fig. 12-12. O corpo de prova sofre uma deformação permanente quando a tensão atinge o *limite elástico* do material, e se rompe quando a tensão atinge o *limite de ruptura*.

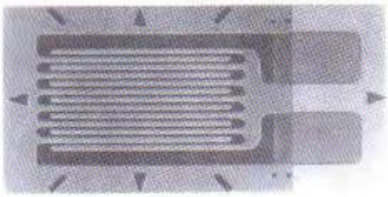


FIG. 12-14 Um extensômetro de 9,8 mm por 4,6 mm usado para medir deformações. O dispositivo é preso com adesivo ao objeto cuja deformação se deseja medir e sofre a mesma deformação que o objeto. A resistência elétrica do extensômetro varia com a deformação, permitindo que deformações de até 3% sejam medidas. *(Cortesia da Vishay Micro-Measurements Group, Raleigh, NC)*

**TABELA 12-1**

**Algumas Propriedades Elásticas de Materiais Escolhidos**

| Material | Massa específica $\rho$ (kg/m$^3$) | Módulo de Young $E$ ($10^9$ N/m$^2$) | Limite de Ruptura $S_r$ ($10^6$ N/m$^2$) | Limite de Elasticidade $S_e$ ($10^6$ N/m$^2$) |
|---|---|---|---|---|
| Aço[a] | 7860 | 200 | 400 | 250 |
| Alumínio | 2710 | 70 | 110 | 95 |
| Vidro | 2190 | 65 | 50[b] | — |
| Concreto[c] | 2320 | 30 | 40[b] | — |
| Madeira[d] | 525 | 13 | 50[b] | — |
| Osso | 1900 | 9[b] | 170[b] | — |
| Poliestireno | 1050 | 3 | 48 | — |

[a]Aço estrutural (ASTM-A36). [c]De alta resistência.
[b]Para compressão. [d]Pinho.

## Cisalhamento

No caso do cisalhamento, a tensão também é uma força por unidade de área, mas o vetor força está no plano da área e não perpendicular a esse plano. A deformação é a razão adimensional $\Delta x/L$, onde $\Delta x$ e $L$ são as grandezas mostradas na Fig. 12-11*b*. O módulo de elasticidade correspondente, que é representado pelo símbolo $G$, é chamado de **módulo de cisalhamento**. No caso do cisalhamento, a Eq. 12-22 assume a forma

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}. \tag{12-24}$$

As tensões de cisalhamento exercem um papel decisivo no empenamento de eixos que giram sob carga e nas fraturas de ossos causadas por flexão.

## Tensão Hidrostática

Na Fig. 12-11*c*, a tensão é a pressão $p$ que o fluido exerce sobre o objeto, e, como veremos no Capítulo 14, pressão é força por unidade de área. A deformação é $\Delta V/V$, onde $V$ é o volume original da amostra e $\Delta V$ é o valor absoluto da variação de volume. O módulo correspondente, representado pelo símbolo $B$, é chamado de **módulo de elasticidade volumétrico** do material. Dizemos que o objeto está sob *compressão hidrostática*, e a pressão pode ser chamada de *tensão hidrostática*. Para esta situação, a Eq. 12-22 pode ser escrita na forma

$$p = B\frac{\Delta V}{V}. \tag{12-25}$$

O módulo de elasticidade volumétrico é $2{,}2 \times 10^9$ N/m$^2$ para a água e $1{,}6 \times 10^{11}$ N/m$^2$ para o aço. A pressão no fundo do Oceano Pacífico, na sua profundidade média de aproximadamente 4000 m, é $4{,}0 \times 10^7$ N/m$^2$. A compressão fracionária $\Delta V/V$ da água produzida por esta pressão é 1,8%; a de um objeto de aço é apenas 0,025%. Em geral, os sólidos, com suas redes atômicas rígidas, são menos compressíveis que os líquidos, nos quais os átomos ou moléculas estão mais frouxamente acoplados aos vizinhos.

## Exemplo 12-5

Uma extremidade de uma barra de aço de raio $R = 9{,}5$ mm e comprimento $L = 81$ cm é presa a um torno, e uma força de módulo $F = 62$ kN é aplicada perpendicularmente à outra extremidade (uniformemente ao longo da seção reta). Quais são a tensão, o alongamento $\Delta L$ e a deformação da barra?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A tensão é a razão entre o módulo $F$ da força perpendicular e a área $A$. Esta razão é o lado esquerdo da Eq. 12-23. (2) O alongamento $\Delta L$ está relacionado à tensão e ao módulo de Young através da Eq. 12-23

$(F/A) = E\Delta L/L$). (3) A tensão é a razão entre o alongamento e o comprimento inicial $L$.

***Cálculos:*** Para determinar a tensão, escrevemos

$$\text{tensão} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6{,}2\times10^4\ \text{N}}{(\pi)(9{,}5\times10^{-3}\ \text{m})^2}$$

$$= 2{,}2 \times 10^8\ \text{N/m}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como o limite elástico do aço estrutural é de $2{,}5\times10^8\ \text{N/m}^2$, esta barra está perigosamente próxima do limite elástico.

O valor do módulo de Young do aço pode ser obtido na Tabela 12-1. De acordo com a Eq. 12-23, o alongamento é

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2{,}2\times10^8\ \text{N/m}^2)\,(0{,}81\ \text{m})}{2{,}0\times10^{11}\ \text{N/m}^2}$$

$$= 8{,}9 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}89\ \text{mm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A deformação é, portanto,

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8{,}9\times10^{-4}\ \text{m}}{0{,}81\ \text{m}}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-3} = 0{,}11\%. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 12-6

Uma mesa tem três pernas com 1,00 m de comprimento e uma quarta perna com um comprimento adicional $d = 0{,}50$ mm, que faz com que a mesa fique ligeiramente bamba. Um cilindro de aço de massa $M = 290$ kg é colocado sobre a mesa (que tem uma massa muito menor que $M$), comprimindo as quatro pernas sem envergá-las e fazendo com que a mesa fique nivelada. As pernas são cilindros de madeira com uma área da seção reta $A = 1{,}0\ \text{cm}^2$; o módulo de Young é $E = 1{,}3\times10^{10}\ \text{N/m}^2$. Quais são os módulos das forças que o chão exerce sobre as pernas da mesa?

**IDÉIAS-CHAVE** Tomamos a mesa e o cilindro de aço como nosso sistema. A situação é a da Fig. 12-9, exceto pelo fato de que agora temos um cilindro de aço sobre a mesa. Se o tampo da mesa permanece nivelado, as pernas devem estar comprimidas da seguinte forma: cada uma das pernas mais curtas deve ter sofrido o mesmo encurtamento (vamos chamá-lo de $\Delta L_3$) e, portanto, estar submetida à mesma força $F_3$. A perna mais comprida deve ter sofrido um encurtamento maior, $\Delta L_4$, e, portanto, deve estar submetida a uma força $F_4$ maior que $F_3$. Em outras palavras, para que a mesa esteja nivelada, devemos ter

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d. \qquad (12\text{-}26)$$

De acordo com a Eq. 12-23, podemos relacionar uma variação do comprimento à força responsável por essa variação através da equação $\Delta L = FL/AE$, onde $L$ é o comprimento original de uma das pernas. Podemos usar esta relação para substituir $\Delta L_4$ e $\Delta L_3$ na Eq. 12-26. Observe que podemos tomar o comprimento original $L$ como sendo aproximadamente o mesmo para as quatro pernas.

***Cálculos:*** Fazendo essas substituições e essa aproximação, podemos escrever:

$$\frac{F_4 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d. \qquad (12\text{-}27)$$

Não podemos resolver esta equação porque ela possui duas incógnitas, $F_4$ e $F_3$.

Para obter uma segunda equação envolvendo $F_4$ e $F_3$ podemos definir um eixo vertical $y$ e escrever uma equação de equilíbrio para as componentes verticais das forças ($F_{\text{res},y} = 0$) na forma

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0, \qquad (12\text{-}28)$$

onde $Mg$ é o módulo da força gravitacional que age sobre o sistema. (*Três* pernas estão submetidas a uma força $F_3$.) Para resolver o sistema de equações 12-27 e 12-28 para, digamos, calcular $F_3$, usamos primeiro a Eq. 12-28 para obter $F_4 = Mg - 3F_3$. Substituindo $F_4$ por seu valor na Eq. 12-27, obtemos, depois de algumas manipulações algébricas,

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L}$$

$$= \frac{(290\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{4}$$

$$- \frac{(5{,}0\times10^{-4}\ \text{m})(10^{-4}\ \text{m}^2)(1{,}3\times10^{10}\ \text{N/m}^2)}{(4)(1{,}00\ \text{m})}$$

$$= 548\ \text{N} \approx 5{,}5 \times 10^2\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo este valor na Eq. 12-28, obtemos:

$$F_4 = Mg - 3F_3 = (290\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) - 3(548\ \text{N})$$

$$\approx 1{,}2\ \text{kN}. \qquad \text{(Resposta)}$$

É fácil mostrar que quando o equilíbrio é atingido as três pernas curtas estão com uma compressão de 0,42 mm e a perna mais comprida está com uma compressão de 0,92 mm.

## REVISÃO E RESUMO

**Equilíbrio Estático** Quando um corpo rígido está em repouso, dizemos que ele se encontra em **equilíbrio estático**. A soma vetorial das forças que agem sobre um corpo em equilíbrio estático é zero:

$$\vec{F}_{res} = 0 \qquad \text{(equilíbrio de forças).} \qquad (12\text{-}3)$$

Se todas as forças estão no plano $xy$, esta equação vetorial é equivalente a duas equações para as componentes:

$$F_{res,x} = 0 \quad \text{e} \quad F_{res,y} = 0 \qquad \text{(equilíbrio de forças).} \qquad (12\text{-}7, 12\text{-}8)$$

A soma vetorial dos torques externos em relação a *qualquer* ponto que agem sobre um corpo em equilíbrio estático também é zero, ou seja,

$$\vec{\tau}_{res} = 0 \qquad \text{(equilíbrio de torques).} \qquad (12\text{-}5)$$

Se as forças estão no plano $xy$, todos os torques são paralelos ao eixo $z$, e a Eq. 12-5 é equivalente a uma equação para a única componente diferente de zero:

$$\tau_{res,z} = 0 \qquad \text{(equilíbrio de torques).} \qquad (12\text{-}9)$$

**Centro de Gravidade** A força gravitacional age separadamente sobre cada elemento de um corpo. O efeito total de todas essas forças pode ser determinado imaginando-se uma força gravitacional equivalente $\vec{F}_g$ aplicada ao **centro de gravidade** do corpo. Se a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é a mesma para todos os elementos do corpo, a posição do centro de gravidade coincide com a do centro de massa.

**Módulos de Elasticidade** Três **módulos de elasticidade** são usados para descrever o comportamento elástico (as deformações) de objetos submetidos a forças. A **deformação** (variação relativa do comprimento) está linearmente relacionada à **tensão** (força por unidade de área) aplicada através de um módulo apropriado, de acordo com a relação geral

$$\text{tensão} = \text{módulo} \times \text{deformação}. \qquad (12\text{-}22)$$

**Tração e Compressão** Quando um objeto está sob tração ou compressão, a Eq. 12-22 é escrita na forma

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}, \qquad (12\text{-}23)$$

onde $\Delta L/L$ é a deformação de alongamento ou compressão do objeto, $F$ é o módulo da força $\vec{F}$ responsável pela deformação, $A$ é a área de seção reta à qual a força $\vec{F}$ é aplicada (perpendicularmente a $A$, como na Fig. 12-11*a*), e $E$ é o **módulo de Young** do objeto. A tensão é $F/A$.

**Cisalhamento** Quando um objeto está sob tensão de cisalhamento, a Eq. 12-22 é escrita como

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}, \qquad (12\text{-}24)$$

onde $\Delta x/L$ é a deformação de cisalhamento do objeto, $\Delta x$ é o deslocamento de uma das extremidades do objeto na direção da força $\vec{F}$ aplicada (como na Fig. 12-11*b*) e $G$ é o **módulo de cisalhamento** do objeto. A tensão é $F/A$.

**Tensão Hidrostática** Quando um objeto é submetido a uma *compressão hidrostática* por uma tensão exercida por um fluido no qual está submerso, a Eq. 12-22 é escrita na forma

$$p = B\frac{\Delta V}{V}, \qquad (12\text{-}25)$$

onde $p$ é a pressão (*tensão hidrostática*) que o fluido exerce sobre o objeto, $\Delta V/V$ (a deformação) é o valor absoluto da variação relativa do volume do objeto produzida por essa pressão e $B$ é o **módulo de elasticidade volumétrico** do objeto.

## PERGUNTAS

**1** A Fig. 12-15 mostra quatro vistas superiores de discos uniformes com um movimento de rotação que estão deslizando em um piso sem atrito. Três forças, de módulo $F$, $2F$ ou $3F$, agem sobre cada disco na borda, no centro ou no ponto médio entre a borda e o centro. As forças giram com os discos e, nos "instantâneos" da Fig. 12-15, apontam para a esquerda ou para a direita. Quais são os discos que estão em equilíbrio?

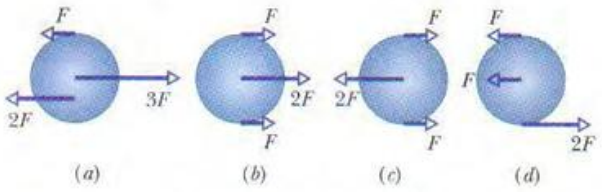



FIG. 12-15 Pergunta 1.

**2** A Fig. 12-16 mostra uma vista superior de uma barra uniforme sobre a qual agem quatro forças. Suponha que foi escolhido um eixo de rotação passando pelo ponto $O$, foram calculados os torques produzidos pelas forças em relação a esse eixo e verificou-se que o torque resultante é nulo. O torque resultante continuará a ser nulo se o eixo de rotação escolhido for (a) o ponto $A$ (situado no interior da barra), (b) o ponto $B$ (situado no prolongamento da barra), ou (c) o ponto $C$ (ao lado da barra)? (d) Suponha que o torque resultante em relação ao ponto $O$ não seja nulo. Existe algum outro ponto em relação ao qual o torque resultante se anula?

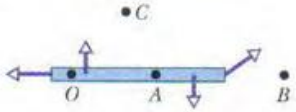



FIG. 12-16 Pergunta 2.

**3** A Fig. 12-17 mostra um móbile de pingüins de brinquedo pendurado em um teto. As barras transversais são horizontais, têm massa desprezível e o comprimento à direita do fio de sustentação é três vezes maior que o comprimento à esquerda do fio. O pingüim 1 tem massa $m_1 = 48$ kg. Quais são as massas (a) do pingüim 2, (b) do pingüim 3 e (c) do pingüim 4?

**4** Na Fig. 12-18 uma trave rígida está presa a dois postes que estão fixos em um piso. Um cofre pequeno, mas pesado, é colocado nas seis posições indicadas, uma de cada vez. Suponha que

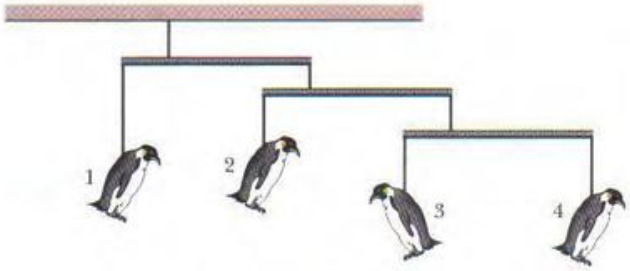



FIG. 12-17 Pergunta 3.

a massa da trave é desprezível em comparação com a do cofre. (a) Ordene as posições de acordo com a força exercida pelo cofre sobre o poste $A$, começando pela tensão compressiva maior e terminando com a maior tensão trativa, e indique em qual das posições (se houver alguma) a força é nula. (b) Ordene as posições de acordo com a força exercida sobre o poste $B$.

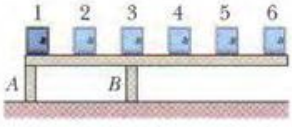



FIG. 12-18 Pergunta 4.

**5** A Fig. 12-19 mostra três situações nas quais a mesma barra horizontal está presa a uma parede por uma dobradiça em uma das extremidades e por uma corda na outra. Sem realizar cálculos numéricos, ordene as situações de acordo com o módulo (a) da força que a corda exerce sobre a barra, (b) da força vertical que a dobradiça exerce sobre a barra e (c) da força horizontal que a dobradiça exerce sobre a barra, começando pela maior.

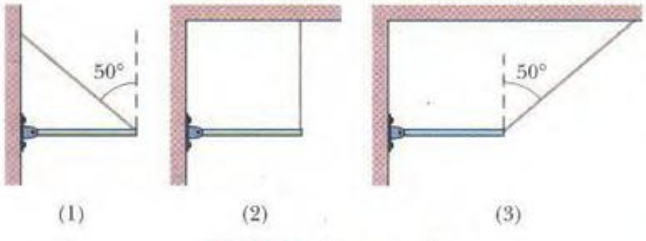



FIG. 12-19 Pergunta 5.

**6** Uma escada está apoiada em uma parede sem atrito, mas não cai por causa do atrito com o chão. Suponha que a base da escada seja deslocada em direção à parede. Determine se a grandeza a seguir aumenta, diminui ou permanece a mesma (em módulo): (a) a força normal sobre a escada exercida pelo chão; (b) a força exercida pela parede sobre a escada; (c) a força de atrito estático exercida pelo chão sobre a escada; (d) o valor máximo $f_{s,máx}$ da força de atrito estático.

**7** Na Fig. 12-20, uma barra vertical está presa a uma dobradiça na extremidade inferior e a um cabo na extremidade superior. Uma força horizontal $\vec{F}_a$ é aplicada à haste, como mostra a figura. Se o ponto de aplicação da força é deslocado para cima ao longo da haste, a tensão do cabo aumenta, diminui ou permanece a mesma?

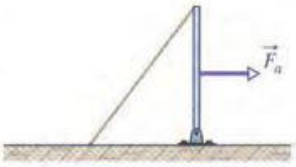



FIG. 12-20 Pergunta 7.

**8** Três cavalinhos estão pendurados em um arranjo (em repouso) de polias e cordas de massa desprezível na Fig. 12-21. Uma corda se estende do lado direito do teto até a polia mais baixa à esquerda, dando meia volta em todas as polias. Várias cordas menores sustentam as polias e os cavalinhos. São dados os pesos (em newtons) de dois cavalinhos. Qual é o peso do terceiro cavalinho? (*Sugestão:* Uma corda que dá meia volta em torno de uma polia puxa-a com uma força total que é igual a duas vezes a da tensão da corda.) (b) Qual é a tensão da corda $T$?

FIG. 12-21 Pergunta 8.

**9** Na Fig. 12-22, uma barra estacionária $AC$ de 5 kg é sustentada de encontro a uma parede por uma corda e pelo atrito entre a barra e a parede. A barra uniforme tem 1 m de comprimento e $\theta = 30°$. (a) Onde deve ser posicionado um eixo em rotação para determinar o módulo da força $\vec{T}$ exercida pela corda sobre a barra a partir de uma única equação? Com essa escolha de eixo e considerando positivos os torques no sentido anti-horário, qual é o sinal (b) do torque $\tau_p$ exercido pelo peso sobre a barra e (c) do torque $\tau_c$ exercido pela corda sobre a barra? (d) O módulo de $\tau_c$ é maior, menor ou igual ao módulo de $\tau_p$?

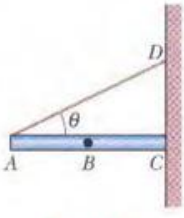



FIG. 12-22 Pergunta 9.

**10** A Fig. 12-23 mostra um bloco horizontal suspenso por dois fios, $A$ e $B$, que são iguais, exceto quanto ao comprimento na ausência de deformação. O centro de massa do bloco está mais próximo do fio $B$ que do fio $A$. (a) Calculando os torques em relação ao centro de massa do bloco, determine se o módulo do torque produzido pelo fio $A$ é maior, igual ou menor que o módulo do torque produzido pelo fio $B$. (b) Qual dos fios exerce mais força sobre o bloco? (c) Se os fios agora têm comprimentos iguais, qual dos dois era inicialmente mais curto (antes de o bloco ser suspenso)?

FIG. 12-23 Pergunta 10.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 12-4 O Centro de Gravidade

•1 Como a constante $g$ é praticamente a mesma em todos os pontos da grande maioria das estruturas, em geral supomos que o centro de gravidade de uma estrutura coincide com o centro de massa. Neste exemplo fictício, porém, a variação da constante $g$ é significativa. A Fig. 12-24 mostra um arranjo de seis partículas, todas de massa $m$, presas na borda de uma estrutura rígida de massa desprezível. A distância entre partículas vizinhas é 2,00 m.

A tabela a seguir mostra o valor de $g$ (em m/s²) na posição de cada partícula. Usando o sistema de coordenadas mostrado na figura, determine (a) a coordenada $x_{CM}$ e (b) a coordenada $y_{CM}$ do centro de massa do sistema de seis partículas. Em seguida, determine (c) a coordenada $x_{CG}$ e (d) a coordenada $y_{CG}$ do centro de gravidade do sistema de seis partículas.

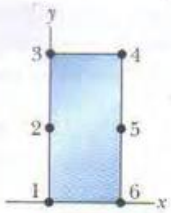



FIG. 12-24 Problema 1.

| Partícula | $g$ | Partícula | $g$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8,00 | 4 | 7,40 |
| 2 | 7,80 | 5 | 7,60 |
| 3 | 7,60 | 6 | 7,80 |

## seção 12-5 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

•2 Um arco é puxado pelo ponto médio até que a tensão da corda fique igual à força exercida pelo arqueiro. Qual é o ângulo entre as duas metades da corda?

•3 Uma corda de massa desprezível está esticada horizontalmente entre dois suportes separados por uma distância de 3,44 m. Quando um objeto pesando 3160 N é pendurado no centro da corda, ela cede 35,0 cm. Qual é a tensão da corda?

•4 Um grupo de estudantes de física, cujos pesos estão indicados em newtons na Fig. 12-25, está equilibrado em uma gangorra. Qual o número da pessoa que produz o maior torque em relação a um eixo de rotação que passa pelo *fulcro f* no sentido (a) para fora do papel e (b) para dentro do papel?

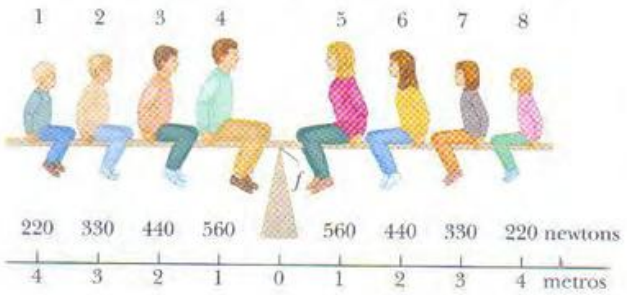



FIG. 12-25 Problema 4.

•5 Na Fig. 12-26 uma esfera uniforme de massa $m = 0{,}85$ kg e raio $r = 4{,}2$ cm é mantida em repouso por uma corda de massa desprezível, presa a uma parede sem atrito a uma distância $L = 8{,}0$ cm acima do centro da esfera. Determine (a) a tensão da corda e (b) a força que a parede exerce sobre a esfera.

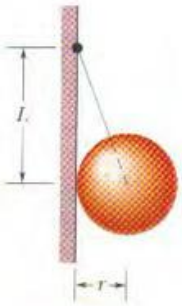



FIG. 12-26 Problema 5.

•6 A distância entre os eixos dianteiro e traseiro de um automóvel é de 3,05 m. A massa do automóvel é 1360 kg, e seu centro de gravidade está situado 1,78 m atrás do eixo dianteiro. Com o automóvel em terreno plano, determine o módulo da força exercida pelo solo (a) sobre cada roda dianteira (supondo que as forças exercidas sobre as rodas dianteiras são iguais) e (b) sobre cada roda traseira (supondo que as forças exercidas sobre as rodas traseiras são iguais).

•7 Um mergulhador com 580 N de peso está em pé na extremidade de um trampolim de comprimento $L = 4{,}5$ m e massa desprezível (Fig. 12-27). O trampolim está preso em dois suportes separados por uma distância $d = 1{,}5$ m. Das forças que agem sobre o trampolim, quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo suporte de trás e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo suporte da frente? (e) Que pedestal (o de trás ou o da frente) está sendo tracionado, e (f) que pedestal está sendo comprimido?

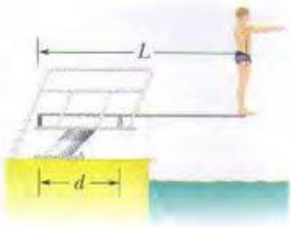



FIG. 12-27 Problema 7.

•8 Um andaime com 60 kg de massa e 5,0 m de comprimento é mantido na horizontal por um cabo vertical em cada extremidade. Um lavador de janelas com 80 kg de massa está em pé sobre o andaime a 1,5 m de distância de uma das extremidades. Qual é a tensão (a) no cabo mais próximo e (b) no cabo mais distante do lavador?

•9 Um lavador de janelas de 75 kg usa uma escada com 10 kg de massa e 5,0 m de comprimento. Ele apóia uma extremidade no chão a 2,5 m de uma parede, encosta a extremidade oposta em uma janela rachada e começa a subir. Quando percorreu uma distância de 3,0 m ao longo da escada a janela quebra. Despreze o atrito entre a escada e a janela e suponha que a base da escada não escorregue. Quando a janela está na iminência de quebrar, qual é (a) o módulo da força que a escada exerce sobre a janela, (b) o módulo da força que o chão exerce sobre a escada e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da força que o chão exerce sobre a escada?

•10 Na Fig. 12-28 um homem está tentando tirar o carro de um atoleiro no acostamento de uma estrada. Ele amarra uma das extremidades de uma corda no pára-choque dianteiro e a outra extremidade em um poste, a 18 m de distância. Em seguida, empurra a corda lateralmente, no ponto médio, com uma força de 550 N, deslocando o centro da corda de 0,30 m em relação à posição anterior, e o carro praticamente não se move. Qual é a força exercida pela corda sobre o carro? (A corda sofre um pequeno alongamento.)

FIG. 12-28 Problema 10.

•11 Uma régua de um metro está em equilíbrio horizontal sobre a lâmina de uma faca, na marca de 50,0 cm. Com duas moedas de 5,00 g empilhadas na marca de 12,0 cm, a régua fica em equilíbrio na marca de 45,5 cm. Qual é a massa da régua?

•12 O sistema da Fig. 12-29 está em equilíbrio, com a corda do centro exatamente na horizontal. O bloco $A$ pesa 40 N, o bloco $B$ pesa 50 N e o ângulo $\phi$ é 35°. Determine (a) a tensão $T_1$, (b) a tensão $T_2$, (c) a tensão $T_3$ e (d) o ângulo $\theta$.

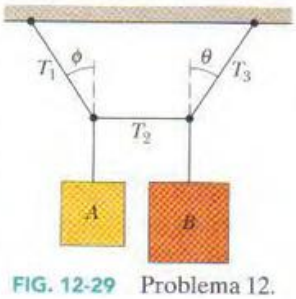



FIG. 12-29 Problema 12.

•13 As forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ agem sobre a estrutura cuja vista superior aparece na Fig. 12-27. Deseja-se colocar a estrutura em equilíbrio aplicando uma quarta força em um ponto como $P$. A quarta força tem componentes vetoriais $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$. Sabe-se que $a = 2{,}0$ m, $b = 3{,}0$ m, $c = 1{,}0$ m, $F_1 = 20$ N, $F_2 = 10$ N e $F_3 = 5{,}0$ N. Determine (a) $F_h$, (b) $F_v$ e (c) $d$.

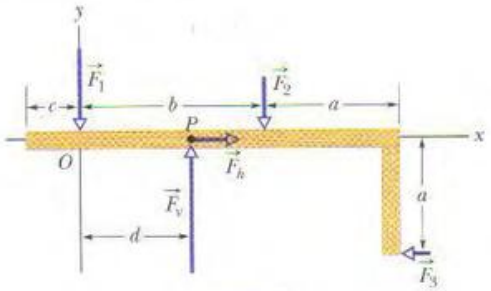



FIG. 12-30 Problema 13.

•14 Um caixote cúbico uniforme tem 0,750 m de lado e pesa 500 N. Ele repousa em um piso com uma das arestas encostada em um obstáculo fixo muito pequeno. A que altura mínima acima do piso deve ser aplicada uma força horizontal de 350 N para virar o caixote?

•15 Para quebrar a casca de uma noz com um quebra-nozes, forças de pelo menos 40 N de módulo devem agir sobre a casca em ambos os lados. Para o quebra-nozes da Fig. 12-31, com distâncias $L = 12$ cm e $d = 2{,}6$ cm, quais são as componentes das forças $F_\perp$ em cada cabo (aplicadas perpendicularmente aos cabos) que correspondem a esses 40 N?

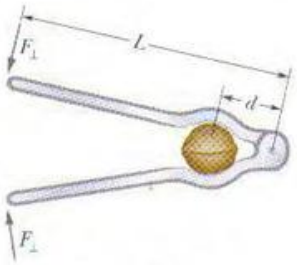



FIG. 12-31 Problema 15.

•16 Na Fig. 12-32, um andaime horizontal, de 2,00 m de comprimento e massa uniforme de 50,0 kg, está suspenso de um edifício por dois cabos. O andaime tem várias latas de tinta empilhadas. A massa total das latas de tinta é 75,0 kg. A tensão do cabo à direita é 722 N. A que distância *desse* cabo está o centro de massa do sistema de latas de tinta?

FIG. 12-32 Problema 16.

•17 A Fig. 12-33 mostra as estruturas anatômicas da parte inferior da perna e do pé que estão envolvidas quando ficamos na ponta do pé, com o calcanhar levemente levantado, de modo que o pé faz contato com o chão apenas no ponto $P$. Suponha que $a = 5{,}0$ cm, $b = 15$ cm e o peso da pessoa é 900 N. Das forças que agem sobre o pé, quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força que o músculo da panturrilha exerce sobre o ponto $A$, e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força que os ossos da perna exercem sobre o ponto $B$?

FIG. 12-33 Problema 17.

•18 Um jogador segura uma bola de boliche ($M = 7{,}2$ kg) na palma da mão (Fig. 12-34). O braço está na vertical e o antebraço ($m = 1{,}8$ kg) na horizontal. Qual é o módulo (a) da força que o bíceps exerce sobre o antebraço e (b) a força que os ossos exercem entre si na articulação do cotovelo?

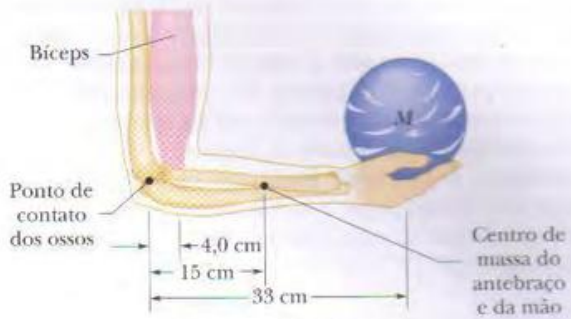



FIG. 12-34 Problema 18.

•19 Na Fig. 12-35 uma viga uniforme de peso 500 N e 3,0 m de comprimento está suspensa horizontalmente. No lado esquerdo está presa a uma parede por uma dobradiça; no lado direito é sustentada por um cabo pregado na parede a uma distância $D$ acima da viga. A tensão de ruptura do cabo é 1200 N. (a) Que valor de $D$ corresponde a essa tensão? (b) Para que o cabo não se rompa, $D$ deve aumentar ou diminuir em relação a esse valor?

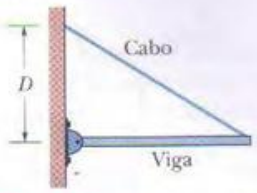



FIG. 12-35 Problema 19.

•20 Na Fig. 12-36 o andaime horizontal 2, de massa uniforme $m_2 = 30{,}0$ kg e comprimento $L_2 = 2{,}00$ m, está pendurado em um andaime horizontal 1, de massa uniforme $m_1 = 50{,}0$ kg. Uma caixa de pregos de 20,0 kg está no andaime 2, com o centro à distância $d = 0{,}500$ m da extremidade esquerda. Qual é a tensão $T$ do cabo indicado na figura?

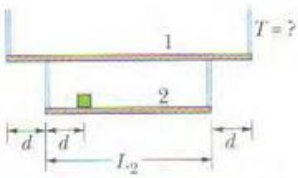



FIG. 12-36 Problema 20.

••21 Na Fig. 12-37 qual é o menor valor do módulo da força horizontal (constante) $\vec{F}$, aplicada horizontalmente ao eixo da roda, que permite à roda ultrapassar um degrau de altura $h = 3{,}00$ cm? O raio da roda é $r = 6{,}00$ cm e a massa é $m = 0{,}800$ kg.

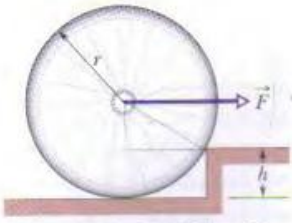



FIG. 12-37 Problema 21.

••22 Na Fig. 12-38 uma alpinista com 533,8 N de peso é sustentada por uma corda de segurança presa a um grampo em uma extremidade e a um mosquetão na cintura da moça na outra extremidade. A linha de ação da força exercida pela corda passa pelo centro de massa da alpinista. Os ângulos indicados na figura são $\theta = 40{,}0°$ e $\phi = 30{,}0°$. Se os pés da moça estão na iminência de escorregar na parede vertical, qual é

FIG. 12-38 Problema 22.

o coeficiente de atrito estático entre os sapatos de alpinismo e a parede?

••23 Na Fig. 12-39 um bloco de 15 kg é mantido em repouso através de um sistema de polias. O braço da pessoa está na vertical; o antebraço faz um ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal. O antebraço e a mão têm uma massa conjunta de 2,0 kg, com um centro de massa a uma distância $d_1 = 15$ cm à frente do ponto de contato dos ossos do antebraço com o osso do braço (úmero). Um músculo (o tríceps) puxa o antebraço verticalmente para cima com uma força cujo ponto de aplicação está a uma distância $d_2 = 2{,}5$ cm atrás desse ponto de contato. A distância $d_3$ é 35 cm. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo tríceps sobre o antebraço e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo úmero sobre o antebraço?

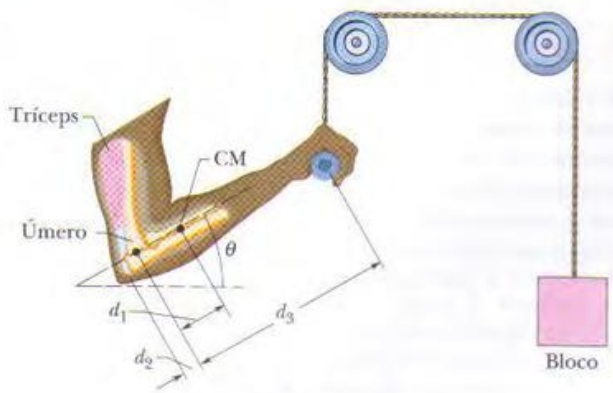



FIG. 12-39 Problema 23.

••24 Na Fig. 12-40 um alpinista se apóia com as mãos em uma encosta vertical coberta de gelo cujo atrito é desprezível. A distância $a$ é 0,914 m e a distância $L$ é 2,10 m. O centro de massa do alpinista está a uma distância $d = 0{,}940$ m do ponto de contato entre os pés do alpinista e uma plataforma horizontal na rocha. Se o alpinista está na iminência de escorregar, qual é o coeficiente de atrito estático entre os pés e a rocha?

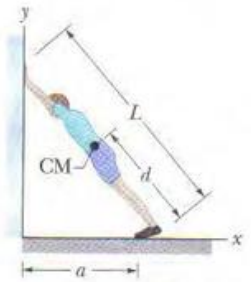



FIG. 12-40 Problema 24.

••25 Na Fig. 12-41 uma extremidade de uma viga uniforme de 222 N de peso está presa por uma dobradiça a uma parede; a outra extremidade é sustentada por um fio que faz ângulos de 30,0° com a viga e com a parede. Determine (a) a tensão no fio e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a viga.

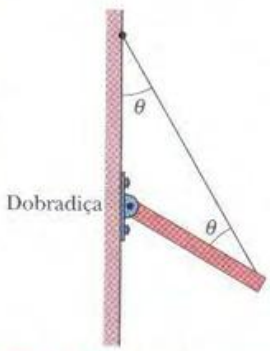



FIG. 12-41 Problema 25.

••26 Na Fig. 12-42 um alpinista de 55 kg está subindo por uma chaminé na pedra, com as mãos puxando um lado da chaminé e os pés pressionando o lado oposto. A chaminé tem uma largura $w = 0{,}20$ m e o centro de massa do alpinista está a uma distância horizontal $d = 0{,}40$ m da chaminé. O coeficiente de atrito estático entre mãos e rocha é $\mu_1 = 0{,}40$, e entre botas e rocha é $\mu_2 = 1{,}2$. (a) Qual é a menor força horizontal das mãos e pés que mantém o alpinista estável? (b) Para a força horizontal do item (a), qual deve ser a distância vertical $h$ entre as mãos e os pés? Se o alpinista encontra uma rocha úmida, para a qual os valores de $\mu_1$ e $\mu_2$ são menores, o que acontece com (c) a resposta do item (a) e (d) a resposta do item (b)?

FIG. 12-42 Problema 26.

••27 O sistema na Fig. 12-43 está em equilíbrio. Um bloco de concreto com uma massa de 225 kg está pendurado na extremidade de uma longarina com uma massa de 45,0 kg. Para os ângulos $\phi = 30{,}0°$ e $\theta = 45{,}0°$, determine (a) a tensão $T$ do cabo e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a longarina.

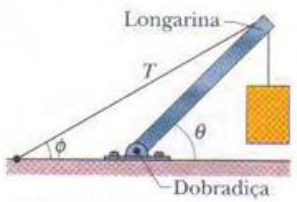



FIG. 12-43 Problema 27.

••28 Na Fig. 12-44 um cartaz quadrado uniforme de 50,0 kg, de lado $L = 2{,}00$ m, está pendurado em uma barra horizontal de comprimento $d_h = 3{,}00$ m e massa desprezível. Um cabo está preso em uma extremidade da barra e em um ponto de uma parede a uma distância $d_v = 4{,}00$ m acima do ponto onde a outra extremidade da barra está presa na parede por uma dobradiça. (a) Qual é a tensão do cabo? Quais são (b) o módulo e (c) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da componente horizontal da força que a dobradiça exerce sobre a haste e (d) o módulo e (e) o sentido (para cima ou para baixo) da componente vertical dessa força?

FIG. 12-44 Problema 28.

••29 Na Fig. 12-45 uma barra não-uniforme está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas de massa desprezível. Uma corda faz um ângulo $\theta = 36{,}9°$ com a vertical; a outra faz um ângulo $\phi = 53{,}1°$ com a vertical. Se o comprimento $L$ da barra é 6,10 m, calcule a distância $x$ entre a extremidade esquerda da barra e o seu centro de massa.

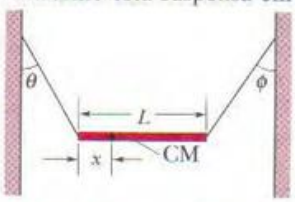



FIG. 12-45 Problema 29.

••30 Na Fig. 12-46, suponha que o comprimento $L$ da barra uniforme seja 3,00 m e seu peso seja 200 N. Suponha ainda que o bloco tenha um peso $P = 300$ N e que $\theta = 30{,}0°$. O fio pode suportar uma tensão máxima de 500 N. (a) Qual é a maior distância $x$ para a qual o fio não arrebenta? Com o bloco posicionado neste valor máximo de $x$, quais são as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a barra no ponto $A$?

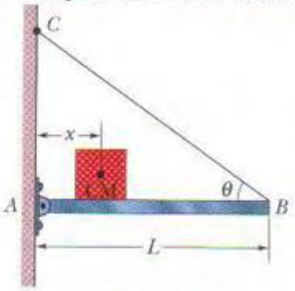



FIG. 12-46
Problemas 30 e 32.

••31 Uma porta tem uma altura de 2,1 m, ao longo de um eixo $y$ que se estende verticalmente para cima, e uma largura de 0,91 m, ao longo de um eixo $x$ que se estende horizontalmente a partir do lado da porta que está preso com dobradiças. Uma das dobradiças está a 0,30 m da borda superior da porta e outra a 0,30 m da borda inferior; cada uma sustenta metade do peso da porta, cuja massa é 27 kg. Em termos dos vetores unitários, quais são as forças exercidas sobre a porta (a) pela dobradiça superior e (b) pela dobradiça inferior?

••32 Na Fig. 12-46, uma barra fina $AB$ de peso desprezível e comprimento $L$ está presa a uma parede vertical por uma dobradiça no ponto $A$ e sustentada no ponto $B$ por um fio fino $BC$ que faz um ângulo $\theta$ com a horizontal. Um bloco de peso $P$ pode ser deslocado para qualquer posição ao longo da barra; sua posição é definida pela distância $x$ da parede ao seu centro de massa. Determine, em função de $x$, (a) a tensão no fio e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a barra no ponto $A$.

••33 Uma caixa cúbica está cheia de areia e pesa 890 N. Desejamos fazer a caixa "rolar", empurrando-a horizontalmente por uma das bordas superiores. (a) Qual é a menor força necessária? (b) Qual é o menor coeficiente de atrito estático necessário entre a caixa e o piso? (c) Se existe um modo mais eficiente de fazer a caixa rolar, determine a menor força possível que deve ser aplicada diretamente à caixa para que isso aconteça. (*Sugestão:* Qual é o ponto de aplicação da força normal quando a caixa está prestes a tombar?)

••34 A Fig. 12-47 mostra uma alpinista de 70 kg sustentada apenas por uma das mãos em uma saliência horizontal de uma encosta vertical, uma pegada conhecida como *pinça*. (A moça exerce uma força para baixo com os dedos para se segurar.) Os pés da alpinista tocam a pedra a uma distância $H = 2{,}0$ m verticalmente abaixo dos dedos, mas não oferecem nenhum apoio; seu centro da massa está a uma distância $a = 0{,}20$ m da encosta. Suponha que a força que a saliência exerce sobre a mão está distribuída igualmente por quatro dedos. Determine os valores (a) da componente horizontal $F_h$ e (b) da componente vertical $F_v$ da força exercida pela saliência sobre *um* dos dedos.

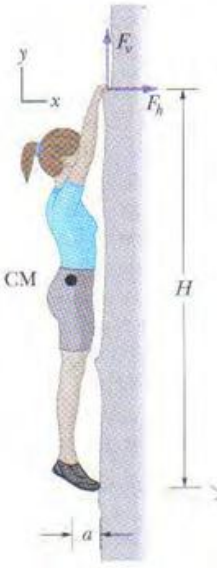



FIG. 12-47 Problema 34.

••35 A Fig. 12-48*a* mostra uma viga vertical uniforme de comprimento $L$ que está presa a uma dobradiça na extremidade inferior. Uma força horizontal $\vec{F}_a$ é aplicada à viga a uma distância $y$ da extremidade inferior. A viga permanece na vertical porque há um cabo preso na extremidade superior, fazendo um ângulo $\theta$ com a horizontal. A Fig. 12-48*b* mostra a tensão $T$ no cabo em função do ponto de aplicação da força aplicada, dado como uma fração $y/L$ do comprimento da barra. A escala do eixo vertical é definida por $T_S = 600$ N. A Fig. 12-48*c* mostra o módulo $F_h$ da componente horizontal da força que a dobradiça exerce sobre a viga, também em função de $y/L$. Calcule (a) o ângulo $\theta$ e (b) o módulo de $\vec{F}_a$.

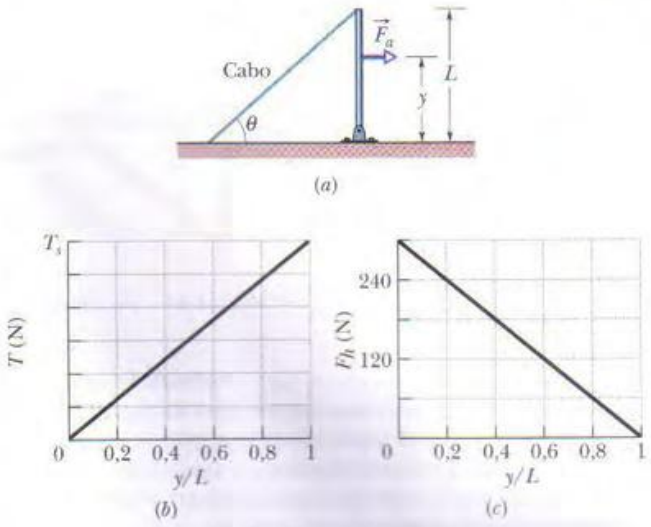



FIG. 12-48 Problema 35.

••36 Na Fig. 12-49, a motorista de um carro que se move em uma estrada horizontal faz uma parada de emergência, aplicando os freios de tal forma que as quatro rodas travam e derrapam na pista. O coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a pista é 0,40. A distância entre os eixos dianteiro e traseiro é $L = 4{,}2$ m, e o centro de massa do carro está a uma distância $d = 1{,}8$ m atrás do eixo dianteiro e a uma altura $h = 0{,}75$ m acima da pista. O carro pesa 11 kN. Determine o módulo (a) da aceleração do carro durante a frenagem, (b) da força normal a que uma das rodas traseiras é submetida, (c) da força normal a que uma das rodas dianteiras é submetida, (d) da força de frenagem a que uma das rodas traseiras é submetida e (e) da força de frenagem a que uma das rodas dianteiras é submetida. (*Sugestão:* Embora o carro não esteja em equilíbrio para translações, *está* em equilíbrio para rotações.)

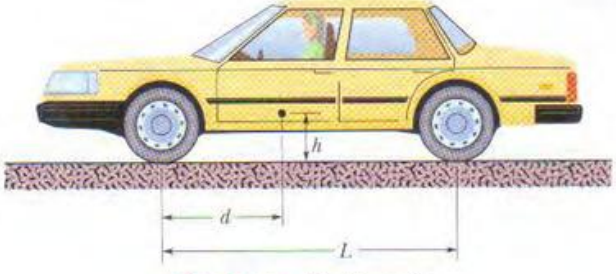



FIG. 12-49 Problema 36.

••37 Na Fig. 12-50, uma prancha uniforme, com um comprimento $L$ de 6,10 m e um peso de 445 N, repousa apoiada no chão e em um rolamento sem atrito no alto de uma parede de altura $h = 3{,}05$ m. A prancha permanece em equilíbrio para qualquer valor de $\theta \geq 70°$, mas escorrega se $\theta < 70°$. Determine o coeficiente de atrito estático entre a prancha e o chão.

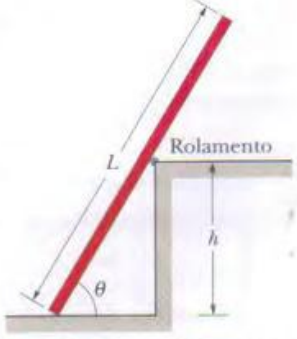



FIG. 12-50 Problema 37.

••38 Na Fig. 12-51, vigas uniformes $A$ e $B$ estão presas a uma parede por dobradiças e frouxamente rebitadas uma na outra (uma não exerce torque sobre a outra). A viga $A$ tem um compri-

mento $L_A = 2{,}40$ m e uma massa de 54,0 kg; a viga $B$ tem uma massa de 68,0 kg. As dobradiças estão separadas por uma distância $d = 1{,}80$ m. Em termos dos vetores unitários, qual é a força (a) sobre a viga $A$ exercida por sua dobradiça, (b) sobre a viga $A$ exercida pelo rebite, (c) sobre a viga $B$ exercida por sua dobradiça e (d) sobre a viga $B$ exercida pelo rebite?

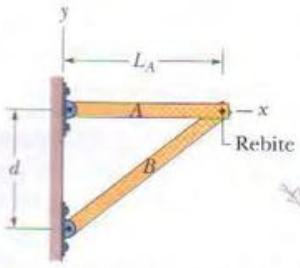



FIG. 12-51 Problema 38.

•••39 Um caixote, na forma de um cubo com 1,2 m de lado, contém uma peça de uma máquina; o centro de massa do caixote com seu conteúdo está localizado 0,30 m acima do centro geométrico do caixote. O caixote repousa em uma rampa que faz um ângulo $\theta$ com a horizontal. Quando $\theta$ aumenta a partir de zero, um valor de ângulo é atingido no qual o caixote tomba ou escorrega pela rampa. Se o coeficiente de atrito estático $\mu_s$ entre a rampa e o caixote é 0,60, (a) a rampa tomba ou desliza e (b) para que ângulo $\theta$ isso acontece? Se $\mu_s = 0{,}70$, (c) o caixote tomba ou desliza e (d) para que ângulo $\theta$ isso acontece? (*Sugestão:* Qual é o ponto de aplicação da força normal quando o caixote está prestes a tombar?)

•••40 No Exemplo 12-2, suponha que o coeficiente de atrito estático $\mu_s$ entre a escada e o piso é 0,53. A que distância (como porcentagem do comprimento total da escada) o bombeiro deve subir para que a escada esteja na iminência de escorregar?

•••41 Os lados $AC$ e $CE$ da escada da Fig. 12-52 têm 2,44 m de comprimento e estão unidos por uma dobradiça no ponto $C$. A barra horizontal $BD$ tem 0,762 m de comprimento e está na metade da altura da escada. Um homem pesando 854 N sobe 1,80 m ao longo da escada. Supondo que não há atrito com o chão e desprezando a massa da escada, determine (a) a tensão da barra e o módulo da força do que o chão exerce sobre a escada (b) no ponto $A$ e (c) no ponto $E$. (*Sugestão:* Isole partes da escada ao aplicar as condições de equilíbrio.)

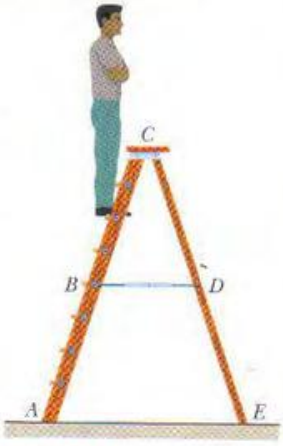



FIG. 12-52 Problema 41.

•••42 A Fig. 12-53*a* mostra uma viga horizontal uniforme, de massa $m_b$ e comprimento $L$, que é sustentada à esquerda por uma dobradiça presa a uma parede e à direita por um cabo que faz um ângulo $\theta$ com a horizontal. Um pacote de massa $m_p$ está posicionado sobre a viga a uma distância $x$ da extremidade esquerda. A massa total é $m_b + m_p = 61{,}22$ kg. A Fig. 12-53*b* mostra a tensão $T$ do cabo em função da posição do pacote, dada como uma fração $x/L$ do comprimento da viga. A escala do eixo das tensões é definida por $T_a = 500$ N e $T_b = 700$ N. Calcule (a) o ângulo $\theta$, (b) a massa $m_b$ e (c) a massa $m_p$.

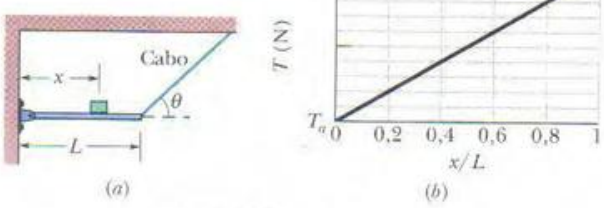



FIG. 12-53 Problema 42.

## seção 12-7 Elasticidade

•43 Uma barra horizontal de alumínio com 4,8 cm de diâmetro se projeta 5,3 cm para fora de uma parede. Um objeto de 1200 kg está suspenso na extremidade da haste. O módulo de cisalhamento do alumínio é $3{,}0 \times 10^{10}$ N/m$^2$. Desprezando a massa da barra, determine (a) a tensão de cisalhamento que age sobre a haste e (b) a deflexão vertical da extremidade da haste.

•44 A Fig. 12-54 mostra a curva tensão-deformação de um material. A escala do eixo das tensões é definida por $s = 300$, em unidades de $10^6$ N/m$^2$. Determine (a) o módulo de Young e (b) o valor aproximado do limite elástico do material.

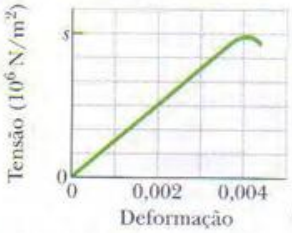



FIG. 12-54 Problema 44.

••45 Na Fig. 12-55 um tronco uniforme de 103 kg está pendurado por dois fios de aço, $A$ e $B$, cujo raio é 1,20 mm. Inicialmente o fio $A$ tinha 2,50 m de comprimento e era 2,00 mm mais curto do que o fio $B$. O tronco está agora na horizontal. Qual é o módulo da força exercida sobre o tronco (a) pelo fio $A$ e (b) pelo fio $B$? (c) Qual é o valor da razão $d_A/d_B$?

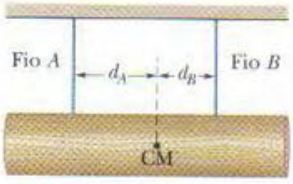



FIG. 12-55 Problema 45.

••46 A Figura 12-56 mostra a curva tensão-deformação de um fio de alumínio que está sendo ensaiado em uma máquina que puxa as duas extremidades do fio em sentidos opostos. A escala do eixo das tensões é definida por $s = 7{,}0$, em unidades de $10^7$ N/m$^2$. O fio tem um comprimento inicial de 0,800 m, e a área da seção reta inicial é $2{,}00 \times 10^{-6}$ m$^2$. Qual é o trabalho realizado pela força que a máquina de ensaios exerce sobre o fio para produzir uma deformação de $1{,}00 \times 10^{-3}$?

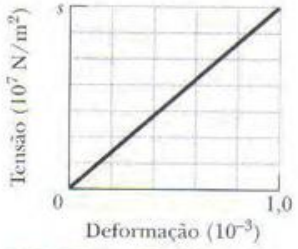



FIG. 12-56 Problema 46.

••47 Na Fig. 12-57 um tijolo de chumbo repousa horizontalmente sobre os cilindros $A$ e $B$. As áreas das faces superiores dos cilindros obedecem à relação $A_A = 2A_B$; os módulos de Young dos cilindros obedecem à relação $E_A = 2E_B$. Os cilindros tinham a mesma altura antes que o tijolo fosse colocado sobre eles. Que fração da massa do tijolo é sustentada (a) pelo cilindro $A$ e (b) pelo cilindro $B$? As distâncias horizontais entre o centro de massa do tijolo e os eixos dos cilindros são $d_A$ e $d_B$. (c) Qual é o valor da razão $d_A/d_B$?

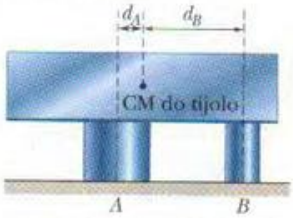



FIG. 12-57 Problema 47.

••48 A Fig. 12-58 mostra o gráfico tensão-deformação aproximado de um fio de teia de aranha, até o ponto em que se rompe com uma deformação de 2,00. A escala do eixo das tensões é defi-

nida por $a = 0{,}12\ \text{GN/m}^2$, $b = 0{,}30\ \text{GN/m}^2$ e $c = 0{,}80\ \text{GN/m}^2$. Suponha que o fio tem um comprimento inicial de 0,80 cm, uma área da seção reta inicial de $8{,}0 \times 10^{-12}\ \text{m}^2$ e um volume constante durante o alongamento. Suponha também que quando um inseto se choca com o fio toda a energia cinética do inseto é usada para alongar o fio. (a) Qual é a energia cinética que coloca o fio na iminência de se romper? Qual é a energia cinética (b) de uma drosófila com uma massa de 6,00 mg voando a 1,70 m/s e (c) uma abelha com uma massa de 0,388 g voando a 0,420 m/s? O fio seria rompido (d) pela drosófila e (e) pela abelha?

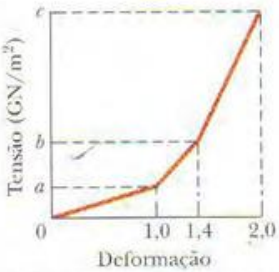



FIG. 12-58 Problema 48.

••49 Um túnel de comprimento $L = 150$ m, altura $H = 7{,}2$ m, largura de 5,8 m e teto plano deve ser construído a uma distância $d = 60$ m da superfície. (Veja a Fig. 12-59.) O teto do túnel deve ser sustentado inteiramente por colunas quadradas de aço com uma seção reta de 960 cm². A massa de 1,0 cm³ de solo é 2,8 g. (a) Qual é o peso total que as colunas do túnel devem sustentar? (b) Quantas colunas são necessárias para manter a tensão compressiva em cada coluna na metade do limite de ruptura?

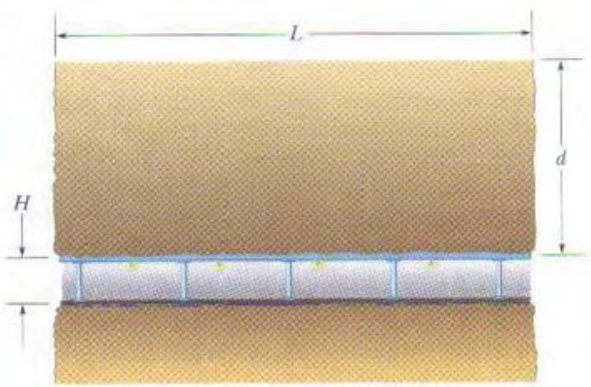



FIG. 12-59 Problema 49.

•••50 A Fig. 12-60 mostra um inseto capturado no ponto médio do fio de uma teia de aranha. O fio se rompe ao ser submetido a uma tensão de $8{,}20 \times 10^8\ \text{N/m}^2$, e a deformação correspondente é 2,00. Inicialmente o fio estava na horizontal e tinha um comprimento de 2,00 cm e uma seção reta de $8{,}00 \times 10^{-12}\ \text{m}^2$. Quando o fio cedeu ao peso do inseto, o volume permaneceu constante. Se o peso do inseto coloca o fio na iminência de se romper, qual é a massa do inseto? (Uma teia de aranha é construída para se romper se um inseto potencialmente perigoso, como uma abelha, fica preso na teia.)

FIG. 12-60 Problema 50.

•••51 A Fig. 12-61 é uma vista superior de uma barra rígida que gira em torno de um eixo vertical até que os calços de borracha iguais $A$ e $B$ sejam empurrados contra paredes rígidas nas distâncias $r_A = 7{,}0$ cm e $r_B = 4{,}0$ cm em relação ao eixo. Inicialmente os calços tocam as paredes sem sofrer compressão. Em seguida, uma força $\vec{F}$ de módulo 220 N é aplicada perpendicularmente à haste a uma distância $R = 5{,}0$ cm do eixo. Determine o módulo da força que comprime (a) o calço $A$ e (b) o calço $B$.

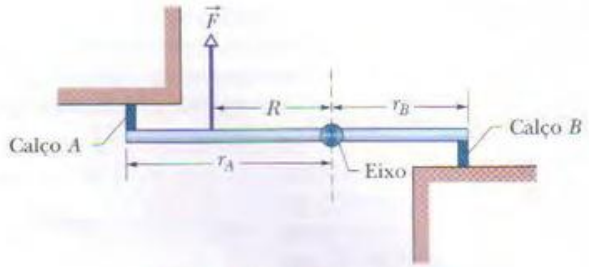



FIG. 12-61 Problema 51.

## Problemas Adicionais

52 A Fig. 12-62*a* mostra uma rampa uniforme entre dois edifícios que leva em conta a possibilidade de que os edifícios oscilem ao serem submetidos a ventos fortes. A extremidade esquerda está presa por uma dobradiça na parede de um dos edifícios; na extremidade direita há um rolamento que permite o movimento ao longo da parede do outro edifício. A força que o edifício exerce sobre o rolamento não possui componente vertical, mas apenas uma força horizontal de módulo $F_h$. A distância horizontal entre os edifícios é $D = 4{,}00$ m. O desnível entre as extremidades da rampa é $h = 0{,}490$ m. Um homem caminha ao longo da rampa a partir da extremidade esquerda. A Fig. 12-62*b* mostra $F_h$ em função da distância horizontal $x$ entre o homem e o edifício da esquerda. A escala do eixo de $F_h$ é definida por $a = 20$ kN e $b = 25$ kN. Quais são as massas (a) da rampa e (b) do homem?

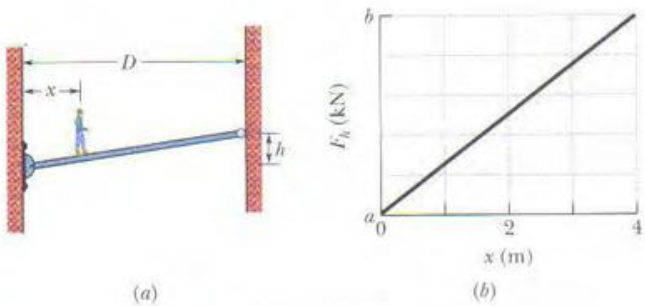



FIG. 12-62 Problema 52.

53 Na Fig. 12-63 uma esfera de 10 kg está presa por um cabo sobre um plano inclinado sem atrito que faz um ângulo $\theta = 45°$ com a horizontal. O ângulo $\phi$ é 25°. Calcule a tensão do cabo.

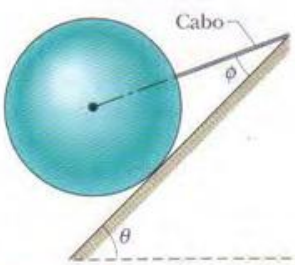



FIG. 12-63 Problema 53.

54 Na Fig. 12-64*a* uma viga uniforme de 40,0 kg repousa simetricamente em dois rolamentos. As distâncias entre as marcas verticais ao longo da viga são iguais. Duas das marcas coincidem com a posição dos rolamentos; um pacote de 10,0 kg é colocado sobre a viga, na posição do rolamento $B$. Qual é o módulo da força exercida sobre a viga (a) pelo rolamento $A$ e (b) pelo rolamento $B$? A viga é empurrada para a esquerda até que a extremidade direita esteja acima do rolamento $B$ (Fig. 12-64*b*).

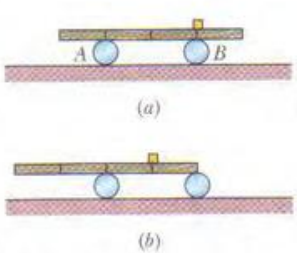



FIG. 12-64 Problema 54.

Qual é o novo módulo da força exercida sobre a viga (c) pelo rolamento $A$ e (d) pelo rolamento $B$? A viga é empurrada para a direita. Suponha que tem um comprimento de 0,800 m. (e) Que distância horizontal entre o pacote e o rolamento $B$ coloca a viga na iminência de perder contato com o rolamento $A$?

**55** Na Fig. 12-65 uma caçamba de 817 kg está suspensa por um cabo $A$ que está preso no ponto $O$ a dois outros cabos, $B$ e $C$, que fazem ângulos $\theta_1 = 51{,}0°$ e $\theta_2 = 66{,}0°$ com a horizontal. Determine as tensões (a) no cabo $A$, (b) no cabo $B$ e (c) no cabo $C$. (*Sugestão:* Para não ter que resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, defina os eixos da forma mostrada na figura.)

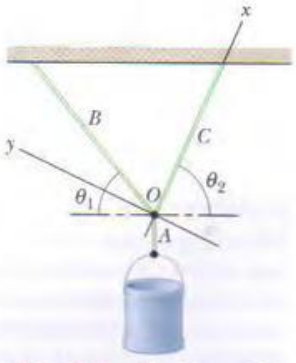


FIG. 12-65 Problema 55.

**56** Na Fig. 12-66 um pacote de massa $m$ está pendurado em uma corda que está presa à parede através da corda 1 e ao teto através da corda 2. A corda 1 faz um ângulo $\phi = 40°$ com a horizontal; a corda 2 faz um ângulo $\theta$. (a) Para que valor de $\theta$ a tensão da corda 2 é mínima? (b) Em termos de $mg$, qual é essa tensão mínima?

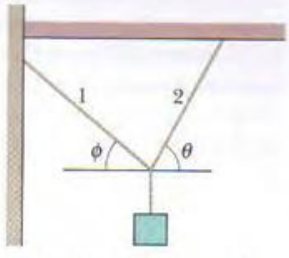


FIG. 12-66 Problema 56.

**57** A força $\vec{F}$ da Fig. 12-67 mantém o bloco de 6,40 kg e as polias em equilíbrio. As polias têm massa e atrito desprezíveis. Calcule a tensão $T$ do cabo de cima. (*Sugestão:* Quando um cabo dá meia volta em torno de uma polia, como neste problema, o módulo da força que exerce sobre a polia é o dobro da tensão do cabo.)

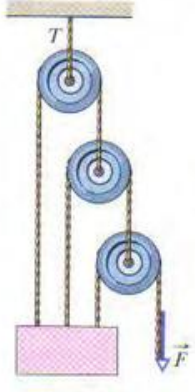


FIG. 12-67 Problema 57.

**58** Na Fig. 12-68 duas esferas idênticas, uniformes e sem atrito, de massa $m$, repousam em um recipiente retangular rígido. Uma reta que liga os centros das esferas está a 45° com a horizontal. Determine o módulo das forças exercidas sobre as esferas (a) pelo fundo do recipiente, (b) pela parede lateral esquerda do recipiente, (c) pela parede lateral direita do recipiente e (d) por uma das esferas sobre a outra. (*Sugestão:* A força de uma esfera sobre a outra aponta ao longo da reta que passa pelos centros.)

**59** Quatro tijolos de comprimento $L$, idênticos e uniformes, são empilhados (Fig. 12-69) de tal forma que parte de cada um se estende além da superfície na qual está apoiado. Determine, em termos de $L$, os valores máximos de (a) $a_1$, (b) $a_2$, (c) $a_3$, (d) $a_4$ e (e) $h$ para que a pilha esteja em equilíbrio.

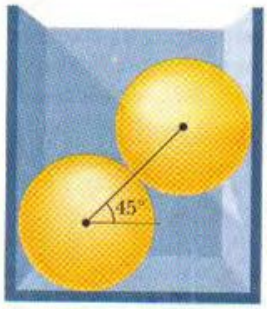


FIG. 12-68 Problema 58.

**60** Depois de uma queda, um alpinista de 95 kg está pendurado na extremidade de uma corda originalmente com 15 m de comprimento e diâmetro de 9,6 mm, mas que foi esticada de 2,8 cm. Determine (a) a tensão, (b) a deformação e (c) o módulo de Young da corda.

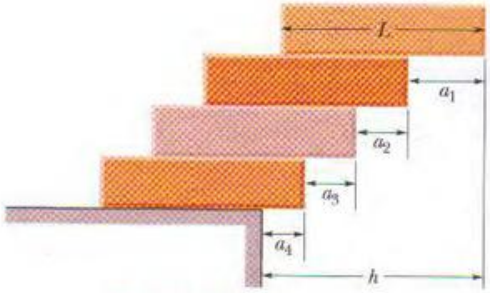


FIG. 12-69 Problema 59.

**61** Na Fig. 12-70, uma placa retangular de ardósia repousa em uma superfície rochosa com uma inclinação $\theta = 26°$. A placa tem um comprimento $L = 43$ m, uma espessura $T = 2{,}5$ m, uma largura $W = 12$ m e 1,0 cm³ da placa tem uma massa de 3,2 g. O coeficiente de atrito estático entre a placa e a rocha é 0,39. (a) Calcule a componente da força gravitacional que age sobre a placa paralelamente à superfície da rocha. (b) Calcule o módulo da força de atrito estático que a rocha exerce sobre a placa. Comparando (a) e (b), você pode ver que a placa corre o risco de escorregar. Isto é evitado apenas pela eventual presença de protuberâncias na rocha. (c) Para estabilizar a placa, pinos devem ser instalados perpendicularmente à superfície da rocha (dois desses pinos são mostrados na figura). Se cada pino tem uma seção reta de 6,4 cm² e se rompe ao ser submetido a uma tensão de cisalhamento de $3{,}6 \times 10^8$ N/m², qual é o número mínimo de pinos necessário? Suponha que os pinos não alteram a força normal.

FIG. 12-70 Problema 61.

**62** Uma escada uniforme, cujo comprimento é 5,0 m e cujo peso é 400 N, está apoiada em uma parede vertical sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre o chão e o pé da escada é 0,46. Qual é a maior distância a que o pé da escada pode estar da base da parede para que a escada não escorregue?

**63** Na Fig. 12-71, o bloco $A$, com uma massa de 10 kg, está em repouso, mas escorregaria se o bloco $B$, que tem uma massa de 5,0 kg, fosse mais pesado. Se $\theta = 30°$, qual é o coeficiente de atrito estático entre o bloco $A$ e a superfície na qual está apoiado?

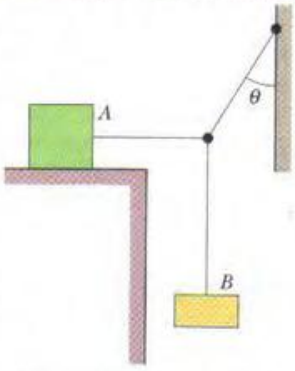


FIG. 12-71 Problema 63.

**64** Um elevador de mina é sustentado por um único cabo de aço com 2,5 cm de diâmetro. A massa total do elevador e seus ocupantes é 670 kg. De quanto o cabo se alonga quando o elevador está pendurado em cabo de (a) 12 m e (b) 362 m? (Despreze a massa do cabo.)

**65** Na Fig. 12-72 uma barra uniforme de massa $m$ está presa a uma parede por uma dobradiça na extremidade inferior, enquanto a extremidade superior é sustentada por uma

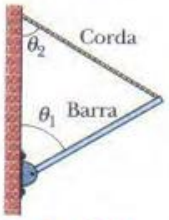


FIG. 12-72 Problema 65.

corda presa na parede. Se $\theta_1 = 60°$, que valor deve ter o ângulo $\theta_2$ para que a tensão na corda seja $mg/2$?

**66** Um homem de 73 kg está em pé em uma ponte horizontal de comprimento $L$. Ele se encontra a uma distância $L/4$ de uma das extremidades. A ponte é uniforme e pesa 2,7 kN. Qual é o módulo da força vertical exercida sobre a ponte pelos suportes (a) na extremidade mais afastada do homem e (b) na extremidade mais próxima?

**67** Um balanço improvisado foi construído amarrando as duas extremidades de uma corda no galho de uma árvore. Uma criança está sentada no meio, com os dois trechos da corda na vertical, quando o pai da criança a empurra com uma força horizontal, deslocando-a para um lado. Imediatamente antes de a criança ser liberada a partir do repouso, a corda faz um ângulo de 15° com a vertical e a tensão da corda é 280 N. (a) Quanto pesa a criança? (b) Qual é o módulo da força (horizontal) que o pai exerce sobre a criança imediatamente antes de liberá-la? (c) Se a força máxima que o pai pode exercer sobre a criança é 93 N, qual é o maior ângulo com a vertical que a corda pode fazer enquanto o pai empurra horizontalmente a criança?

**68** O sistema da Fig. 12-73 está em equilíbrio. Os ângulos são $\theta_1 = 60°$ e $\theta_2 = 20°$, e a bola tem uma massa $M = 2{,}0$ kg. Qual é a tensão (a) na corda $ab$ e (b) na corda $bc$?

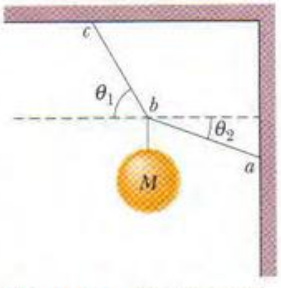


FIG. 12-73 Problema 68.

**69** A Fig. 12-74 mostra um arranjo estacionário de duas caixas e três cordas em repouso. A caixa $A$ tem uma massa de 11,0 kg e está sobre uma rampa de ângulo $\theta = 30{,}0°$; a caixa $B$ tem uma massa de 7,00 kg e está pendurada em uma corda. A corda presa à caixa $A$ está paralela à rampa, cujo atrito é desprezível. (a) Qual é a tensão da corda de cima e (b) que ângulo essa corda faz com a horizontal?

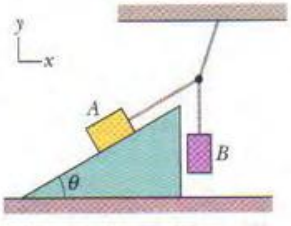


FIG. 12-74 Problema 69.

**70** Um operário tenta levantar uma viga uniforme do chão até a posição vertical. A viga tem 2,50 m de comprimento e pesa 500 N. Em um certo instante o operário mantém a viga momentaneamente em repouso com a extremidade superior a uma distância $d = 1{,}50$ m do chão, como mostra a Fig. 12-75, exercendo uma força $\vec{P}$ perpendicular à viga. (a) Qual é o módulo $P$ da força? (b) Qual é o módulo da força (resultante) que o piso exerce sobre a viga? (c) Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a viga e o chão para que a viga não escorregue nesse instante?

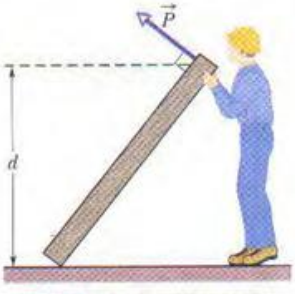


FIG. 12-75 Problema 70.

**71** Um cubo de cobre maciço tem 85,5 cm de lado. Qual é a tensão que deve ser aplicada ao cubo para reduzir o lado para 85,0 cm? O módulo de elasticidade volumétrico do cobre é $1{,}4 \times 10^{11}$ N/m$^2$.

**72** Uma viga uniforme tem 5,0 m de comprimento e uma massa de 53 kg. Na Fig. 12-76, a viga está sustentada na posição horizontal por uma dobradiça e um cabo e $\theta = 60°$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força que a dobradiça exerce sobre a viga?

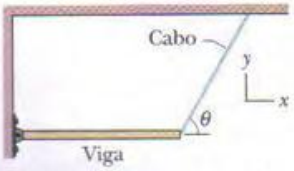


FIG. 12-76 Problema 72.

**73** Na Fig. 12-77, uma viga uniforme com 60 N de peso e 3,2 m de comprimento está presa a uma dobradiça na extremidade inferior e uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 50 N age sobre a extremidade superior. A viga é mantida na posição vertical por um cabo que faz um ângulo $\theta = 25°$ com o chão e está preso à viga a uma distância $h = 2{,}0$ m do chão. Quais são (a) a tensão do cabo e (b) a força exercida pela dobradiça sobre a viga, em termos dos vetores unitários?

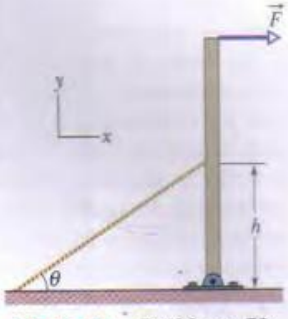


FIG. 12-77 Problema 73.

**74** Na Fig. 12-78, uma viga uniforme de 12,0 m de comprimento é sustentada por um cabo horizontal e por uma dobradiça e faz um ângulo $\theta = 50{,}0°$ com a horizontal. A tensão do cabo é 400 N. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) a força gravitacional a que a viga está submetida e (b) a força que a dobradiça exerce sobre a viga?

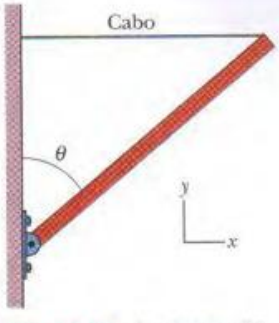


FIG. 12-78 Problema 74.

**75** Quatro tijolos iguais e uniformes, de comprimento $L$, estão empilhados em uma mesa de duas formas, como mostra a Fig. 12-79 (compare com o Problema 59). Estamos interessados em maximizar a distância $h$ nas duas configurações. Determine as distâncias ótimas $a_1$, $a_2$, $b_1$ e $b_2$ e calcule $h$ para os dois arranjos.

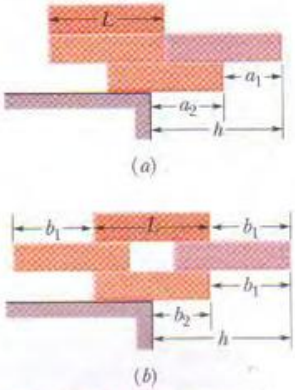


FIG. 12-79 Problema 75.

**76** Uma balança de pratos é construída com uma barra rígida de massa desprezível e pratos pendurados nas duas extremidades da barra. A barra está apoiada em um ponto que não fica no centro da barra, em torno do qual pode girar livremente. Para que a balança fique em equilíbrio, massas diferentes devem ser colocadas nos dois pratos. Quando uma massa $m$ desconhecida é colocada no prato da esquerda, ela é equilibrada por uma massa $m_1$ colocada no braço da direita; quando a massa $m$ é colocada no prato da direita, ela é equilibrada por uma massa $m_2$ colocada no prato da esquerda. Mostre que $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

**77** A armação quadrada rígida da Fig. 12-80 é formada por quatro barras laterais $AB$, $BC$, $CD$ e $DA$ e duas barras diagonais $AC$ e $BD$, que passam livremente uma pela outra no ponto $E$. Através do esticador $G$ a barra $AB$ é submetida a uma tensão trativa, como se suas extre-

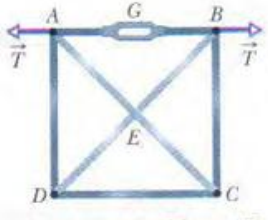


FIG. 12-80 Problema 77.

midades estivessem submetidas a forças horizontais $\vec{T}$, para fora do quadrado, de módulo 535 N. (a) Quais das outras barras também estão sob tração? Quais são os módulos (b) das forças que causam essas trações e (c) das forças que causam compressão nas outras barras? (*Sugestão:* Considerações de simetria podem simplificar consideravelmente o problema.)

**78** Uma ginasta com 46,0 kg de massa está em pé na extremidade de uma trave, como mostra a Fig. 12-81. A trave tem 5,00 m de comprimento e uma massa de 250 kg (excluindo a massa dos dois suportes). Cada suporte está a 0,540 m da extremidade mais próxima da trave. Em termos dos vetores unitários, qual é a força exercida sobre a trave (a) pelo suporte 1 e (b) pelo suporte 2?

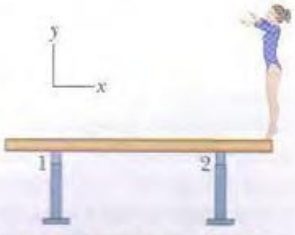


FIG. 12-81 Problema 78.

**79** A Fig. 12-82 mostra um cilindro horizontal de 300 kg sustentado por três fios de aço presos em um teto. Os fios 1 e 3 estão nas extremidades do cilindro e o fio 2 está no centro. Os fios têm uma seção reta de $2{,}00 \times 10^{-6}$ m$^2$. Inicialmente (antes de o cilindro ser pendurado), os fios 1 e 3 tinham 2,00 m de comprimento e o fio 2 era 6,00 mm mais comprido que os outros dois. Agora (com o cilindro no lugar) os três fios estão esticados. Qual é a tensão (a) no fio 1 e (b) no fio 2?

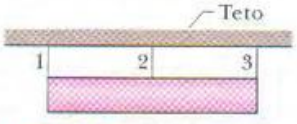


FIG. 12-82 Problema 79.

**80** A Fig. 12-83*a* mostra detalhes de um dos dedos da alpinista da Fig. 12-47. Um tendão proveniente dos músculos do antebraço está preso na falange distal. No caminho, o tendão passa por várias estruturas fibrosas chamadas *polias*. A polia A2 está presa na falange proximal; a polia A4 está presa na falange medial. Para puxar o dedo na direção da palma da mão os músculos do antebraço puxam o tendão, mais ou menos do mesmo modo como as cordas de uma marionete são usadas para movimentar os membros do boneco. A Fig. 12-83*b* é um diagrama simplificado da falange medial, que tem um comprimento $d$. A força que o tendão exerce sobre o osso, $\vec{F}_t$, está aplicada no ponto em que o tendão entra na polia A4, a uma distância $d/3$ da extremidade da falange medial. Se as componentes das forças que agem sobre cada um dos dedos em pinça da Fig. 12-47 são $F_h = 13{,}4$ N e $F_v = 162{,}4$ N, qual é o módulo de $\vec{F}_t$? O resultado é provavelmente tolerável, mas se a alpinista ficar pendurada por apenas um ou dois dedos as polias A2 e A4 poderão se romper, um problema que freqüentemente aflige os alpinistas.

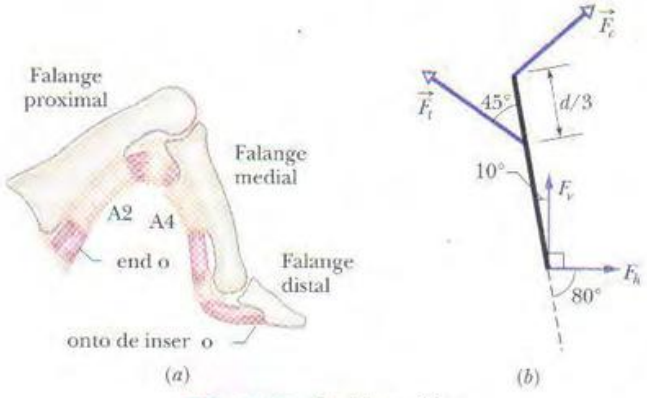


FIG. 12-83 Problema 80.

**81** Um cubo uniforme de 8,0 cm de lado repousa em um piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o cubo e o piso é $\mu$. Uma força horizontal $\vec{P}$ é aplicada perpendicularmente a uma das faces verticais do cubo, 7,0 cm acima do piso e sobre a reta vertical que passa pelo centro da face do cubo. O módulo de $\vec{P}$ é gradualmente aumentado. Para que valor de $\mu$ o cubo finalmente (a) começa a escorregar e (b) começar a tombar? (*Sugestão:* Qual é o ponto de aplicação da força normal quando o cubo está prestes a tombar?)

**82** Uma barra cilíndrica uniforme, com um comprimento inicial de 0,8000 m e um raio de 1000,0 $\mu$m, é fixada em uma extremidade e esticada por uma máquina que puxa a outra extremidade paralelamente à maior dimensão da barra. Supondo que a massa específica (massa por unidade de volume) da barra não varie, determine o módulo da força que a máquina deve aplicar à barra para que o raio da barra diminua para 999,9 $\mu$m. (O limite elástico não é ultrapassado.)

**83** Uma viga de comprimento $L$ é carregada por três homens, um homem em uma das extremidades e os outros dois apoiando a viga entre eles em uma barra transversal posicionada de tal forma que a carga da viga é dividida igualmente entre os três homens. A que distância da extremidade livre está a barra de apoio? (Despreze a massa da barra de apoio.)

**84** Um alçapão quadrado em um teto tem 0,91 m de lado, uma massa de 11 kg e está preso por uma dobradiça de um lado e por um ferrolho do lado oposto. Se o centro de gravidade do alçapão está a 10 cm do centro em direção ao lado da dobradiça, qual é o módulo da força exercida pelo alçapão (a) sobre o ferrolho e (b) sobre a dobradiça?

**85** Uma escada uniforme tem 10 m de comprimento e pesa 200 N. Na Fig. 12-84 a escada está apoiada em uma parede vertical sem atrito a uma altura $h = 8{,}0$ m acima do piso. Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada à escada a uma distância $d = 2{,}0$ m da base (medida ao longo da escada). (a) Se $F = 50$ N, qual é a força que o piso exerce sobre a escada, em termos dos vetores unitários? (b) Se $F = 150$ N, qual é a força que o piso exerce sobre a escada, também em termos dos vetores unitários? (c) Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão é 0,38; para que valor de $F$ a base da escada está na iminência de se mover em direção à parede?

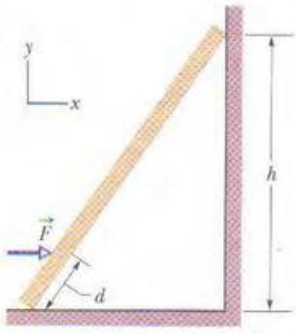
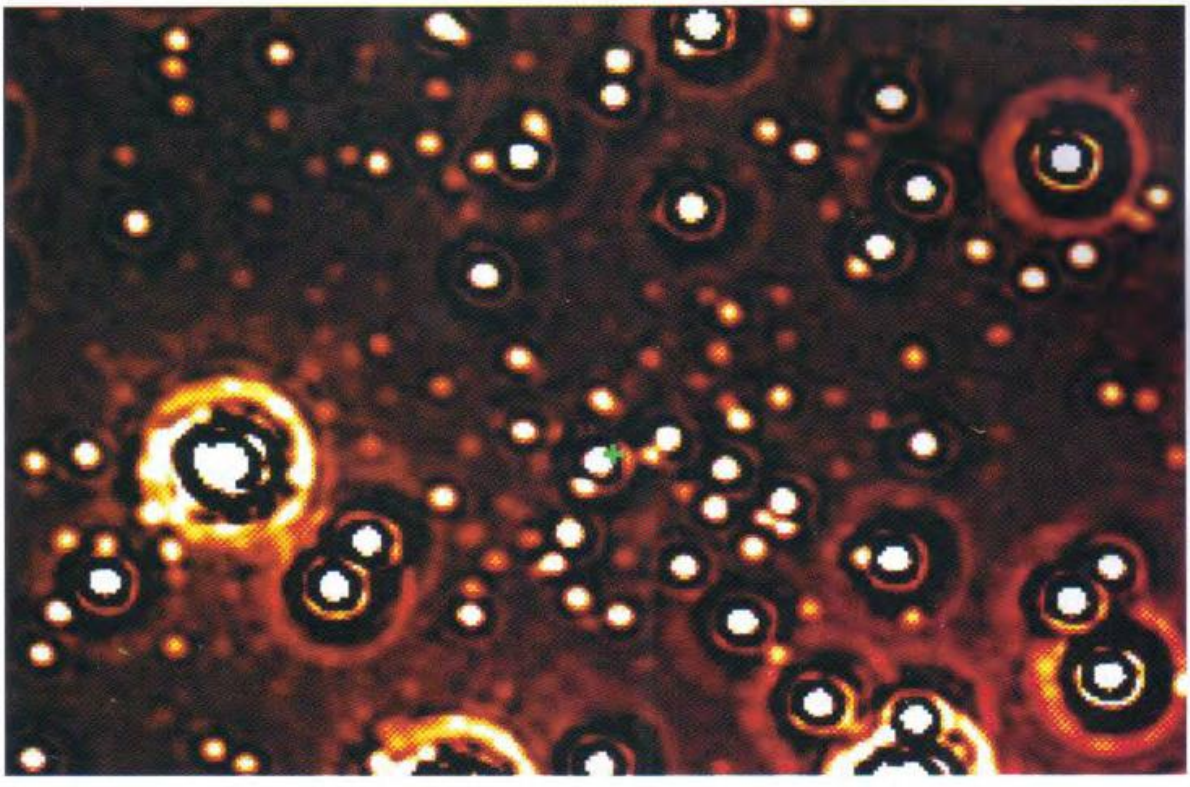


FIG. 12-84 Problema 85.

**86** Se a viga (quadrada) na Fig. 12-7*a* é feita de pinho, qual deve ser sua espessura para que a tensão compressiva a que está submetida seja 1/6 do limite de ruptura? (Veja o Exemplo 12-3.)

# Gravitação 13



Cortesia de Reinhard Genzel

*Esta é uma imagem das estrelas mais próximas do centro da nossa galáxia, a Via Láctea, indicado por uma pequena cruz. Note que não existe nada exatamente no centro, mas muito perto (um pouco abaixo e à esquerda) há uma mancha luminosa, a imagem de uma estrela conhecida como S2. As outras manchas são imagens de outras estrelas (os anéis em volta de algumas foram produzidos artificialmente pelo método de processar as imagens). A maioria das estrelas de nossa galáxia se move tão devagar que não podemos vê-las se mover em relação às outras, nem mesmo durante toda uma vida de observações. O caso da S2, porém, é bem diferente: podemos observar perfeitamente o seu movimento. Na verdade, está se movendo tão depressa que completa uma volta em torno do centro da galáxia em apenas 15,2 anos. Deve existir alguma coisa imensa no centro da galáxia, alguma coisa que os telescópios não mostram.*

*Qual é o "monstro" que se esconde no centro de nossa galáxia?*

A resposta está neste capítulo.

FIG. 13-1 A galáxia de Andrômeda. Situada a $2{,}3 \times 10^6$ anos-luz da Terra e fracamente visível a olho nu, é muito parecida com a nossa galáxia, a Via Láctea. *(Cortesia da NASA)*

## 13-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos mais antigos objetivos da física é compreender a força gravitacional, a força que nos mantém na superfície da Terra, que mantém a Lua em órbita em torno da Terra e que mantém a Terra em órbita em torno do Sol. Ela também se estende a toda a Via Láctea, evitando que se dispersem os bilhões e bilhões de estrelas e incontáveis moléculas e partículas isoladas que existem em nossa galáxia. Estamos situados perto da borda desse aglomerado de estrelas em forma de disco, a $2{,}6 \times 10^4$ anos-luz ($2{,}5 \times 10^{20}$ m) do centro da galáxia, em torno do qual giramos lentamente.

A força gravitacional também se estende ao espaço intergaláctico, mantendo unidas as galáxias do Grupo Local, que inclui, além da Via Láctea, a galáxia de Andrômeda (Fig. 13-1), a uma distância de $2{,}3 \times 10^6$ anos-luz da Terra, e várias galáxias anãs mais próximas, como a Grande Nuvem de Magalhães. O Grupo Local faz parte do Superaglomerado Local de galáxias, que está atraído pela força gravitacional para uma região do espaço excepcionalmente densa, conhecida como Grande Atrator. Esta região parece estar a cerca de $3{,}0 \times 10^8$ anos-luz da Terra, do lado oposto da Via Láctea. A força gravitacional se estende ainda mais longe, já que tenta manter unido o universo inteiro, que está se expandindo.

Esta força também é responsável por uma das entidades mais misteriosas do universo, o *buraco negro*. Quando uma estrela consideravelmente maior que o Sol se apaga, a força gravitacional entre suas partículas pode fazer com que a estrela se contraia indefinidamente, formando um buraco negro. A força gravitacional na superfície de uma estrela desse tipo é tão intensa que nem a luz pode escapar (daí o termo "buraco negro"). Qualquer estrela que passe nas proximidades de um buraco negro pode ser despedaçada pela força gravitacional e sugada para o interior do buraco negro. Depois de várias capturas desse tipo, surge um *buraco negro supermaciço*. Esse tipo de monstro misterioso parece ser comum no universo.

Embora a força gravitacional ainda não esteja totalmente compreendida, o ponto de partida para nosso entendimento é a *lei da gravitação* de Isaac Newton.

## 13-2 | A Lei da Gravitação de Newton

Os físicos adoram estudar fenômenos aparentemente desconexos e mostrar que, na verdade, existe uma relação entre eles. Esse ideal de unificação vem sendo perseguido há séculos. Em 1665, Isaac Newton, então com 23 anos, prestou uma contribuição fundamental à física ao demonstrar que não existe diferença entre a força que mantém a Lua em órbita e a força responsável pela queda de uma maçã. Hoje em dia essa idéia é tão familiar que temos dificuldade para compreender a antiga crença de que os movimentos dos corpos terrestres e dos corpos celestes eram diferentes e obedeciam a um conjunto diferente de leis.

Newton chegou à conclusão de que não só a Terra atrai as maçãs e a Lua, mas também cada corpo do universo atrai todos os demais; essa tendência dos corpos de se atraírem mutuamente é chamada de **gravitação**. A universalidade da gravitação não é óbvia para nós porque a força de atração que a Terra exerce sobre os corpos próximos é muito maior que a força de atração que estes corpos exercem uns sobre os outros. Assim, por exemplo, a Terra atrai uma maçã com uma força da ordem de 0,8 N. Nós também atraímos uma maçã próxima (e somos atraídos por ela), mas essa força de atração é menor que o peso de uma partícula de poeira.

Newton propôs uma *lei* para essa força, a chamada **lei da gravitação de Newton**: Toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(Lei da gravitação de Newton).} \qquad (13\text{-}1)$$

onde $m_1$ e $m_2$ são as massas das partículas, $r$ é a distância entre elas e $G$ é uma constante, conhecida como **constante gravitacional**, cujo valor é

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$
$$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}. \qquad (13\text{-}2)$$

Na Fig. 13-2*a*, $\vec{F}$ é a força gravitacional exercida sobre a partícula 1 (de massa $m_1$) pela partícula 2 (de massa $m_2$). A força aponta para a partícula 2, e dizemos que é uma *força atrativa* porque tende a aproximar a partícula 1 da partícula 2. O módulo da força é dado pela Eq. 13-1.

Podemos dizer que $\vec{F}$ aponta no sentido positivo de um eixo $r$ traçado ao longo da reta que liga a partícula 1 à partícula 2 (Fig. 13-2*b*). Podemos também representar a força $\vec{F}$ usando um vetor unitário $\hat{r}$ (um vetor adimensional de módulo 1) que aponta da partícula 1 para a partícula 2 (Fig. 13-2*c*). Nesse caso, de acordo com a Eq. 13-1, a força que age sobre a partícula 1 é dada por

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}. \qquad (13\text{-}3)$$

A força gravitacional que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2 tem o mesmo módulo que a força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 e o sentido oposto. As duas forças formam um par de forças da terceira lei, e podemos falar da força gravitacional *entre* as duas partículas como tendo um módulo dado pela Eq. 13-1. Essa força entre duas partículas não é alterada pela presença de outros objetos, mesmo que estejam situados entre as partículas. Em outras palavras, nenhum objeto pode blindar uma das partículas da força gravitacional exercida pela outra partícula.

A intensidade da força gravitacional, ou seja, a intensidade da força com a qual duas partículas de massas conhecidas e separadas por uma distância conhecida se atraem, depende do valor da constante gravitacional $G$. Se $G$, por algum milagre, fosse de repente multiplicada por 10, seríamos esmagados contra o chão pela atração da Terra. Se $G$ fosse dividida por 10, a atração da Terra se tornaria tão fraca que poderíamos saltar sobre um edifício.

Embora a lei da gravitação de Newton se aplique estritamente a partículas, podemos aplicá-la a objetos reais, desde que os tamanhos desses objetos sejam pequenos em comparação com a distância entre eles. A Lua e a Terra estão suficientemente distantes uma da outra para que, com boa aproximação, possam ser tratadas como partículas. O que dizer, porém, do caso de uma maçã e a Terra? Do ponto de vista da maçã, a Terra extensa e plana, que vai até o horizonte, certamente não se parece com uma partícula.

Newton resolveu o problema da atração entre Terra e a maçã provando um importante teorema, conhecido como *teorema das cascas*:

> Uma casca esférica uniforme de matéria atrai uma partícula que se encontra fora da casca como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro.

A Terra pode ser imaginada como um conjunto de cascas, uma dentro da outra, cada uma atraindo uma partícula localizada fora da superfície da Terra como se a massa da casca estivesse no seu centro. Assim, do ponto de vista da maçã a Terra *se comporta* como uma partícula, que está localizada no centro da Terra e possui uma massa igual à massa da Terra.

Suponha que, como na Fig. 13-3, a Terra atraia uma maçã para baixo com uma força de módulo 0,80 N. Nesse caso, a maçã atrai a Terra para cima com uma força de 0,80 N, cujo ponto de aplicação é o centro da Terra. Embora as forças tenham o mesmo módulo, produzem acelerações quando a maçã começa a cair. A aceleração da maçã é aproximadamente 9,8 m/s², a aceleração dos corpos em queda livre perto da superfície da Terra. A aceleração da Terra, medida no referencial do centro de massa do sistema maçã-Terra, é apenas cerca de $1 \times 10^{-25}$ m/s².

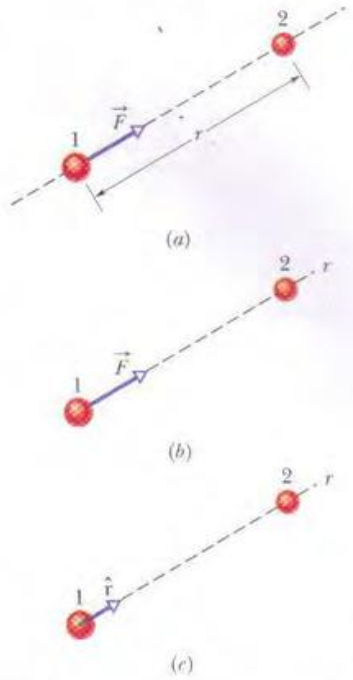



FIG. 13-2 (*a*) A força gravitacional $\vec{F}$ que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é uma força atrativa, porque aponta para a partícula 2. (*b*) A força $\vec{F}$ está sobre um eixo radial $r$ que passa pelas duas partículas. (*c*) A força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido que o vetor unitário $\hat{r}$ do eixo $r$.

FIG. 13-3 A maçã puxa a Terra para cima com a mesma força com a qual a Terra puxa a maçã para baixo.

**TESTE 1** Uma partícula é colocada, sucessivamente, do lado de fora de quatro objetos, todos de massa $m$: (1) uma grande esfera maciça uniforme, (2) uma grande casca esférica uniforme, (3) uma pequena esfera maciça uniforme e (4) uma pequena casca uniforme. Em todos os casos, a distância entre a partícula e o centro do objeto é $d$. Ordene os objetos de acordo com o módulo da força gravitacional que exercem sobre a partícula, em ordem decrescente.

## 13-3 | Gravitação e o Princípio da Superposição

Dado um grupo de partículas, podemos determinar a força gravitacional a que uma delas está submetida devido à presença das outras usando o **princípio da superposição**. Trata-se de um princípio segundo o qual, em muitos casos, um efeito total pode ser calculado somando efeitos parciais. Neste caso, a aplicação do princípio significa que podemos calcular a força gravitacional que cada partícula exerce sobre a partícula escolhida e obter a força resultante somando vetorialmente essas forças.

No caso de $n$ partículas, podemos escrever o princípio da superposição para as forças gravitacionais que agem sobre a partícula 1 como

$$\vec{F}_{1,\text{res}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}. \tag{13-4}$$

onde $\vec{F}_{1,\text{res}}$ é a força resultante a que está submetida a partícula 1 e, por exemplo, $\vec{F}_{13}$ é a força exercida pela partícula 3 sobre a partícula 1. Podemos expressar essa equação de forma mais compacta através de um somatório:

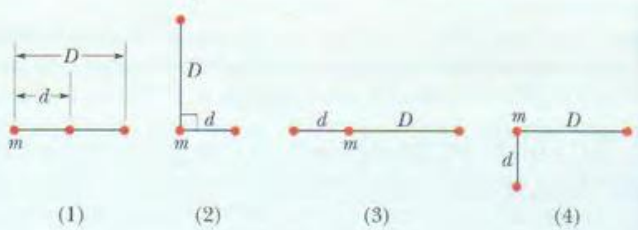
$$\vec{F}_{1,\text{res}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}. \tag{13-5}$$

O que dizer da força gravitacional que um objeto real (de dimensões finitas) exerce sobre uma partícula? Esta força pode ser determinada dividindo o objeto em partes suficientemente pequenas para serem tratadas como partículas e usando a Eq. 13-5 para calcular a soma vetorial das forças exercidas pelas partes sobre a partícula. No caso-limite, podemos dividir o objeto de dimensões finitas em partes infinitesimais de massa $dm$, cada uma das quais exerce uma força infinitesimal $d\vec{F}$ sobre a partícula. Neste limite, o somatório da Eq. 13-5 se torna uma integral, e temos

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}, \tag{13-6}$$

onde a integração é realizada para todo o objeto e omitimos o índice "res". Se o objeto é uma esfera ou uma casca esférica, podemos evitar a integração da Eq. 13-6 supondo que a massa do objeto está concentrada no centro e usando a Eq. 13-1.

**TESTE 2** A figura mostra quatro arranjos de partículas de mesma massa. (a) Ordene os arranjos de acordo com o módulo da força gravitacional a que está submetida a partícula $m$, começando pelo maior. (b) No arranjo 2, a direção da força resultante está mais próxima da horizontal ou da vertical?




### Exemplo 13-1

A Fig. 13-4*a* mostra um arranjo de três partículas: a partícula 1, de massa $m_1 = 6{,}0$ kg, e as partículas 2 e 3, de massa $m_2 = m_3 = 4{,}0$ kg; $a = 2{,}0$ cm. Qual é a força gravitacional resultante $\vec{F}_{1,\text{res}}$ que as outras partículas exercem sobre a partícula 1?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Como se trata de partículas, o módulo da força gravitacional que cada uma das partículas exerce sobre a partícula 1 é dado pela Eq. 13-1 ($F = Gm_1m_2/r^2$). (2) A direção da força gravitacional exercida por uma das

partículas é a da reta que liga a partícula à partícula 1. (3) Como as forças não são colineares, *não podemos* simplesmente somar ou subtrair os módulos das forças exercidas pelas duas partículas para obter a força total, mas devemos usar uma soma vetorial.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 13-1, o módulo da força $\vec{F}_{12}$ que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é dado por

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{a^2}$$
$$= \frac{(6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(6{,}0\ \mathrm{kg})(4{,}0\ \mathrm{kg})}{(0{,}020\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 4{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

Analogamente, o módulo da força $\vec{F}_{13}$ que a partícula 3 exerce sobre a partícula 1 é dado por

$$F_{13} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}$$
$$= \frac{(6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(6{,}0\ \mathrm{kg})(4{,}0\ \mathrm{kg})}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 1{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

A força $\vec{F}_{12}$ aponta no sentido positivo do eixo $y$ (Fig. 13-4*b*), e possui apenas a componente $y$, $F_{12}$; a força $\vec{F}_{13}$ aponta no sentido negativo do eixo $x$, e possui apenas a componente $x$, $-F_{13}$.

Para determinar a força resultante $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$ a que está submetida a partícula 1, devemos calcular a soma vetorial das duas forças. Isso pode ser feito usando uma calculadora. Entretanto, neste caso isso se torna desnecessário se observarmos que $-F_{13}$ e $F_{12}$ podem ser consideradas as componentes $x$ e $y$ de $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$.

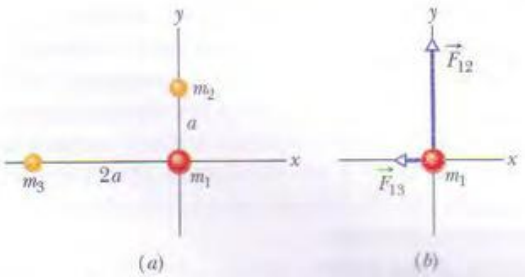



**FIG. 13-4** (*a*) Um arranjo de três partículas. (*b*) As forças que as outras partículas exercem sobre a partícula de massa $m_1$.

Assim, podemos usar a Eq. 3-6 para determinar o módulo e a orientação de $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$. O módulo é

$$F_{1,\mathrm{res}} = \sqrt{(F_{12})^2 + (-F_{13})^2}$$
$$= \sqrt{(4{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N})^2 + (-1{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N})^2}$$
$$= 4{,}1\times10^{-6}\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Em relação ao semi-eixo $x$ positivo, a Eq. 3-6 nos dá a orientação de $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$ como

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{12}}{-F_{13}} = \tan^{-1}\frac{4{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N}}{-1{,}00\times10^{-6}\ \mathrm{N}} = -76°.$$

Este resultado é razoável? Não, já que a orientação de $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$ deve estar entre as orientações de $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{13}$. Como vimos no Capítulo 3 (Táticas para a Solução de Problemas 3), as calculadoras mostram apenas um dos dois valores possíveis da função $\tan^{-1}$. Para obter o outro valor, somamos 180°:

$$-76° + 180° = 104°, \qquad \text{(Resposta)}$$

que *é* uma orientação razoável de $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$.

## Exemplo 13-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 13-5*a* mostra um arranjo de cinco partículas, de massas $m_1 = 8{,}0$ kg, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2{,}0$ kg; $a = 2{,}0$ cm e $\theta = 30°$. Qual é a força gravitacional resultante $\vec{F}_{1,\mathrm{res}}$ que as outras partículas exercem sobre a partícula 1?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Como se trata de partículas, o módulo da força gravitacional que cada partícula exerce sobre a partícula 1 é dado pela Eq. 13-1 ($F = Gm_1m_2/r^2$). (2) A direção da força gravitacional exercida por um partícula sobre a partícula 1 é a da reta que liga a partícula à partícula 1. (3) Podemos usar a simetria do problema para eliminar alguns cálculos desnecessários.

***Cálculos:*** Para calcular o módulo das forças a que a partícula 1 está submetida, observe que as partículas 2 e 4 têm massas iguais e estão à mesma distância $r = 2a$ da partícula 1. De acordo com a Eq. 13-1, temos:

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}. \qquad (13\text{-}7)$$

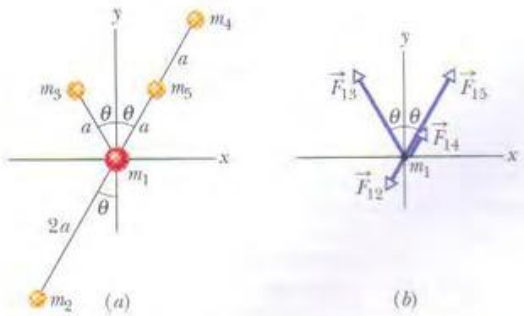



**FIG. 13-5** (*a*) Um arranjo de cinco partículas. (*b*) As forças que as outras quatro partículas exercem sobre a partícula de massa $m_1$.

Da mesma forma, como as partículas 3 e 5 têm massas iguais e estão situadas à mesma distância $r = a$ da partícula 1, temos:

$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2}. \qquad (13\text{-}8)$$

Poderíamos agora substituir os valores conhecidos nessas duas equações para calcular os módulos das forças, indicar as direções das forças no diagrama de corpo livre da Fig. 13-5*b* e determinar a força resultante (1) calculando as componentes $x$ e $y$ dos vetores, somando separadamente as componentes $x$ e $y$ e combinando vetorialmente essas componentes ou (2) usando uma calculadora para somar diretamente os vetores.

Em vez disso, porém, vamos continuar a usar a simetria do problema. Em primeiro lugar, observamos que $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{14}$ têm módulos iguais e sentidos opostos; assim, as duas forças se *cancelam*. Examinando a Fig. 13-5*b* e a Eq. 13-8, vemos que as componentes $x$ de $\vec{F}_{13}$ e $\vec{F}_{15}$ também se cancelam e as componentes $y$ têm o mesmo módulo e o mesmo sentido. Assim, $\vec{F}_{1,\text{res}}$ tem a mesma orientação que a componente $y$ de $\vec{F}_{13}$ e um módulo duas vezes maior:

$$F_{1,\text{res}} = 2F_{13}\cos\theta = 2\frac{Gm_1m_2}{a^2}\cos\theta$$

$$= \frac{2(6{,}67\times10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(8{,}0\ \text{kg})(2{,}0\ \text{kg})}{(0{,}020\ \text{m})^2}\cos 30°$$

$$= 4{,}6\times10^{-6}\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que a presença da partícula 5 sobre a reta que liga as partículas 1 e 4 não afeta a força gravitacional que a partícula 4 exerce sobre a partícula 1.

**TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

***Tática 1:*** *Desenhando os Vetores de Forças Gravitacionais* Quando é dado um diagrama de partículas, como o da Fig. 13-4*a*, e o problema consiste em determinar a força gravitacional resultante a que uma das partículas está submetida, em geral desenhamos um diagrama de corpo livre, como o da Fig. 13-4*b*, que mostra *apenas* a partícula de interesse e as forças que agem sobre ela. Se, em vez disso, você optar por desenhar os vetores de todas as forças envolvidas, desenhe cada vetor com as origens (de preferência) ou as extremidades na partícula sobre a qual age a força. Se desenhar os vetores em outro lugar, estará fazendo um convite à confusão... e a confusão estará garantida se desenhar os vetores começando ou terminando nas partículas *responsáveis* pelas forças.

***Tática 2:*** *Uso da Simetria para Simplificar uma Soma de Forças* No Exemplo 13-2 usamos a simetria do problema: percebendo que as partículas 2 e 4 estão posicionadas simetricamente em relação à partícula 1, e que, portanto, $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{14}$ se cancelam, pudemos dispensar o cálculo das duas forças. Percebendo que as componentes $x$ de $\vec{F}_{13}$ e $\vec{F}_{15}$ se cancelam e que suas componentes $y$ são idênticas e se somam, economizamos mais trabalho.

Em problemas com simetria é possível economizar trabalho e reduzir a probabilidade de cometer erros identificando os cálculos que não são necessários graças à simetria do problema. Este tipo de identificação é uma habilidade adquirida apenas através da realização de muitos exercícios.

## 13-4 | A Gravitação nas Proximidades da Superfície da Terra

Vamos supor que a Terra é uma esfera uniforme de massa $M$. O módulo da força gravitacional que a Terra exerce sobre uma partícula de massa $m$, localizada fora da Terra a uma distância $r$ do centro da Terra, é dado pela Eq. 13-1:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \qquad (13\text{-}9)$$

Se a partícula é liberada, cai em direção ao centro da Terra, em conseqüência da força gravitacional $\vec{F}$, com uma aceleração que chamaremos de **aceleração da gravidade** $\vec{a}_g$. De acordo com a segunda lei de Newton, módulos de $\vec{F}$ e $\vec{a}_g$ estão relacionados através da equação

$$F = ma_g. \qquad (13\text{-}10)$$

Substituindo $F$ da Eq. 13-9 na Eq. 13-10 e explicitando $a_g$, obtemos

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \qquad (13\text{-}11)$$

A Tabela 13-1 mostra os valores de $a_g$ calculados para várias altitudes acima da superfície da Terra. Note que $a_g$ tem um valor relativamente grande mesmo a 400 km de altura.

A partir da Seção 5-4, supusemos que a Terra é um referencial inercial, desprezando seu movimento de rotação. Essa simplificação nos permitiu supor que a aceleração de queda livre $g$ de uma partícula é igual à aceleração gravitacional da partícula (que agora chamamos de $a_g$). Além disso, supusemos que $g$ possui o valor de

**TABELA 13-1**
**Variação de $a_g$ com a Altitude**

| Altitude (km) | $a_g$ (m/s²) | Exemplo de Altitude |
|---|---|---|
| 0 | 9,83 | Superfície média da Terra |
| 8,8 | 9,80 | Monte Everest |
| 36,6 | 9,71 | Recorde para um balão tripulado |
| 400 | 8,70 | Órbita do ônibus espacial |
| 35 700 | 0,225 | Satélite de comunicações |

9,8 m/s² em qualquer lugar sobre a superfície da Terra. Na prática, porém, o valor de $g$ medido em um certo local é diferente do valor de $a_g$ calculado usando a Eq. 13-11 para esse local, por três razões: (1) A massa da Terra não está distribuída uniformemente, (2) a Terra não é uma esfera perfeita e (3) a Terra está girando. Além disso, como $g$ é diferente de $a_g$, pelas mesmas três razões o peso $mg$ de uma partícula é diferente do módulo da força gravitacional sobre a partícula dada pela Eq. 13-9. Vamos agora discutir essas três razões.

FIG. 13-6 Massa específica da Terra em função da distância do centro. Os limites do núcleo sólido interno, do núcleo externo semilíquido e do manto sólido são claramente visíveis, mas a crosta da Terra é fina demais para ser mostrada no gráfico.

1. ***A massa da Terra não está uniformemente distribuída.*** A massa específica (massa por unidade de volume) da Terra varia com a distância do centro, como mostra a Fig. 13-6, e a massa específica da crosta (parte externa) varia de ponto para ponto da superfície da Terra. Assim, $g$ não é igual em todos os pontos da superfície.
2. ***A Terra não é uma esfera.*** A Terra tem a forma aproximada de um elipsóide; é achatada nos pólos e saliente no equador. A diferença entre o raio no equador e o raio nos pólos é da ordem de 21 km. Assim, um ponto nos pólos está mais próximo do centro da Terra do que um ponto no equador. Esta é uma das razões pelas quais a aceleração de queda livre $g$ ao nível do mar aumenta à medida que nos afastamos do equador em direção a um nos pólos.
3. ***A Terra está girando.*** O eixo de rotação passa pelos pólos norte e sul da Terra. Um objeto localizado em qualquer lugar da superfície da Terra, exceto nos pólos, descreve uma circunferência em torno do eixo de rotação e, portanto, possui uma aceleração centrípeta dirigida para o centro da circunferência. Esta aceleração centrípeta requer uma força centrípeta que também está dirigida para esse centro.

Para vermos como a rotação da Terra faz com que $g$ seja diferente de $a_g$, vamos analisar uma situação simples na qual um caixote de massa $m$ está sobre uma balança no equador. A Fig. 13-7*a* mostra esta situação observada de um ponto do espaço acima do pólo norte.

A Fig. 13-7*b*, um diagrama de corpo livre do caixote, mostra as duas forças que agem sobre ele, ambas orientadas ao longo da reta que liga o centro da Terra ao caixote. A força normal $\vec{F}_N$ exercida pela balança sobre o caixote é dirigida para fora, no sentido positivo do eixo $r$. A força gravitacional, representada pela força equivalente $m\vec{a}_g$, é dirigida para dentro. Como o caixote se move em uma circunferência em torno do centro da Terra por causa da rotação da Terra, ele possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra. De acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$), esta aceleração é igual a $\omega^2 R$, onde $\omega$ é a velocidade angular da Terra e $R$ é o raio da circunferência (aproximadamente o raio da Terra). Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as forças ao longo do eixo $r$ ($F_{\text{res},r} = ma_r$) na forma

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R). \tag{13-12}$$

O módulo $F_N$ da força normal é igual ao peso $mg$ indicado pela balança. Substituindo $F_N$ por $mg$, a Eq. 13-12 se torna

$$mg = ma_g - m(\omega^2 R), \tag{13-13}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{medido}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{módulo de força}\\ \text{gravitacional}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{massa vezes aceleração}\\ \text{centrípeta}\end{pmatrix}.$$

Assim, a rotação da Terra faz com que o peso medido seja menor que a força gravitacional que age sobre o caixote.

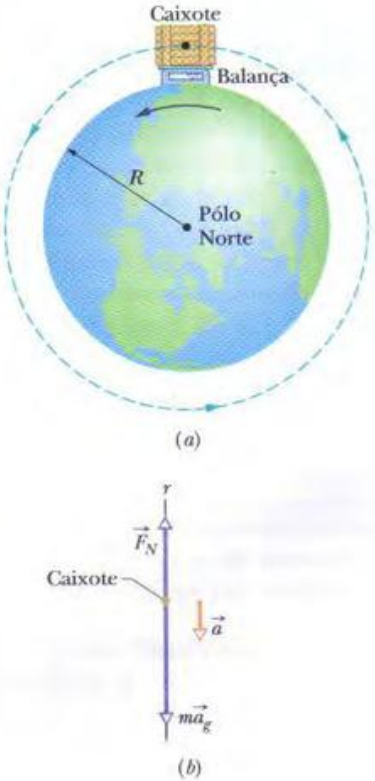



FIG. 13-7 (*a*) Um caixote sobre uma balança no equador da Terra, conforme visto por um observador posicionado sobre o eixo de rotação da Terra, em algum ponto acima do pólo Norte. (*b*) Diagrama de corpo livre do caixote, com o eixo radial $r$ ligando o caixote ao centro da Terra. A força gravitacional que age sobre o caixote está representada pelo vetor equivalente $m\vec{a}_g$. A força normal exercida pela balança sobre o caixote é $\vec{F}_N$. Devido à rotação da Terra, o caixote possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra.

Para encontrar uma expressão correspondente para $g$ e $a_g$, cancelamos $m$ na Eq. 13-13, o que nos dá

$$g = a_g - \omega^2 R, \tag{13-14}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix}\text{aceleração de}\\ \text{queda livre}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{aceleração}\\ \text{gravitacional}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{aceleração}\\ \text{centrípeta}\end{pmatrix}.$$

Assim, a rotação da Terra faz com que aceleração de queda livre seja menor que a aceleração gravitacional.

A diferença entre as acelerações $g$ e $a_g$ é igual a $\omega^2 R$ e é máxima no equador, já que o raio $R$ da circunferência descrita pelo caixote é máximo no equador. Para estimar a diferença, podemos usar a Eq. 10-5 ($\omega = \Delta\theta/\Delta t$) e o raio médio da Terra, $R = 6{,}37 \times 10^6$ m. Para uma rotação da Terra, $\theta = 2\pi$ rad e o período $\Delta t$ é aproximadamente 24 h. Usando esses valores (e convertendo horas para segundos), descobrimos que a diferença entre $a_g$ e $g$ é apenas cerca de 0,034 m/s$^2$ (um valor muito pequeno em comparação com 9,8 m/s$^2$). Assim, desprezar a diferença entre as acelerações $g$ e $a_g$ constitui, na maioria dos casos, uma aproximação razoável. Da mesma forma, desprezar a diferença entre o peso e o módulo da força gravitacional constitui, na maioria das vezes, uma aproximação razoável.

## Exemplo 13-3

(a) Uma astronauta cuja altura $h$ é 1,70 m flutua "com os pés para baixo" em um ônibus espacial em órbita a uma distância $r = 6{,}77 \times 10^6$ m do centro da Terra. Qual é a diferença entre a aceleração gravitacional de seus pés e de sua cabeça?

**IDÉIAS-CHAVE** Podemos aproximar a Terra por uma esfera uniforme de massa $M_T$. De acordo com a Eq. 13-11, a aceleração gravitacional a qualquer distância $r$ do centro da Terra é

$$a_g = \frac{GM_T}{r^2}. \tag{13-15}$$

Poderíamos simplesmente aplicar esta equação duas vezes, primeiro com $r = 6{,}77 \times 10^6$ m para os pés e depois com $r = 6{,}77 \times 10^6 + 1{,}70$ m para a cabeça. Entretanto, uma calculadora nos forneceria o mesmo valor para $a_g$ nos dois casos e, portanto, uma diferença nula, já que $h$ é muito menor que $r$. Uma outra abordagem é mais produtiva: como a diferença $dr$ entre as distâncias entre os pés e a cabeça da astronauta e o centro da Terra é muito pequena, vamos derivar a Eq. 13-15 em relação a $r$.

***Cálculos:*** Derivando a Eq. 13-15, obtemos

$$da_g = -2\frac{GM_T}{r^3}\,dr, \tag{13-16}$$

onde $da_g$ é a variação diferencial da aceleração gravitacional em conseqüência da variação diferencial $dr$ de $r$. Para a astronauta, $dr = h$ e $r = 6{,}77 \times 10^6$ m. Substituindo os valores conhecidos na Eq. 13-16, temos:

$$da_g = -2\frac{(6{,}67\times10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5{,}98\times10^{24}\ \text{kg})}{(6{,}77\times10^{6}\ \text{m})^3}(1{,}70\ \text{m})$$

$$= -4{,}37 \times 10^{-6}\ \text{m/s}^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o valor de $M_T$ foi obtido no Apêndice C. Este resultado significa que a aceleração gravitacional dos pés da astronauta em direção à Terra é ligeiramente maior que a aceleração da cabeça em direção à Terra. Esta diferença entre as acelerações tende a esticar o seu corpo, mas a diferença é muito pequena para a força resultante, $mda_g$, onde $m$ é a massa da astronauta, seja sentida.

(b) Se a astronauta está "de pés para baixo" na mesma órbita de raio $r = 6{,}77 \times 10^6$ m em torno de um buraco negro de massa $M_b = 1{,}99 \times 10^{31}$ kg (10 vezes a massa do Sol), qual é a diferença entre a aceleração gravitacional dos pés e da cabeça? O buraco negro possui uma superfície matemática (chamada *horizonte de eventos*) de raio $R_b = 2{,}95 \times 10^4$ m. Nada, nem mesmo a luz, pode escapar dessa superfície ou de qualquer ponto do seu interior. Note que a astronauta está bem fora da superfície ($r = 229R_b$).

***Cálculos:*** Mais uma vez, temos uma variação diferencial $dr$ entre os pés e a cabeça da astronauta, e podemos empregar a Eq. 13-16. Agora, porém, em vez de $M_T$, temos que usar $M_b = 1{,}99 \times 10^{31}$ kg. O resultado é

$$da_g = -2\frac{(6{,}67\times10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(1{,}99\times10^{31}\ \text{kg})}{(6{,}77\times10^{6}\ \text{m})^3}(1{,}70\ \text{m})$$

$$= -14{,}5\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que a aceleração gravitacional dos pés da astronauta em direção ao buraco negro é bem maior que a da cabeça. A força resultante seria suportável, mas dolorosa. Se ela se aproximasse do buraco negro, a força de estiramento aumentaria drasticamente.

## 13-5 | A Gravitação no Interior da Terra

O teorema das cascas de Newton também pode ser aplicado a uma situação na qual a partícula se encontra *no interior* de uma casca uniforme, para demonstrar o seguinte:

Uma casca uniforme de matéria não exerce força gravitacional *resultante* sobre uma partícula localizada no seu interior.

*Atenção:* Esta afirmação *não* significa que as forças gravitacionais exercidas pelos vários elementos da casca sobre a partícula desaparecem magicamente, mas apenas que a *resultante* de todas as forças gravitacionais que agem sobre a partícula é nula.

Se a massa da Terra fosse uniformemente distribuída, a força gravitacional que age sobre uma partícula seria máxima na superfície da Terra e decresceria à medida que a partícula se movesse para fora, afastando-se do planeta. Se a partícula se movesse para dentro, talvez penetrando no poço de uma mina, a força gravitacional mudaria por duas razões: (1) tenderia a aumentar porque a partícula estaria se aproximando do centro da Terra; (2) tenderia a diminuir porque uma casca de material de espessura cada vez maior, localizada do lado de fora da partícula em relação ao centro da Terra, deixaria de contribuir para a força gravitacional.

No caso de uma Terra uniforme, a segunda influência prevaleceria e a força exercida sobre a partícula diminuiria progressivamente à medida que a partícula se aproximasse do centro da Terra. No caso real, porém, de uma Terra não-uniforme, a força sobre a partícula aumenta quando a partícula começa a descer. A força atinge um valor máximo a uma certa profundidade e depois começa a diminuir.

### Exemplo 13-4

Em *De Pólo a Pólo*, uma conto de ficção científica escrito por George Griffith em 1904, três exploradores viajam em uma cápsula em um túnel formado naturalmente (e, evidentemente, fictício) que vai do pólo Sul ao pólo Norte (Fig. 13-8). De acordo com a história, quando a cápsula se aproxima do centro da Terra a força gravitacional experimentada pelos exploradores aumenta assustadoramente e, depois, exatamente no centro, desaparece de repente, mas apenas por um momento. Em seguida, a cápsula atravessa a outra metade do túnel e chega ao pólo Norte.

Verifique se a descrição de Griffith está correta calculando a força gravitacional experimentada pela cápsula de massa $m$ quando está a uma distância $r$ do centro da Terra. Suponha que a Terra é uma esfera uniforme de massa específica $\rho$ (massa por unidade de volume).

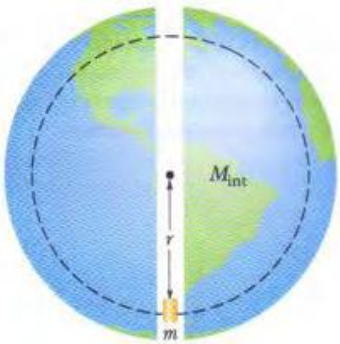



FIG. 13-8 Uma cápsula de massa $m$ cai a partir do repouso através de um túnel que liga os pólos Norte e Sul da Terra. Quando a cápsula está a uma distância $r$ do centro da Terra, a parte da massa da Terra que está contida numa esfera com esse raio é $M_{int}$.

**IDÉIAS-CHAVE** O teorema das cascas de Newton nos fornece três idéias:

1. Quando a cápsula se encontra a uma distância $r$ do centro da Terra a parte da Terra situada do lado de fora de uma esfera de raio $r$ não produz uma força gravitacional resultante sobre a cápsula.
2. A parte da Terra localizada no interior dessa esfera produz uma força gravitacional resultante sobre a cápsula.
3. Podemos tratar a massa $M_{int}$ dessa parte interior da Terra como sendo a massa de uma partícula situada no centro da Terra.

***Cálculos:*** De acordo com as três idéias e a Eq. 13-1, o módulo da força gravitacional experimentado pela cápsula é dado por

$$F = \frac{GmM_{int}}{r^2}. \qquad (13\text{-}17)$$

Para escrever a massa $M_{int}$ em termos do raio $r$, note que o volume $V_{int}$ que contém essa massa é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Além disso, como estamos supondo que Terra é uniforme, a massa específica $\rho_{int} = M_{int}/V_{int}$ é igual à massa específica $\rho$ da Terra. Assim, temos:

$$M_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}. \qquad (13\text{-}18)$$

Substituindo esta expressão na Eq. 13-17 e simplificando, obtemos

$$F = \frac{4\pi G m \rho}{3} r. \quad \text{(Resposta)} \qquad (13\text{-}19)$$

Esta equação nos diz que o módulo da força $F$ varia linearmente com a distância $r$ entre a cápsula e o centro da Terra. Assim, quando $r$ diminui, $F$ também diminui (ao contrário da descrição de Griffith), até se anular no centro da Terra. Pelo menos, Griffith acertou ao afirmar que a força era nula no centro da Terra.

A Eq. 13-19 também pode ser escrita em termos do vetor força $\vec{F}$ e do vetor posição $\vec{r}$ da cápsula em relação ao centro da Terra. Chamando de $K$ a constante $4\pi G m\rho/3$, a Eq. 13-19 se torna

$$\vec{F} = -K\vec{r}, \qquad (13\text{-}20)$$

onde usamos um sinal negativo para indicar que $\vec{F}$ e $\vec{r}$ têm sentidos opostos. A Eq. 13-20 tem a forma da lei de Hooke (Eq. 7-20, $\vec{F} = -k\vec{d}$). Assim, nas condições idealizadas da história a cápsula oscilaria como um bloco preso a uma mola, com o centro das oscilações no centro da Terra. Após a cápsula ter caído do pólo Sul até o centro da Terra viajaria do centro até o pólo Norte (como Griffith afirmou) e então voltaria ao pólo Sul, repetindo o ciclo para sempre.

## 13-6 | Energia Potencial Gravitacional

Na Seção 8-4 discutimos a energia potencial gravitacional de um sistema partícula-Terra. Tomamos o cuidado de manter a partícula perto da superfície da Terra para que pudéssemos supor constante a força gravitacional, e escolhemos uma configuração de referência do sistema para ter energia potencial gravitacional nula. Freqüentemente, nesta configuração de referência a partícula estava na superfície da Terra. Para partículas fora da superfície da Terra a energia potencial gravitacional diminuía quando a distância entre a partícula e a Terra diminuía.

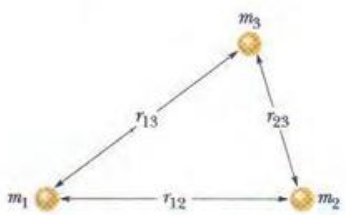



FIG. 13-9 Um sistema formado por três partículas. A energia potencial gravitacional *do sistema* é a soma das energias potenciais gravitacionais dos três pares de partículas.

Vamos agora alargar nossa visão e considerar a energia potencial gravitacional $U$ de duas partículas, de massas $m$ e $M$, separadas por uma distância $r$. Mais uma vez, vamos escolher uma configuração de referência com $U$ igual a zero. Entretanto, para simplificar as equações a distância $r$ na configuração de referência é tão grande que podemos considerá-la *infinita*. Como antes, a energia potencial gravitacional diminui quando a distância diminui. Como $U = 0$ para $r = \infty$, a energia potencial é negativa para qualquer distância finita e se torna progressivamente mais negativa à medida que as partículas se aproximam.

Com esses fatos em mente, tomamos, como justificaremos a seguir, a energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas como sendo

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(energia potencial gravitacional).} \qquad (13\text{-}21)$$

Note que $U(r)$ tende a zero quando $r$ tende a infinito e que, para qualquer valor finito de $r$, o valor de $U(r)$ é negativo.

A energia potencial dada pela Eq. 13-21 é uma propriedade do sistema de duas partículas, e não de cada partícula isoladamente. Não é possível dividir esta energia e afirmar que uma parte pertence a uma das partículas e o restante pertence à outra. Entretanto, se $M \gg m$, como acontece no caso da Terra (de massa $M$) e uma bola de tênis (de massa $m$), freqüentemente falamos da "energia potencial da bola de tênis". Podemos falar assim porque, quando uma bola de tênis se move nas proximidades da superfície da Terra, as variações de energia potencial do sistema bola-Terra aparecem quase inteiramente como variações da energia cinética da bola de tênis, já que as variações da energia cinética da Terra são pequenas demais para serem medidas. Analogamente, na Seção 13-8 falaremos da "energia potencial de um satélite artificial" em órbita da Terra, porque a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra. Entretanto, quando falamos da energia potencial de corpos de massas comparáveis devemos ter o cuidado de tratá-los como um sistema.

Se o nosso sistema contém mais de duas partículas, consideramos cada par de partículas separadamente, calculamos a energia potencial gravitacional desse par usando a Eq. 13-21 como se as outras partículas não estivessem presentes e soma-

mos algebricamente os resultados. Aplicando a Eq. 13-21 a cada um dos três pares de partículas da Fig. 13-9, por exemplo, obtemos a energia potencial do sistema como

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{13-22}$$

## Demonstração da Equação 13-21

Suponha que uma bola de tênis seja lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, como na Fig. 13-10. Estamos interessados em encontrar uma expressão para a energia potencial gravitacional $U$ da bola no ponto $P$ da sua trajetória, a uma distância radial $R$ do centro da Terra. Para isso, primeiro calculamos o trabalho $W$ realizado sobre a bola pela força gravitacional enquanto a bola se move do ponto $P$ até uma distância muito grande (infinita) da Terra. Como a força gravitacional $\vec{F}(r)$ é uma força variável (seu módulo depende de $r$), devemos usar as técnicas da Seção 7-8 para calcular o trabalho. Em notação vetorial, podemos escrever

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}. \tag{13-23}$$

A integral contém o produto escalar da força $\vec{F}(r)$ pelo vetor deslocamento diferencial $d\vec{r}$ ao longo da trajetória da bola. Podemos expandir esse produto como

$$\vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = F(r)dr\cos\phi, \tag{13-24}$$

onde $\phi$ é o ângulo entre $\vec{F}(r)$ e $d\vec{r}$. Quando substituímos $\phi$ por 180° e F($r$) pelo seu valor, dado pela Eq. 13-1, a Eq. 13-24 se torna

$$\vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}dr,$$

onde $M$ é a massa da Terra e $m$ é massa da bola.

Substituindo na Eq. 13-23 e integrando, obtemos

$$W = -GMm\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty$$

$$= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R}, \tag{13-25}$$

onde $W$ é o trabalho necessário para deslocar a bola do ponto $P$ (a uma distância $R$) até o infinito. A Eq. 8-1 ($\Delta U = -W$) nos diz que também podemos escrever esse trabalho em termos de energias potenciais como

$$U_\infty - U = -W.$$

Como a energia potencial no infinito $U_\infty$ é nula, $U$ é a energia potencial em $P$ e $W$ é dado pela Eq. 13-25, esta equação se torna

$$U = W = -\frac{GMm}{R}.$$

Substituindo $R$ por $r$, obtemos a Eq. 13-21, que queríamos demonstrar.

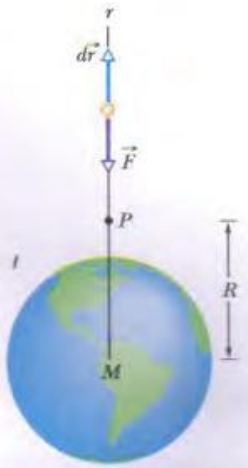



FIG. 13-10 Uma bola de tênis é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, passando pelo ponto $P$ a uma distância $R$ do centro da Terra. A força gravitacional $\vec{F}$ que age sobre a bola e o vetor deslocamento diferencial $d\vec{r}$ estão representados ao longo de um eixo radial $r$.

## Independência da Trajetória

Na Fig. 13-11 deslocamos uma bola de tênis do ponto $A$ para o ponto $G$ ao longo de uma trajetória composta por três segmentos radiais e três arcos de circunferência (com o centro no centro da Terra). Estamos interessados no trabalho total $W$ realizado pela força gravitacional $\vec{F}$ que a Terra exerce sobre a bola quando ela se desloca do ponto $A$ até o ponto $G$. O trabalho realizado ao longo dos arcos de circunferência é nulo, já que $\vec{F}$ é perpendicular ao arco em todos os pontos. Assim, $W$ é a soma apenas dos trabalhos realizados pela força $\vec{F}$ ao longo dos três segmentos radiais.

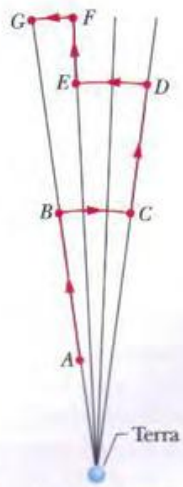



FIG. 13-11 Perto da superfície da Terra, uma bola de tênis é deslocada do ponto $A$ para o ponto $G$ ao longo de uma trajetória formada por segmentos radiais e arcos de circunferência.

Suponha agora que reduzimos mentalmente os comprimentos dos arcos para zero. Nesse caso, estamos deslocando a bola de $A$ para $G$ ao longo de um único segmento radial. O valor de $W$ é diferente? Não. Como nenhum trabalho é realizado ao longo dos arcos, sua eliminação não muda o valor do trabalho. A trajetória seguida de $A$ até $G$ é diferente, mas o trabalho realizado por $\vec{F}$ é o mesmo.

Este tipo de resultado foi discutido, de forma geral, na Seção 8-3. O fato é que a força gravitacional é uma força conservativa. Assim, o trabalho realizado pela força gravitacional sobre uma partícula que se move de um ponto inicial $i$ para um ponto final $f$ não depende da trajetória seguida entre esses dois pontos. De acordo com a Eq. 8-1, a variação $\Delta U$ da energia potencial gravitacional do ponto $i$ para o ponto $f$ é dada por

$$\Delta U = U_f - U_i = -W. \tag{13-26}$$

Como o trabalho realizado $W$ por uma força conservativa é independente da trajetória seguida pela partícula, a variação $\Delta U$ da energia potencial gravitacional também é *independente* da trajetória.

## Energia Potencial e Força

Na demonstração da Eq. 13-21 deduzimos a função energia potencial $U(r)$ a partir da função força $\vec{F}(r)$. Poderíamos ter seguido o caminho inverso, ou seja, deduzido a função força a partir da função energia potencial. Guiados pela Eq. 8-22 [$F(x) = -dU(x)/dx$], podemos escrever

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}. \tag{13-27}$$

Esta é a lei da gravitação de Newton (Eq. 13-1). O sinal negativo significa que a força exercida sobre a massa $m$ aponta para dentro, em direção à massa $M$.

## Velocidade de Escape

Quando lançamos um projétil para cima, normalmente ele diminui de velocidade, pára momentaneamente e cai de volta em direção à Terra. Para velocidades acima de um certo valor, porém, o projétil se move sempre para cima, e sua velocidade somente se anula (pelo menos teoricamente) a uma distância infinita da Terra. O valor mínimo da velocidade para que isso ocorra é chamado de **velocidade de escape** (da Terra).

Considere um projétil de massa $m$ deixando a superfície de um planeta (ou outro astro qualquer) com velocidade de escape $v$. O projétil possui uma energia cinética $K$ dada por $\frac{1}{2}mv^2$ e uma energia potencial $U$ dada pela Eq. 13-21:

$$U = -\frac{GMm}{R},$$

onde $M$ é a massa do planeta e $R$ o raio.

Quando o projétil atinge o infinito ele pára e, portanto, não possui mais energia cinética. Também não possui energia potencial gravitacional, pois uma distância infinita entre dois corpos corresponde à nossa configuração de energia potencial nula. A energia total do projétil no infinito é, portanto, nula. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia total do projétil na superfície do planeta também deve ter sido nula, de modo que

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

e portanto

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{13-28}$$

Note que $v$ não depende da direção em que o projétil é lançado. Entretanto, é mais fácil atingir esta velocidade se o projétil for lançado no sentido em que o local de lançamento está se movendo por causa da rotação do planeta. Assim, por exemplo, os foguetes americanos são lançados na direção leste em Cabo Canaveral para aproveitar a velocidade local para o leste, de cerca de 1500 km/h, em conseqüência da rotação da Terra.

A Eq. 13-28 pode ser usada para calcular a velocidade de escape de um projétil a partir da superfície de qualquer astro, tomando $M$ como a massa do astro e $R$ como o seu raio. A Tabela 13-2 mostra algumas velocidades de escape.

✓ **TESTE 3** Você afasta uma bola de massa $m$ de uma esfera de massa $M$. (a) A energia potencial gravitacional do sistema bola-esfera aumenta ou diminui? (b) O trabalho realizado pela força gravitacional com a qual a bola e a esfera se atraem é positivo ou negativo?

**TABELA 13-2**

**Algumas Velocidades de Escape**

| Astro | Massa (kg) | Raio (m) | Velocidade de Escape (km/s) |
|---|---|---|---|
| Ceres[a] | $1{,}17 \times 10^{21}$ | $3{,}8 \times 10^{5}$ | 0,64 |
| Lua[a] | $7{,}36 \times 10^{22}$ | $1{,}74 \times 10^{6}$ | 2,38 |
| Terra | $5{,}98 \times 10^{24}$ | $6{,}37 \times 10^{6}$ | 11,2 |
| Júpiter | $1{,}90 \times 10^{27}$ | $7{,}15 \times 10^{7}$ | 59,5 |
| Sol | $1{,}99 \times 10^{30}$ | $6{,}96 \times 10^{8}$ | 618 |
| Sirius B[b] | $2 \times 10^{30}$ | $1 \times 10^{7}$ | 5200 |
| Estrela de nêutrons[c] | $2 \times 10^{30}$ | $1 \times 10^{4}$ | $2 \times 10^{5}$ |

[a]O maior asteróide.

[b]Uma *anã branca* (estrela em um estágio final de evolução) que é companheira da estrela Sirius.

[c]O núcleo denso de uma estrela que se transforma em *supernova*.

## Exemplo 13-5

Um asteróide, em rota de colisão com a Terra, tem uma velocidade de 12 km/s em relação ao planeta quando está a uma distância de 10 raios terrestre do centro da Terra. Desprezando os efeitos da atmosfera da Terra sobre o asteróide, determine a velocidade do asteróide, $v_f$, ao atingir a superfície da Terra.

**IDÉIAS-CHAVE** Como estamos desprezando os efeitos da atmosfera sobre o asteróide, a energia mecânica do sistema asteróide-Terra é conservada durante a queda. Assim, a energia mecânica final (quando o asteróide atinge a superfície da Terra) é igual à energia mecânica inicial. Chamando a energia cinética de $K$ e a energia potencial gravitacional de $U$, esta relação pode ser escrita na forma

$$K_f + U_f = K_i + U_i. \qquad (13\text{-}29)$$

Se supusermos que o sistema é isolado, o momento linear do sistema também é conservado durante a queda. Assim, as variações do momento linear do asteróide e da Terra devem ter o mesmo módulo e sinais opostos. Entretanto, como a massa da Terra é muito maior que a massa do asteróide a variação da velocidade da Terra é desprezível em relação à variação da velocidade do asteróide, ou seja, a variação da energia cinética da Terra pode ser desprezada. Assim, podemos supor que as energias cinéticas na Eq. 13-29 são apenas as do asteróide.

***Cálculos:*** Seja $m$ a massa do asteróide e $M$ a massa da Terra ($5{,}98 \times 10^{24}$ kg). O asteróide está inicialmente a uma distância $10R_T$ do centro da Terra e, no final, a uma distância $R_T$, onde $R_T$ é o raio da Terra ($6{,}37 \times 10^{6}$ m). Substituindo $U$ pelo seu valor, dado pela Eq. 13-21, e $K$ por $\frac{1}{2}mv^2$, a Eq. 13-29 se torna

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R_T} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R_T}.$$

Reagrupando os termos e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{R_T}\left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$= (12 \times 10^3 \text{ m/s})^2$$

$$= \frac{2(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m}} 0{,}9$$

$$= 2{,}567 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

e

$$v_f = 1{,}60 \times 10^4 \text{ m/s} = 16 \text{ km/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Com esta velocidade o asteróide não precisaria ser muito grande para causar danos consideráveis. Se ele tivesse 5 m de diâmetro o choque liberaria aproximadamente tanta energia quanto a explosão nuclear de Hiroshima. Na verdade, existem cerca de 500 milhões de asteróides desse tamanho nas proximidades da órbita da Terra, e em 1994 um desses corpos aparentemente penetrou na atmosfera da Terra e explodiu 20 km acima do Pacífico Sul (acionando alarmes de explosão nuclear em seis satélites militares). O impacto de um asteróide de 500 m de diâmetro (deve existir cerca de um milhão desses asteróides nas proximidades da órbita da Terra) poderia extinguir a civilização moderna e eliminar a maior parte dos habitantes da Terra.

## 13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler

Desde tempos remotos, os movimentos aparentemente aleatórios dos planetas em relação às estrelas intrigaram os observadores do céu. O movimento retrógrado de Marte, que aparece na Fig. 13-12, era particularmente enigmático. Johannes Kepler (1571–1630), após uma vida de estudos, descobriu as leis empíricas que governam esses movimentos. Tycho Brahe (1546–1601), o último dos grandes astrônomos a fazer observações sem o auxílio de um telescópio, compilou uma grande quantidade de dados a partir dos quais Kepler foi capaz de deduzir as três leis do movimento planetário que hoje levam o seu nome. Mais tarde, Newton (1642–1727) mostrou que as leis de Kepler são uma conseqüência de sua lei da gravitação.

Nesta seção, vamos discutir as três leis de Kepler e aplicá-las ao movimento dos planetas em torno do Sol. Entretanto, elas também podem ser usadas para estudar o movimento de satélites, naturais ou artificiais, em volta da Terra ou de qualquer outro corpo cuja massa é muito maior que a do satélite.

FIG. 13-12 A trajetória de Marte vista da Terra enquanto o planeta se move em relação às estrelas da constelação de Capricórnio, durante o ano de 1971. A posição do planeta está assinalada em quatro dias específicos. Como tanto Marte como a Terra estão se movendo em torno do Sol, o que vemos é a posição de Marte em relação a nós; este movimento relativo faz com que Marte às vezes pareça inverter o sentido do seu movimento.

**1. LEI DAS ÓRBITAS:** Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.

A Fig. 13-13 mostra um planeta de massa $m$ se movendo em órbita em torno do Sol, cuja massa é $M$. Supomos que $M \gg m$, de modo que o centro de massa do sistema planeta-Sol está aproximadamente no centro do Sol.

A órbita da Fig. 13-13 é especificada através de seu **semi-eixo maior** $a$ e sua excentricidade $e$, esta última definida de tal forma que $ea$ é a distância do centro da elipse a um dos focos, $F$ ou $F'$. *Uma excentricidade nula corresponde a uma circunferência* na qual os dois focos se reduzem a um único ponto central. As excentricidades das órbitas dos planetas são tão pequenas que as órbitas parecem circulares se forem desenhadas em escala. A excentricidade da elipse da Fig. 13-13, que foi exagerada para maior clareza, é 0,74. A excentricidade da órbita da Terra é apenas 0,0167.

**2. LEI DAS ÁREAS:** A reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos de tempo iguais, ou seja, a taxa de variação $dA/dt$ da área $A$ com o tempo é constante.

Qualitativamente, esta segunda lei nos diz que o planeta se move mais devagar quando está mais distante do Sol e mais depressa quando está mais próximo do Sol. Na realidade, a segunda lei de Kepler é uma conseqüência direta da lei de conservação do momento angular. Vamos provar este fato.

A área da cunha sombreada na Fig. 13-14*a* é praticamente igual à área varrida no intervalo de tempo $\Delta t$ pela reta que liga o Sol ao planeta, que estão separados pela distância $r$. A área $\Delta A$ da cunha é aproximadamente igual à área de um triângulo de base $r\Delta\theta$ e altura $r$. Como a área de um triângulo é igual à metade da base vezes a altura, $\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$. Esta expressão para $\Delta A$ se torna mais exata quando $\Delta t$ (e, portanto, $\Delta\theta$) se aproxima de zero. A taxa instantânea de variação é

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \omega, \qquad (13\text{-}30)$$

onde $\omega$ é a velocidade angular da reta que liga o Sol ao planeta.

A Fig. 13-14*b* mostra o momento linear $\vec{p}$ do planeta, juntamente com suas componentes radial e perpendicular. De acordo com a Eq. 11-20 ($L = rp_\perp$), o módulo do momento angular $\vec{L}$ do planeta em relação ao Sol é dado pelo produto de $r$ e $p_\perp$, a componente de $\vec{p}$ perpendicular a $r$. Para um planeta de massa $m$,

$$\begin{aligned} L &= rp_\perp = (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) \\ &= mr^2\omega, \end{aligned} \qquad (13\text{-}31)$$

onde substituímos $v_\perp$ por $\omega r$ (Eq. 10-18). Combinando as Eqs. 13-30 e 13-31, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \qquad (13\text{-}32)$$

De acordo com a Eq. 13-32, a afirmação de Kepler de que $dA/dt$ é constante equivale a dizer que $L$ é constante, ou seja, que o momento angular é conservado. A segunda lei de Kepler é, portanto, equivalente à lei de conservação do momento angular.

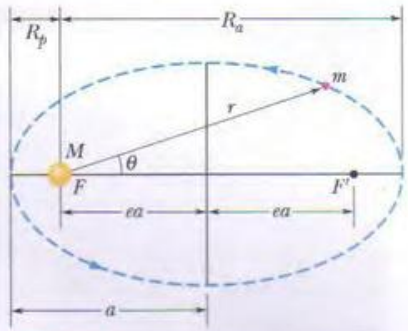



**FIG. 13-13** Um planeta de massa $m$ em órbita elíptica em torno do Sol. O Sol, de massa $M$, ocupa um foco, $F$, da elipse. O outro foco, $F'$, está localizado no espaço vazio. Os dois focos ficam a uma distância $ea$ do centro da elipse, onde $e$ é a excentricidade da elipse. O semi-eixo maior $a$ da elipse, a distância do periélio $R_p$ (ponto mais próximo do Sol) e a distância do afélio $R_a$ (ponto mais afastado do Sol) também aparecem na figura.

**3. LEI DOS PERÍODOS:** O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

Para compreender por que isso é verdade, considere a órbita circular da Fig. 13-15, de raio $r$ (o raio de uma circunferência é equivalente ao semi-eixo maior de uma elipse). Aplicando a segunda lei de Newton ($F = ma$) ao planeta em órbita da Fig. 13-15, obtemos:

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \qquad (13\text{-}33)$$

Aqui substituímos o módulo da força $F$ pelo seu valor, dado pela Eq. 13-1, e usamos a Eq. 10-23 para substituir a aceleração centrípeta por $\omega^2 r$. Usando a Eq. 10-20 para substituir $\omega$ por $2\pi/T$, onde $T$ é o período do movimento, obtemos a terceira lei de Kepler:

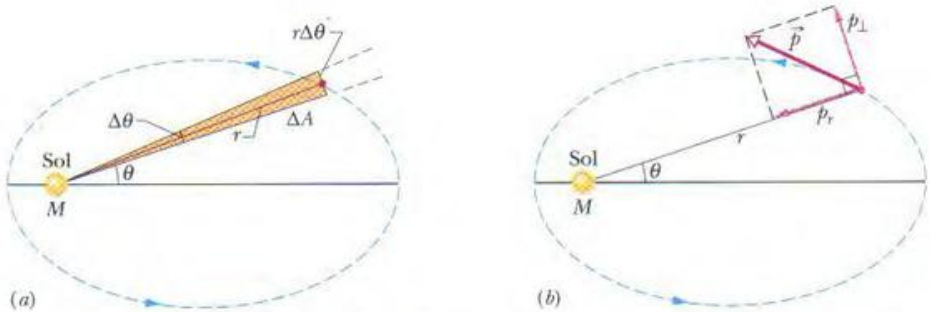



**FIG. 13-14** (*a*) No instante $\Delta t$, a reta $r$ que liga o planeta ao Sol se desloca de um ângulo $\Delta\theta$, varrendo uma área $\Delta A$ (sombreada). (*b*) O momento linear $\vec{p}$ do planeta e suas componentes.

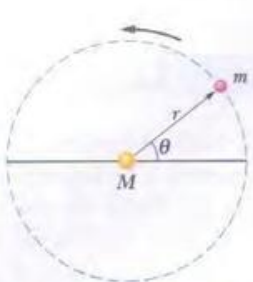



**FIG. 13-15** Um planeta de massa $m$ girando em torno do Sol em uma órbita circular de raio $r$.

**TABELA 13-3**

**Lei de Kepler para os Períodos do Sistema Solar**

| Planeta | Semi-eixo Maior $a$ ($10^{10}$ m) | Período $T$ (anos) | $T^2/a^3$ ($10^{-34}$ anos$^2$/m$^3$) |
|---|---|---|---|
| Mercúrio | 5,79 | 0,241 | 2,99 |
| Vênus | 10,8 | 0,615 | 3,00 |
| Terra | 15,0 | 1,00 | 2,96 |
| Marte | 22,8 | 1,88 | 2,98 |
| Júpiter | 77,8 | 11,9 | 3,01 |
| Saturno | 143 | 29,5 | 2,98 |
| Urano | 287 | 84,0 | 2,98 |
| Netuno | 450 | 165 | 2,99 |
| Plutão | 590 | 248 | 2,99 |

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(lei dos períodos).} \tag{13-34}$$

A grandeza entre parênteses é uma constante que depende apenas da massa $M$ do corpo central em torno do qual o planeta gira.

A Eq. 13-34 também é válida para órbitas elípticas, desde que $r$ seja substituído por $a$, o semi-eixo maior da elipse. Esta lei prevê que a razão $T^2/a^3$ tem praticamente o mesmo valor para todas as órbitas planetárias em torno de um mesmo corpo de grande massa. A Tabela 13-3 mostra que ela é válida para as órbitas de todos os planetas do sistema solar.

✓ **TESTE 4** O satélite 1 está em uma certa órbita circular em torno de um planeta, enquanto o satélite 2 está em uma órbita circular de raio maior. Qual dos satélites possui (a) o maior período e (b) a maior velocidade?

## Exemplo 13-6

O cometa de Halley gira em órbita em torno do Sol com um período de 76 anos; em 1986, chegou a sua menor distância do Sol, a *distância do periélio* $R_p$, que é $8{,}9 \times 10^{10}$ m. A Tabela 13-3 mostra que esta distância está entre as órbitas de Mercúrio e Vênus.

(a) Qual é a maior distância do cometa ao Sol, que é chamada de *distância do afélio* $R_a$?

**IDÉIA-CHAVE** De acordo com a Fig. 13-13, $R_a + R_p = 2a$, onde $a$ é o semi-eixo maior da órbita. Assim, podemos calcular $R_a$ se conhecermos $a$. Podemos relacionar $a$ ao período dado através da lei dos períodos (Eq. 13-34) simplesmente substituindo $r$ pelo semi-eixo maior $a$.

***Cálculos:*** Fazendo essa substituição e explicitando $a$, obtemos

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{13-35}$$

Substituindo na Eq. 13-35 a massa $M$ do Sol, $1{,}99 \times 10^{30}$ kg, e o período $T$ do cometa, 76 anos ou $2{,}4 \times 10^9$ s, obtemos $a = 2{,}7 \times 10^{12}$ m. Isso nos dá

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p \\ &= (2)(2{,}7 \times 10^{12}\,\text{m}) - 8{,}9 \times 10^{10}\,\text{m} \\ &= 5{,}3 \times 10^{12}\,\text{m}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

A Tabela 13-3 mostra que esse valor é um pouco menor que o semi-eixo maior da órbita de Plutão. Assim, o cometa não se afasta mais do Sol que Plutão.

(b) Qual é a excentricidade $e$ da órbita do cometa de Halley?

**IDÉIA-CHAVE** Podemos relacionar $e$, $a$ e $R_p$ através da Fig. 13-13, na qual vemos que $ea = a - R_p$.

***Cálculo:*** Temos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} \\ &= 1 - \frac{8{,}9 \times 10^{10}\ \text{m}}{2{,}7 \times 10^{12}\ \text{m}} = 0{,}97. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Como a excentricidade é quase 1, a órbita do cometa de Halley é uma elipse muito alongada.

## Exemplo 13-7

Vamos voltar à história da abertura deste capítulo. A Fig. 13-16 mostra a órbita observada da estrela S2 quando ela se move em torno de um objeto misterioso e não observado chamado Sagittarius A* (pronunciado como "A estrela"), que ocupa o centro da Via Láctea. S2 gira em torno de Sagittarius A* com um período $T = 15{,}2$ anos e com um semi-eixo maior $a = 5{,}50$ dias-luz ($= 1{,}42 \times 10^{14}$ m). Qual é a massa $M$ de Sagittarius A*? O que é Sagittarius A*?

**IDÉIA-CHAVE** O período $T$ e o semi-eixo maior $a$ da órbita estão relacionados à massa $M$ de Sagittarius A* através da lei dos períodos de Kepler. De acordo com a Eq. 13-34, com $a$ substituindo o raio $r$ de uma órbita circular, temos:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3. \tag{13-36}$$

***Cálculos:*** Explicitando $M$ na Eq. 13-36 e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 (1{,}42\times10^{14}\ \text{m})^3}{(6{,}67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{[(15{,}2\ \text{anos})(3{,}16\times10^{7}\ \text{s/ano})]^2}$$

$$= 7{,}35\times10^{36}\ \text{kg}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para descobrir o que é Sagittarius A*, vamos dividir esta massa pela massa do nosso Sol ($M_{Sol} = 1{,}99\times10^{30}$ kg) para encontrar

$$M = (3{,}7\times10^{6})M_{Sol}.$$

Sagittarius A* tem uma massa 3,7 milhões maior que a do Sol! Entretanto, não pode ser vista ao telescópio. Isso significa que se trata de um objeto extremamente compacto. Uma massa tão grande em um objeto tão pequeno nos leva a concluir que estamos diante de um buraco negro *supermaciço*. Na verdade, existem indícios de que existe um buraco negro supermaciço no centro da maioria das galáxias. (Filmes de estrelas girando em torno de Sagittarius A* estão disponíveis na Internet; procure "galactic center research".)

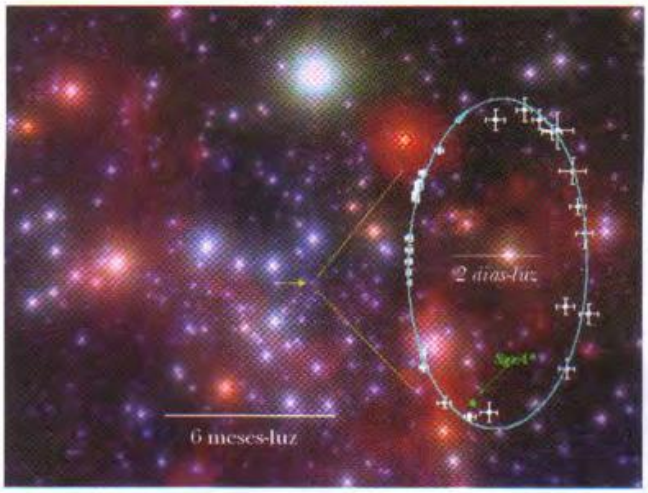



**FIG. 13-16** A órbita da estrela S2 em torno de Sagittarius A* (Sgr A*). A órbita elíptica parece distorcida porque não a observamos perpendicularmente ao plano da órbita. As barras cruzadas indicam a incerteza na posição de S2. *(Cortesia de Reinhard Genzel)*

## 13-8 | Satélites: Órbitas e Energias

Quando um satélite gira em torno da Terra em uma trajetória elíptica, tanto a velocidade, que determina a energia cinética $K$, como a distância ao centro da Terra, que determina a energia potencial gravitacional $U$, variam com o tempo. Entretanto, a energia mecânica $E$ do satélite permanece constante. (Como a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra, atribuímos $U$ e $E$ do sistema satélite-Terra apenas ao satélite.)

A energia potencial do sistema é dada pela Eq. 13-21:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(com $U = 0$ para uma distância infinita). A variável $r$ é o raio da órbita do satélite, que supomos por enquanto que é circular, e $M$ e $m$ são as massas da Terra e do satélite, respectivamente.

Para determinar a energia cinética de um satélite em órbita circular, escrevemos a segunda lei de Newton ($F = ma$) como

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \qquad (13\text{-}37)$$

onde $v^2/r$ é a aceleração centrípeta do satélite. Nesse caso, de acordo com a Eq. 13-37, a energia cinética é

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \qquad (13\text{-}38)$$

o que mostra que, para um satélite em uma órbita circular,

$$K = -\frac{U}{2} \qquad \text{(órbita circular)}. \qquad (13\text{-}39)$$

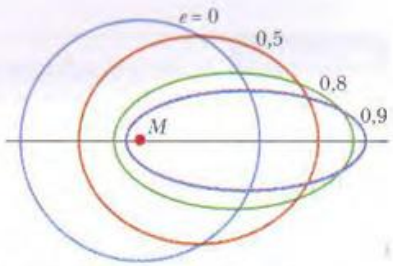



**FIG. 13-17** Quatro órbitas com diferentes excentricidades $e$ em torno de um corpo de massa $M$. As quatro órbitas têm o mesmo semi-eixo maior $a$ e, portanto, correspondem à mesma energia mecânica total $E$.

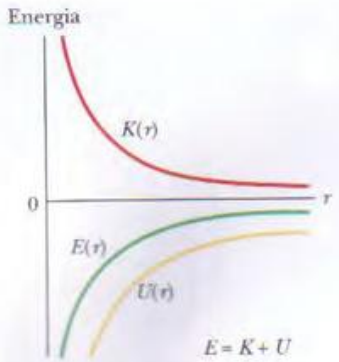



FIG. 13-18 Variação da energia cinética $K$, da energia potencial $U$ e da energia total $E$ com o raio $r$ para um satélite em órbita circular. Para qualquer valor de $r$, os valores de $U$ e $E$ são negativos, o valor de $K$ é positivo e $E = -K$. Quando $r \to \infty$, as três curvas tendem a zero.

A energia mecânica total do satélite em órbita é

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

ou

$$E = -\frac{GMm}{2r} \qquad \text{(órbita circular)}. \tag{13-40}$$

Este resultado mostra que, para um satélite em uma órbita circular, a energia total $E$ é o negativo da energia cinética $K$:

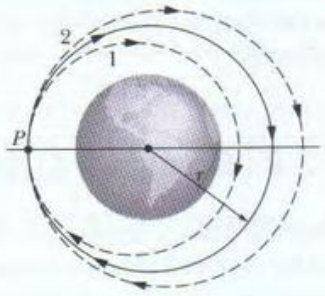
$$E = -K \qquad \text{(órbita circular)}. \tag{13-41}$$

Para um satélite em uma órbita elíptica com semi-eixo maior $a$, podemos substituir $r$ por $a$ na Eq. 13-40 para encontrar a energia mecânica:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad \text{(órbita elíptica)}. \tag{13-42}$$

De acordo com a Eq. 13-42, a energia total de um satélite em órbita depende apenas do semi-eixo maior da órbita, e não da excentricidade $e$. Assim, por exemplo, quatro órbitas com o mesmo semi-eixo maior aparecem na Fig. 13-17; o mesmo satélite teria a mesma energia mecânica total $E$ nas as quatro órbitas. A Fig. 13-18 mostra a variação de $K$, $U$ e $E$ com $r$ para um satélite em órbita circular em torno de um corpo central de grande massa.

**TESTE 5** Na figura, um ônibus espacial está inicialmente em uma órbita circular de raio $r$ em torno da Terra. No ponto $P$ o piloto aciona por alguns instantes um retrofoguete, apontado para a frente, para reduzir a energia cinética $K$ e a energia mecânica $E$ do ônibus espacial. (a) Qual das órbitas elípticas tracejadas mostradas na figura o ônibus espacial passa a seguir? (b) O novo período orbital $T$ do ônibus espacial (o tempo para retornar ao ponto $P$) é maior, menor ou igual ao da órbita circular?




## Exemplo 13-8

Um astronauta brincalhão lança uma bola de boliche, de massa $m = 7{,}20$ kg, em uma órbita circular em torno da Terra a uma altura $h$ de 350 km.

(a) Qual é a energia mecânica $E$ da bola em sua órbita?

**IDÉIA-CHAVE** Podemos calcular $E$ usando a Eq. 13-40 ($E = 2GMm/2r$) se conhecermos o raio $r$ da órbita.

***Cálculos:*** O raio da órbita é dado por

$$r = R + h = 6370 \text{ km} + 350 \text{ km} = 6{,}72 \times 10^6 \text{ m},$$

onde $R$ é o ràio da Terra. Assim, de acordo com a Eq. 13-40, a energia mecânica é

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{(2)(6{,}72 \times 10^6 \text{ m})}$$

$$= -2{,}14 \times 10^8 \text{ J} = -214 \text{ MJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a energia mecânica $E_0$ da bola na plataforma de lançamento de Cabo Canaveral? De lá até a órbita, qual é a variação $\Delta E$ da energia mecânica da bola?

**IDÉIA-CHAVE** Na plataforma de lançamento a bola *não está* em órbita e, portanto, a Eq. 13-40 *não* se aplica. Em vez disso, devemos calcular o *valor de* $E_0 = K_0 + U_0$, *onde* $K_0$ *é a energia cinética da bola e* $U_0$ é a energia potencial gravitacional do sistema bola-Terra.

***Cálculos:*** Para obter $U_0$, usamos a Eq. 13-21:

$$U_0 = -\frac{GMm}{R}$$

$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m}}$$

$$= -4{,}51 \times 10^8 \text{ J} = -451 \text{ MJ}.$$

A energia cinética $K_0$ da bola se deve ao movimento da bola com a rotação da Terra. É fácil mostrar que $K_0$ é menor que 1 MJ, um valor desprezível em comparação com $U_0$. Assim, a energia mecânica da bola na plataforma de lançamento é

$$E_0 = K_0 + U_0 \approx 0 - 451 \text{ MJ} = -451 \text{ MJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

O *aumento* da energia mecânica da bola da plataforma de lançamento até a órbita é

$$\Delta E = E - E_0 = (-214 \text{ MJ}) - (-451 \text{ MJ}) = 237 \text{ MJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

Isso equivale a alguns reais de eletricidade. Obviamente, o alto custo para colocar objetos em órbita não se deve à energia mecânica necessária.

## 13-9 | Einstein e a Gravitação

### O Princípio de Equivalência

Albert Einstein disse uma vez: "Eu estava... no escritório de patentes, em Berna, quando de repente me ocorreu um pensamento: 'Se uma pessoa cair livremente, não sentirá o próprio peso.' Fiquei surpreso. Esta idéia simples causou uma profunda impressão. Ela me levou à teoria da gravitação".

Foi assim, segundo Einstein, que ele começou a formular sua **teoria da relatividade geral**. O postulado fundamental dessa teoria da gravitação (da atração gravitacional entre objetos) é o chamado **princípio de equivalência**, segundo o qual a gravitação e a aceleração são equivalentes. Se um físico fosse trancado em uma cabine como na Fig. 13-19, não seria capaz de dizer se a cabine estava em repouso na Terra (e sujeita apenas à força gravitacional da Terra), como na Fig. 13-19*a*, ou acelerando no espaço interestelar a 9,8 m/s² (e sujeita apenas à força responsável por essa aceleração), como na Fig. 13-19*b*. Nas duas situações ele teria as mesmas sensações e leria o mesmo valor para o seu peso em uma balança. Além disso, se observasse um objeto em queda o objeto teria a mesma aceleração em relação a ele nas duas situações.

FIG. 13-19 (*a*) Um físico no interior de uma cabine em repouso em relação à Terra observa um melão cair com uma aceleração $a = 9{,}8$ m/s². (*b*) Se a cabine estivesse no espaço sideral com uma aceleração de 9,8 m/s², o melão teria a mesma aceleração em relação ao físico. Não é possível para ele, através de experimentos realizados no interior da cabine, dizer qual das duas situações corresponde à realidade. Assim, por exemplo, a balança sobre a qual se encontra mostraria o mesmo peso nas duas situações.

### A Curvatura do Espaço

Até agora explicamos a gravitação como o resultado de uma força entre massas. Einstein mostrou que, em vez disso, a gravitação se deve a uma curvatura do espaço causada pelas massas. (Como será discutido em outro capítulo deste livro, espaço e tempo são interdependentes, de modo que a curvatura a que Einstein se refere é na verdade uma curvatura do *espaço-tempo*, as quatro dimensões do nosso universo.)

É difícil imaginar de que forma o espaço (mesmo vazio) pode ter uma curvatura. Uma analogia pode ajudar: suponha que estamos em órbita observando uma corrida na qual dois barcos partem do equador da Terra, separados por uma distância de 20 km, e rumam para o Sul (Fig. 13-20*a*). Para os tripulantes os barcos seguem trajetórias

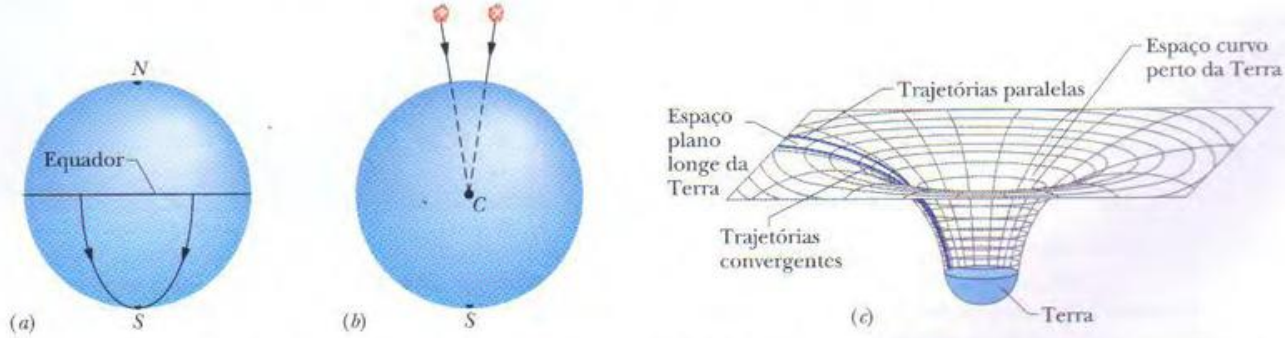



FIG. 13-20 (*a*) Dois objetos que se movem ao longo de meridianos em direção ao pólo Sul convergem por causa da curvatura da superfície da Terra. (*b*) Dois objetos em queda livre perto da superfície da Terra se movem ao longo de linhas que convergem para o centro da Terra por causa da curvatura do espaço nas proximidades da Terra. (*c*) Longe da Terra (e de outras massas), o espaço é plano e trajetórias paralelas permanecem paralelas. Perto da Terra, trajetórias paralelas convergem porque o espaço é encurvado pela massa da Terra.

planas e paralelas. Entretanto, com o passar do tempo os barcos vão se aproximando até que, ao chegarem ao pólo Sul, acabam por se chocar. Os tripulantes dos barcos podem imaginar que essa aproximação foi causada por uma força de atração entre os barcos. Observando-os do espaço, entretanto, podemos ver que os barcos se aproximaram simplesmente por causa da curvatura da superfície da Terra. Podemos constatar esse fato porque estamos observando a corrida de "fora" da superfície.

A Fig. 13-20*b* mostra uma corrida semelhante: duas maçãs separadas horizontalmente são liberadas da mesma altura acima da superfície da Terra. Embora as maçãs pareçam descrever trajetórias paralelas, na verdade se aproximam uma da outra porque ambas caem em direção ao centro da Terra. Podemos interpretar o movimento das maçãs em termos da força gravitacional exercida pela Terra sobre as maçãs. Podemos também interpretar o movimento em termos da curvatura do espaço nas vizinhanças da Terra, uma curvatura que se deve à massa da Terra. Desta vez, não podemos observar a curvatura porque não podemos nos colocar "fora" do espaço curvo, como fizemos no exemplo dos barcos. Entretanto, podemos representar a curvatura através de um desenho como o da Fig. 13-20*c*, no qual as maçãs se movem em uma superfície que se encurva em direção à Terra por causa da massa da Terra.

Quando a luz passa nas vizinhanças da Terra a trajetória da luz se encurva ligeiramente por causa da curvatura do espaço, um efeito conhecido como *lente gravitacional*. Quando a luz passa nas proximidades de uma estrutura maior, como uma galáxia ou um buraco negro de massa elevada, sua trajetória pode se encurvar ainda mais. Se existe uma estrutura desse tipo entre nós e um quasar (uma fonte de luz extremamente brilhante e extremamente distante), a luz do quasar pode se encurvar em torno da estrutura e convergir para a Terra (Fig. 13-21*a*). Assim, como a luz parece vir de direções ligeiramente diferentes no céu, vemos o mesmo quasar em todas essas direções. Em algumas situações os quasares que enxergamos se juntam para formar um gigantesco arco luminoso, que recebe o nome de *anel de Einstein* (Fig. 13-21*b*).

Devemos atribuir a gravitação à curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massas ou a uma força entre as massas? Ou devemos atribuí-la à ação de um tipo de partícula elementar chamado *gráviton*, como propõem algumas teorias físicas recentes? Simplesmente não sabemos.

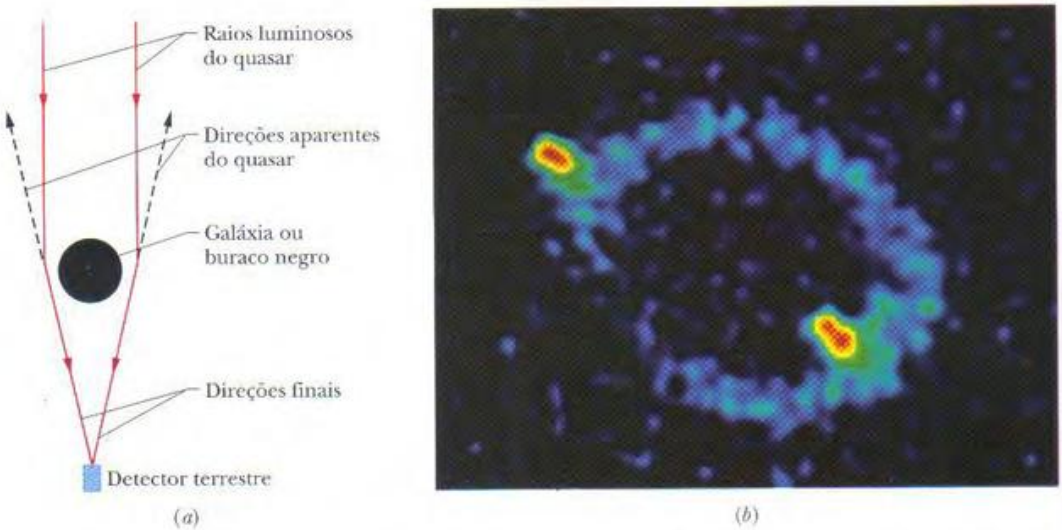



**FIG. 13-21** (*a*) A trajetória da luz de um quasar distante se encurva ao passar por uma galáxia ou buraco negro, porque a massa da galáxia ou do buraco negro encurva o espaço próximo. Quando a luz é detectada parece ter sido produzida em um ponto situado no prolongamento da trajetória final (reta tracejada). (*b*) Imagem do anel de Einstein conhecido como MG1131 + 0456 na tela do computador de um telescópio. A fonte de luz (na verdade, ondas de rádio, que são uma forma invisível de luz) está muito atrás da grande galáxia invisível responsável pela formação do anel; uma parte da fonte aparece como os dois pontos brilhantes do anel. *(Cortesia do National Radio Astronomy Observatory)*

## REVISÃO E RESUMO

**A Lei da Gravitação** Toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(lei da gravitação de Newton).} \qquad (13\text{-}1)$$

onde $m_1$ e $m_2$ são as massas das partículas, $r$ é a distância entre elas e $G$ ($= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$) é a *constante gravitacional*.

**Comportamento Gravitacional de Cascas Esféricas Uniformes** A Eq. 13-1 é válida apenas para partículas. A força gravitacional entre corpos de dimensões finitas em geral deve ser calculada somando (integrando) as forças a que estão submetidas as partículas que compõem os corpos. Entretanto, se um dos corpos é uma casca esférica uniforme ou um sólido com simetria esférica, a força gravitacional resultante que ele exerce sobre um objeto externo pode ser calculada como se toda a massa da casca ou do corpo estivesse localizada no seu centro.

**Superposição** As forças gravitacionais obedecem ao **princípio da superposição**: se n partículas interagem, a força resultante $\vec{F}_{1,\text{res}}$ que age sobre uma partícula denominada partícula 1 é a soma das forças exercidas individualmente sobre ela por todas as outras partículas:

$$\vec{F}_{1,\text{res}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}, \qquad (13\text{-}5)$$

onde a soma é uma soma vetorial das forças $\vec{F}_{1i}$ exercidas sobre a partícula 1 pelas partículas 2, 3, ..., $n$. A força gravitacional $\vec{F}_1$ exercida por um corpo de dimensões finitas sobre uma partícula é calculada dividindo o corpo em partículas de massa infinitesimal $dm$, cada uma das quais produz uma força infinitesimal $d\vec{F}$ sobre a partícula, e integrando para obter a soma dessas forças:

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} \qquad (13\text{-}6)$$

**Aceleração Gravitacional** A *aceleração gravitacional* $a_g$ de uma partícula (de massa $m$) se deve unicamente à força gravitacional que age sobre ela. Quando uma partícula está a uma distância $r$ do centro de um corpo esférico uniforme de massa $M$, o módulo $F$ da força gravitacional sobre a partícula é dado pela Eq. 13-1. Assim, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$F = ma_g, \qquad (13\text{-}10)$$

e portanto

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \qquad (13\text{-}11)$$

**Aceleração de Queda Livre e Peso** Como a massa da Terra não está distribuída uniformemente, o planeta não é perfeitamente esférico e está girando, a aceleração de queda livre $\vec{g}$ de uma partícula nas proximidades da Terra difere ligeiramente da aceleração gravitacional $\vec{a}_g$, e o peso da partícula (igual a $mg$) difere do módulo da força gravitacional que age sobre a partícula, dada pela Eq. 13-1.

**Gravitação no Interior de uma Casca Esférica** Uma casca uniforme de matéria não exerce força gravitacional sobre uma partícula localizada no seu interior. Isso significa que se uma partícula estiver localizada no interior de uma esfera maciça uniforme a uma distância $r$ do centro, a força gravitacional exercida sobre a partícula se deve apenas à massa $M_{\text{int}}$ que se encontra no interior de uma esfera de raio $r$. Esta massa é dada por

$$M_{\text{int}} = \rho\frac{4\pi r^3}{3}, \qquad (13\text{-}18)$$

onde $\rho$ é a massa específica da esfera.

**Energia Potencial Gravitacional** A energia potencial gravitacional $U(r)$ de um sistema de duas partículas de massas $M$ e $m$, separadas por uma distância $r$, é igual ao negativo do trabalho que seria realizado pela força gravitacional de uma partícula agindo sobre a outra se a distância entre elas mudasse de infinita (muito grande) até $r$. Esta energia é dada por

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(energia potencial gravitacional).} \qquad (13\text{-}21)$$

**Energia Potencial de um Sistema** Se um sistema contém mais de duas partículas, sua energia potencial gravitacional $U$ é a soma de termos que representam as energias potenciais de todos os pares. Por exemplo: para três partículas de massas $m_1$, $m_2$ e $m_3$,

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \qquad (13\text{-}22)$$

**Velocidade de Escape** Um objeto escapará da atração gravitacional de um astro de massa $M$ e raio $R$ (isto é, atingirá uma distância infinita) se a velocidade do objeto nas proximidades da superfície do astro for igual ou maior que a **velocidade de escape**, dada por

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \qquad (13\text{-}28)$$

**Leis de Kepler** É a atração gravitacional que mantém a estabilidade do sistema solar e torna possível a existência de satélites, tanto naturais como artificiais, em órbita em torno da Terra e outros planetas. Esses movimentos são governados pelas três leis do movimento planetário de Kepler, que são conseqüências diretas das leis do movimento e da gravitação de Newton:

1. ***Lei das órbitas.*** Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.
2. ***Lei das áreas.*** A reta que liga qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. (Esta lei é equivalente à lei de conservação do momento angular.)
3. ***Lei dos períodos.*** O quadrado do período $T$ de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior $a$ de sua órbita. Para órbitas circulares de raio $r$,

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3 \quad \text{(lei dos períodos).} \qquad (13\text{-}34)$$

onde $M$ é a massa do corpo atrator (o Sol, no caso do sistema solar). No caso de órbitas elípticas, o raio $r$ é substituído pelo semi-eixo maior $a$.

**Energia no Movimento Planetário** Quando um planeta ou satélite de massa $m$ se move em uma órbita circular de raio $r$, sua energia potencial $U$ e a energia cinética $K$ são dadas por

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{e} \quad K = \frac{GMm}{2r}. \qquad (13\text{-}21, 13\text{-}38)$$

A energia mecânica $E = K + U$ é, portanto,

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \qquad (13\text{-}40)$$

No caso de uma órbita elíptica de semi-eixo maior $a$,

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \qquad (13\text{-}42)$$

**Teoria da Gravitação de Einstein** Einstein mostrou que gravitação e aceleração são equivalentes. Este **princípio de equivalência** é a base de uma teoria da gravitação (a **teoria da relatividade geral**) que explica os efeitos gravitacionais em termos de uma curvatura do espaço.

## PERGUNTAS

**1** Na Fig. 13-22, uma partícula central está cercada por dois anéis circulares de partículas, de raios $r$ e $R$, com $R > r$. Todas as partículas têm a mesma massa $m$. Quais são o módulo e a orientação da força gravitacional resultante a que está submetida a partícula central?

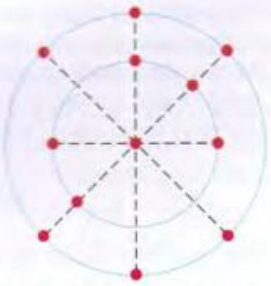


FIG. 13-22 Pergunta 1.

**2** Na Fig. 13-23, duas partículas, de massas $m$ e $2m$, estão fixas sobre um eixo. (a) Em que lugar do eixo uma terceira partícula, de massa $3m$, pode ser colocada (excluindo o infinito) para que a força gravitacional resultante exercida sobre ela pelas duas primeiras partículas seja nula: à esquerda das duas primeiras partículas, à direita, entre elas, porém mais perto da partícula de massa maior, ou entre elas, porém mais perto da partícula de massa menor? (b) A resposta muda se a terceira partícula possui uma massa de $16m$? (c) Existe algum ponto fora do eixo (excluindo o infinito) no qual a força resultante exercida sobre a terceira partícula é nula?

FIG. 13-23 Pergunta 2.

**3** A Fig. 13-24 mostra três situações que envolvem uma partícula pontual $P$ de massa $m$ e uma casca esférica com uma massa $M$ uniformemente distribuída. Os raios das cascas são dados. Ordene as situações de acordo com o módulo da força gravitacional exercida pela casca sobre a partícula $P$, em ordem decrescente.

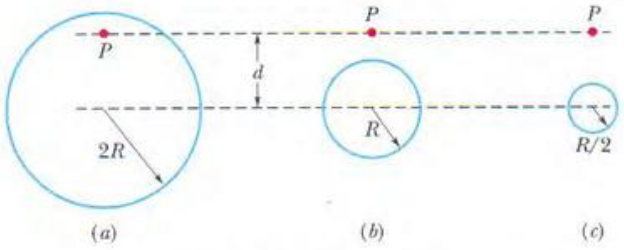



FIG. 13-24 Pergunta 3.

**4** A Fig. 13-25 mostra três arranjos de quatro partículas iguais, com três delas sobre uma circunferência com 0,20 m de raio e a quarta no centro do círculo. (a) Ordene os arranjos de acordo com o módulo da força gravitacional resultante a que a partícula central está submetida, em ordem decrescente. (b) Ordene os arranjos de acordo com a energia potencial gravitacional do sistema de quatro partículas, começando pela menos negativa.

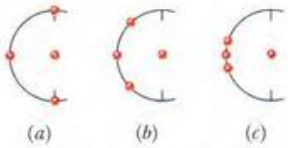



FIG. 13-25 Pergunta 4.

**5** Na Fig. 13-26, uma partícula de massa $M$ está no centro de um arranjo quadrado de outras partículas, separadas por uma distância $d$ ou $d/2$ ao longo do perímetro do quadrado. Quais são o módulo e a orientação da força gravitacional resultante a que está sujeita a partícula central?

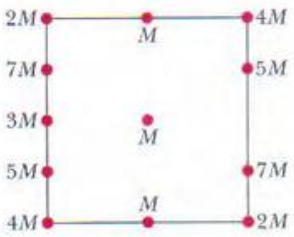



FIG. 13-26 Pergunta 5.

**6** A Fig. 13-27 mostra a aceleração gravitacional $a_g$ de quatro planetas em função da distância $r$ do centro do planeta, começando na superfície do planeta (ou seja, na distância $R_1$, $R_2$, $R_3$ ou $R_4$). Os gráficos 1 e 2 coincidem para $r \geq R_2$; os gráficos 3 e 4 coincidem para $r \geq R_4$. Ordene os quatro planetas de acordo (a) com a massa e (b) com a massa específica, em ordem decrescente.

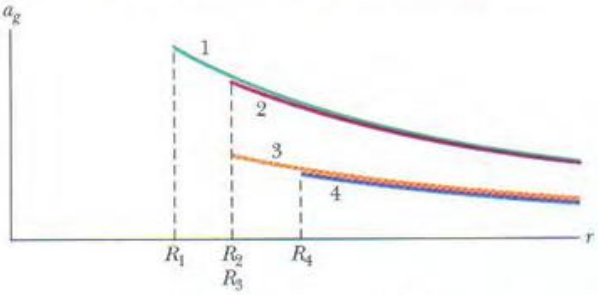



FIG. 13-27 Pergunta 6.

**7** A Fig. 13-28 mostra três partículas inicialmente mantidas fixas, com $B$ e $C$ iguais e posicionadas simetricamente em relação ao eixo $y$, a uma distância $d$ de $A$. (a) Qual é a orientação da força gravitacional resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre $A$? (b) Se a partícula $C$ é deslocada radialmente para longe da origem, a orientação de $\vec{F}_{res}$ varia? Caso a resposta seja afirmativa, como varia e qual é o limite da variação?

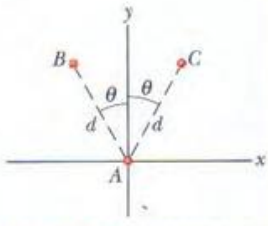



FIG. 13-28 Pergunta 7.

**8** Na Fig. 13-29, três partículas são mantidas fixas. A massa de $B$ é maior que a massa de $C$. Uma quarta partícula (partícula $D$) pode ser colocada em algum lugar de tal forma que a força gravitacional

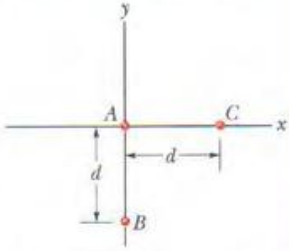



FIG. 13-29 Pergunta 8.

resultante exercida sobre a partícula $A$ pelas partículas $B$, $C$ e $D$ seja nula? Caso a resposta seja afirmativa, em que quadrante ela deve ser colocada e nas proximidades de que eixo?

**9** Ordene os quatro sistemas de partículas de mesma massa do Teste 2 de acordo com o valor absoluto da energia potencial gravitacional do sistema, em ordem decrescente.

**10** Na Fig. 13-30, uma partícula de massa $m$ (não mostrada) pode ser deslocada desde uma distância infinita até uma de três posições possíveis, $a$, $b$ e $c$. Duas outras partículas, de massas $m$ e $2m$, são mantidas fixas. Ordene as três posições possíveis de acordo com trabalho realizado pela força gravitacional resultante sobre a partícula móvel durante o deslocamento, em ordem decrescente.

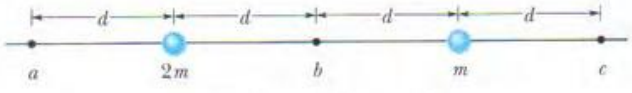



FIG. 13-30 Pergunta 10.

**11** A Fig. 13-31 mostra três planetas esféricos uniformes que têm a mesma massa e o mesmo volume. Os períodos de rotação $T$ dos planetas são dados e dois pontos da superfície são identificados por letras em cada planeta, um no equador e outro no pólo norte. Ordene os pontos de acordo com o valor local da aceleração de queda livre $g$, em ordem decrescente.

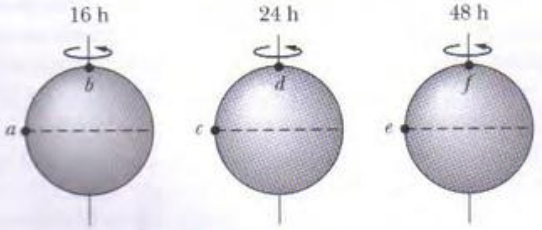



FIG. 13-31 Pergunta 11.

**12** A Fig. 13-32 mostra seis trajetórias possíveis para um foguete em órbita em torno de um astro se deslocar do ponto $a$ para o ponto $b$. Ordene as trajetórias de acordo (a) com a variação da energia potencial gravitacional do sistema foguete-astro e (b) com o trabalho total realizado sobre o foguete pela força gravitacional do astro, em ordem decrescente.

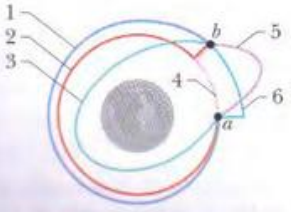



FIG. 13-32 Pergunta 12.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 13-2 A Lei da Gravitação de Newton

•**1** Qual deve ser a distância entre uma partícula de 5,2 kg e uma partícula de 2,4 kg para que a atração gravitacional entre elas tenha um módulo de $2,3 \times 10^{-12}$ N?

•**2** Tanto o Sol quanto a Terra exercem uma força gravitacional sobre a Lua. Qual é a razão $F_{Sol}/F_{Terra}$ entre as duas forças? (A distância média entre o Sol e a Lua é igual à distância média entre o Sol e a Terra.)

•**3** Uma massa $M$ é dividida em duas partes, $m$ e $M - m$, que são em seguida separadas por uma certa distância. Qual é a razão $m/M$ que maximiza o módulo da força gravitacional entre as partes?

•**4** *Influência da Lua.* Algumas pessoas acreditam que suas atividades são controladas pela Lua. Se a Lua estava do outro lado da Terra, ao longo de uma reta que passava por você e pelo centro da Terra, e passa para uma posição diametralmente oposta, verticalmente acima da sua cabeça, qual é a variação percentual (a) da atração gravitacional que a Lua exerce sobre você e (b) o seu peso? Suponha que a distância Terra-Lua (de centro a centro) é $3,82 \times 10^8$ m e que o raio da Terra é $6,37 \times 10^6$ m.

### seção 13-3 Gravitação e o Princípio da Superposição

•**5** *Uma dimensão.* Na Fig. 13-33, duas partículas pontuais são mantidas fixas sobre um eixo $x$, separadas por uma distância $d$. A partícula A tem massa $m_A$ e a partícula B tem massa $3,00m_A$. Uma terceira partícula $C$, de massa $75,0m_A$, deve ser colocada sobre o eixo $x$, nas proximidades das partículas $A$ e $B$. Em termos da distância $d$, qual deve ser a coordenada $x$ da partícula $C$ para que a força gravitacional resultante a que está submetida a partícula $A$ seja zero?

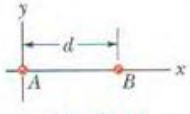



FIG. 13-33 Problema 5.

•**6** Na Fig. 13-34, três esferas de 5,00 kg estão localizadas a distâncias $d_1 = 0,300$ m e $d_2 = 0,400$ m. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo $x$ positivo) da força gravitacional resultante a que está sujeita a esfera $B$?

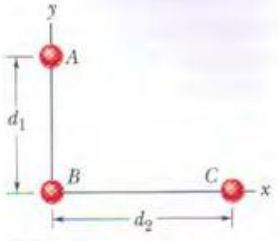



FIG. 13-34 Problema 6.

•**7** A que distância da Terra deve estar uma sonda espacial ao longo da reta que liga nosso planeta ao Sol para que a atração gravitacional do Sol seja igual à atração da Terra?

•**8** Na Fig. 13-35, um quadrado com 20,0 cm de lado é formado por quatro esferas de massas $m_1 = 5,00$ g, $m_2 = 3,00$ g, $m_3 = 1,00$ g e $m_4 = 5,00$ g. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional resultante exercida pelas esferas sobre uma esfera central de massa $m_5 = 2,50$ g?

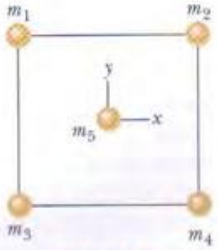



FIG. 13-35 Problema 8.

•**9** *Miniburacos negros.* Talvez existam miniburacos negros no universo, produzidos logo após o big bang. Se um desses objetos, com uma massa de $1 \times 10^{11}$ kg (e um raio de apenas $1 \times 10^{-16}$ m) se aproximasse da Terra, a que distância da sua cabeça a força gravitacional do miniburaco seria igual à da Terra?

••**10** Na Fig. 13-36*a*, a partícula $A$ é mantida fixa em $x = -0,20$ m sobre o eixo $x$ e a partícula $B$, com uma massa de 1,0 kg, é man-

tida fixa na origem. Uma partícula $C$ (não mostrada) pode ser deslocada ao longo do eixo $x$, entre a partícula $B$ e $x = \infty$. A Fig. 13-36*b* mostra a componente $x$, $F_{res,x}$, da força gravitacional resultante exercida pelas partículas $A$ e $C$ sobre a partícula $B$ em função da posição $x$ da partícula $C$. O gráfico, na verdade, se estende indefinidamente para a direita, tendendo assintoticamente para $-4{,}17 \times 10^{-10}$ N quando $x \to \infty$. Qual é a massa (a) da partícula $A$ e (b) da partícula $C$?

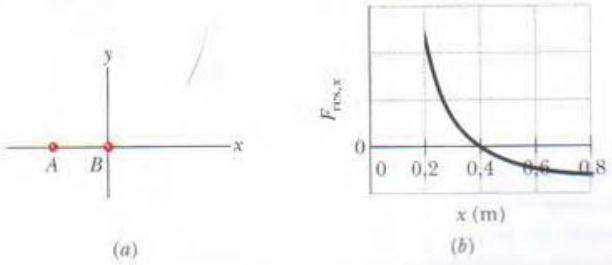



FIG. 13-36 Problema 10.

••11 Como mostra a Fig. 13-37, duas esferas de massa $m$ e uma terceira esfera de massa $M$ formam um triângulo eqüilátero, e uma quarta esfera de massa $m_4$ ocupa o centro do triângulo. A força gravitacional resultante sobre essa esfera central é nula. (a) Qual é o valor de $M$ em termos de $m$? (b) Se dobramos o valor de $m_4$, qual é o novo módulo da força gravitacional resultante a que está submetida a esfera central?

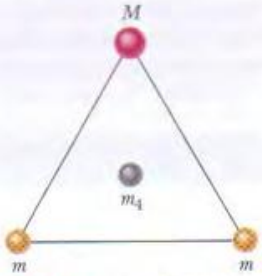



FIG. 13-37 Problema 11.

••12 Três partículas pontuais são mantidas fixas em um plano $xy$. Duas delas, a partícula $A$ de massa 6,00 g e a partícula $B$ de massa 12,0 g, são mostradas na Fig. 13-38, separadas por uma distância $d_{AB} = 0{,}500$ m; $\theta = 30°$. A partícula $C$, cuja massa é 8,00 g, não é mostrada. A força gravitacional resultante que as partículas B e C exercem sobre a partícula $A$ tem um módulo de $2{,}77 \times 10^{-14}$ N e faz um ângulo de $-163{,}8°$ com o semi-eixo $x$ positivo. Qual é (a) a coordenada $x$ e (b) a coordenada $y$ da partícula $C$?

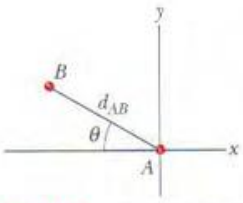



FIG. 13-38 Problema 12.

••13 A Fig. 13-39 mostra uma cavidade esférica no interior de uma esfera de chumbo de raio $R = 4{,}00$ cm; a superfície da cavidade passa pelo centro da esfera e "toca" o lado direito da esfera. A massa da esfera, antes de a cavidade ser aberta, era $M = 2{,}95$ kg. Com que força gravitacional a esfera de chumbo com a cavidade atrai uma pequena esfera de massa $m = 0{,}431$ kg que se encontra a uma distância $d = 9{,}00$ cm do centro da esfera de chumbo, sobre a reta que liga os centros das esferas e da cavidade?

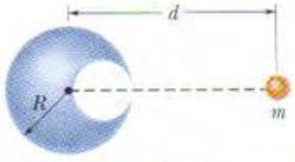



FIG. 13-39 Problema 13.

••14 *Duas dimensões.* Na Fig. 13-40, três partículas pontuais são mantidas fixas em um plano $xy$. A partícula $A$ tem massa $m_A$, a partícula $B$ tem massa $2{,}00m_A$ e a partícula $C$ tem massa $3{,}00m_A$. Uma quarta partícula, de massa $4{,}00m_A$, pode ser colocada nas proximidades das outras três partículas. Em termos da distância $d$, em que valor da coordenada (a) $x$ e (b) $y$ a partícula $D$ deve ser colocada para que a força gravitacional resultante exercida pelas partículas $B$, $C$ e $D$ sobre a partícula $A$ seja nula?

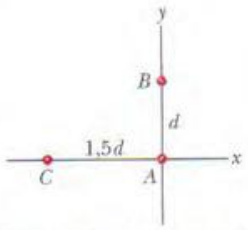



FIG. 13-40 Problema 14.

•••15 *Três dimensões.* Três partículas pontuais são mantidas fixas em um sistema de coordenadas $xyz$. A partícula $A$, na origem, tem massa $m_A$. A partícula $B$, nas coordenadas $(2{,}00d; 1{,}00d; 2{,}00d)$, tem massa $2{,}00m_A$, e a partícula $C$, nas coordenadas $(-1{,}00d; 2{,}00d; -3{,}00d)$ tem massa $3{,}00m_A$. Uma quarta partícula $D$, de massa $4{,}00m_A$, pode ser colocada nas proximidades das outras partículas. Em termos da distância $d$, em que coordenada (a) $x$, (b) $y$ e (c) $z$ a partícula $D$ deve ser colocada para que a força gravitacional resultante exercida pelas partículas $B$, $C$ e $D$ sobre a partícula $A$ seja nula?

•••16 Na Fig. 13-41, uma partícula de massa $m_1 = 0{,}67$ kg está a uma distância $d = 23$ cm de uma das extremidades de uma barra uniforme de comprimento $L = 3{,}0$ m e massa $M = 5{,}0$ kg. Qual é o módulo da força gravitacional $\vec{F}$ que a barra exerce sobre a partícula?

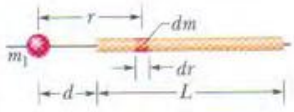



FIG. 13-41 Problema 16.

## seção 13-4 A Gravitação nas Proximidades da Superfície da Terra

•17 A que altitude acima da superfície da Terra a aceleração gravitacional é 4,9 m/s²?

•18 *Edifício de uma milha.* Em 1956, Frank Lloyd Wright propôs a construção de um edifício com uma milha de altura em Chicago. Suponha que o edifício tivesse sido construído. Desprezando a rotação da Terra, determine a variação do seu peso se você subisse de elevador do andar térreo, onde você pesa 600 N, até o alto do edifício.

•19 (a) Quanto pesaria um objeto na superfície da Lua, se pesa 100 N na superfície da Terra? (b) A quantos raios terrestres este mesmo objeto deve estar do centro da Terra para ter o mesmo peso que na superfície da Lua?

•20 *Atração da montanha.* Uma grande montanha praticamente não afeta a direção "vertical" indicada por uma linha de prumo. Suponha que a montanha possa ser modelada por uma esfera de raio $R = 2{,}00$ km e massa específica (massa por unidade de volume) $2{,}6 \times 10^3$ kg/m³. Suponha também que uma linha de prumo de 0,50 m de comprimento seja pendurada a uma distância $3R$ do centro da esfera e que a esfera atraia horizontalmente o peso da linha de prumo. Qual é o deslocamento do peso da linha de prumo em direção à esfera?

••21 Um certo planeta é modulado por um núcleo de raio $R$ e massa $M$ cercado por uma casca de raio interno $R$, raio externo $2R$ e massa $4M$. Se $M = 4{,}1 \times 10^{24}$ kg e $R = 6{,}0 \times 10^6$ m, qual é a aceleração gravitacional de uma partícula nos pontos a uma distância (a) $R$ e (b) $3R$ do centro do planeta?

••22 O raio $R_b$ e a massa $M_b$ de um buraco negro estão relacionadas através da equação $R_b = 2GM_b/c^2$, onde $c$ é a velocidade da luz. Suponha que a aceleração gravitacional $a_g$ de um objeto a uma distância $r_f = 1{,}001R_b$ do centro do buraco negro seja dada pela Eq. 13-11 (o que é verdade para buracos negros grandes). (a) Determine o valor de $a_g$ a uma distância $r_f$ em termos de $M$.

(b) O valor de $a_g$ à distância $r_f$ aumenta ou diminui quando $M_b$ aumenta? (c) Quanto vale $a_g$ a distância $r_f$ para um buraco negro muito grande cuja massa é $1{,}55 \times 10^{12}$ vezes a massa solar de $1{,}99 \times 10^{30}$ kg? (d) Se a astronauta do Exemplo 13-3 está à distância $r_f$ com os pés voltados para o buraco negro, qual é a diferença entre a aceleração gravitacional da sua cabeça e dos seus pés? (e) A astronauta sente algum desconforto?

••23 Acredita-se que algumas estrelas de nêutrons (estrelas extremamente densas) estão girando a cerca de 1 rev/s. Se uma dessas estrelas tem um raio de 20 km, qual deve ser, no mínimo, a sua massa para que uma partícula na superfície da estrela permaneça no lugar apesar da rotação?

## seção 13-5 A Gravitação no Interior da Terra

•24 A Fig. 13-42 mostra duas cascas esféricas concêntricas uniformes de massas $M_1$ e $M_2$. Determine o módulo da força gravitacional a que está sujeita uma partícula de massa $m$ situada a uma distância (a) $a$, (b) $b$ e (c) $c$ do centro comum das cascas.

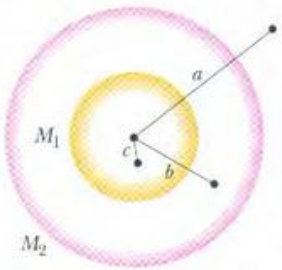



FIG. 13-42 Problema 24.

••25 A Fig. 13-43 mostra, fora de escala, um corte transversal da Terra. O interior da Terra pode ser dividido em três regiões: a *crosta*, o *manto* e o *núcleo*. A figura mostra as dimensões dessas três regiões e as respectivas massas. A Terra tem uma massa total de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg e um raio de 6370 km. Despreze a rotação da Terra e suponha que ela é esférica. (a) Calcule $a_g$ na superfície. (b) Suponha que seja feita uma perfuração até a interface da crosta com o manto, a uma profundidade de 25,0 km; qual será o valor de $a_g$ no fundo do poço? (c) Suponha que a Terra fosse uma esfera uniforme com a mesma massa total e o mesmo volume. Qual seria o valor de $a_g$ a uma profundidade de 25,0 km? (Medidas precisas de $a_g$ ajudam a revelar a estrutura interna da Terra, embora os resultados possam ser mascarados por variações locais da distribuição de massa.)

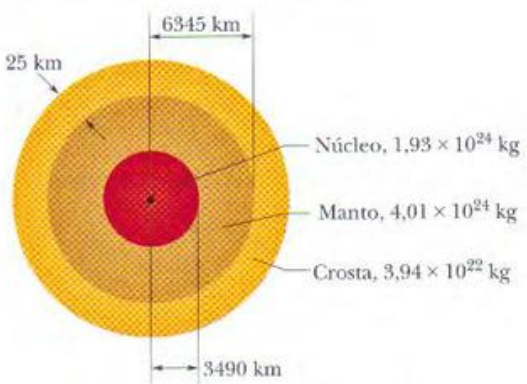



FIG. 13-43 Problema 25.

••26 Suponha que um planeta é uma esfera uniforme de raio $R$ que (de alguma forma) possui um túnel radial estreito que passa pelo seu centro (Fig. 13-8). Suponha também que seja possível posicionar uma maçã em qualquer lugar do túnel ou do lado de fora da esfera. Seja $F_R$ o módulo da força gravitacional experimentada pela maçã quando está na superfície do planeta. A que distância da superfície está o ponto no qual o módulo da força gravitacional sobre a maçã é $\frac{1}{2}F_R$ se a maçã é deslocada (a) para longe do planeta e (b) para dentro do túnel?

••27 Uma esfera maciça uniforme tem uma massa de $1{,}0 \times 10^4$ kg e um raio de 1,0 m. Qual é o módulo da força gravitacional exercida pela esfera sobre uma partícula de massa $m$ localizada a uma distância de (a) 1,5 m e (b) 0,50 m do centro da esfera? Escreva uma expressão geral para o módulo da força gravitacional sobre a partícula a uma distância $r \leq 1{,}0$ m do centro da esfera.

••28 Considere um pulsar, uma estrela de densidade extremamente elevada, com uma massa $M$ igual à do Sol ($1{,}98 \times 10^{30}$ kg), um raio $R$ de apenas 12 km e um período de rotação $T$ de 0,041 s. Qual é a diferença percentual entre a aceleração de queda livre $g$ e a aceleração gravitacional $a_g$ no equador dessa estrela esférica?

## seção 13-6 Energia Potencial Gravitacional

•29 Os diâmetros médios de Marte e da Terra são $6{,}9 \times 10^3$ km e $1{,}3 \times 10^4$ km, respectivamente. A massa de Marte é 0,11 vez a massa da Terra. (a) Qual é a razão entre a massa específica média (massa por unidade de volume) de Marte e a da Terra? (b) Qual é o valor da aceleração gravitacional em Marte? (c) Qual é a velocidade de escape em Marte?

•30 (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas do Problema 1? Se você triplica a distância entre as partículas, qual é o trabalho realizado (b) pela força gravitacional entre as partículas e (c) por você?

•31 Que múltiplo da energia necessária para se escapar da Terra corresponde à energia necessária para escapar (a) da Lua e (b) de Júpiter?

•32 A Fig. 13-44 mostra a energia potencial $U(r)$ de um projétil em função da distância da superfície de um planeta de raio $R_s$. Se o projétil é lançado verticalmente para cima com uma energia mecânica de $-2{,}0 \times 10^9$ J, quais são (a) sua energia cinética a uma distância $r = 1{,}25R_s$ e (b) seu *ponto de retorno* (veja a Seção 8-6) em termos de $R_s$?

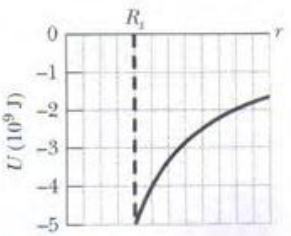



FIG. 13-44 Problemas 32 e 33.

•33 A Fig. 13-44 mostra a função energia potencial $U(r)$ de um projétil em função da distância da superfície de um planeta de raio $R_s$. Qual é a menor energia cinética necessária para que um projétil lançado da superfície "escape" do planeta?

•34 No Problema 3, para que razão $m/M$ a energia potencial gravitacional do sistema é a menor possível?

••35 As três esferas da Fig. 13-45, de massas $m_A = 80$ g, $m_B = 10$ g e $m_C = 20$ g, têm seus centros sobre uma mesma reta, com $L = 12$ cm e $d = 4{,}0$ cm. Você desloca a esfera $B$ ao longo da reta até que sua distância centro a centro da esfera $C$ seja $d = 4{,}0$ cm. Qual é o trabalho realizado sobre a esfera $B$ (a) por você e (b) pela força gravitacional das esferas $A$ e $C$?

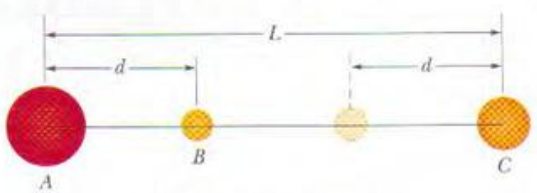



FIG. 13-45 Problema 35.

••36 Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra. Despreze a rotação da Terra. Em múltiplos

do raio da Terra $R_T$, que distância o projétil atinge se (a) sua velocidade inicial é 0,500 da velocidade de escape da Terra e (b) sua energia cinética inicial é 0,500 da energia cinética necessária para escapar da Terra? (c) Qual é a menor energia mecânica inicial necessária para que o projétil escape da Terra?

••37 (a) Qual é a velocidade de escape de um asteróide esférico cujo raio é 500 km e cuja aceleração gravitacional na superfície é 3,0 m/s$^2$? (b) Que distância da superfície uma partícula atingirá se deixar a superfície do asteróide com uma velocidade vertical de 1000 m/s? (c) Com que velocidade um objeto se chocaria com o asteróide se fosse liberado sem velocidade inicial 1000 km acima da superfície?

••38 Zero, um planeta hipotético, tem uma massa de $5,0 \times 10^{23}$ kg, um raio de $3,0 \times 10^6$ m e nenhuma atmosfera. Uma sonda espacial de 10 kg deve ser lançada verticalmente a partir da superfície. (a) Se a sonda é lançada com uma energia inicial de $5,0 \times 10^7$ J, qual é sua energia cinética quando está a $4,0 \times 10^6$ m do centro de Zero? (b) Com que energia cinética a sonda deve ser lançada da superfície de Zero para atingir uma distância máxima de $8,0 \times 10^6$ m do centro de Zero?

••39 Duas estrelas de nêutrons estão separadas por uma distância de $1,0 \times 10^{10}$ m. Ambas têm uma massa de $1,0 \times 10^{30}$ kg e um raio de $1,0 \times 10^5$ m. Elas se encontram inicialmente em repouso relativo. Com que velocidades estarão se movendo, em relação a este referencial de repouso, (a) quando a distância entre elas for metade do valor inicial e (b) quando estiverem na iminência de colidir?

••40 No espaço sideral, a esfera $A$, com 20 kg de massa, está na origem de um eixo $x$, e a esfera $B$, com 10 kg de massa, está sobre o mesmo eixo em $x = 0,80$ m. A esfera $B$ é liberada a partir do repouso, enquanto a esfera $A$ é mantida fixa na origem. (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema das duas esferas no momento em que $B$ é liberada? (b) Qual é a energia cinética de $B$ após ter se deslocado 0,20 m em direção a $A$?

••41 A Fig. 13-46 mostra quatro partículas, todas de massa 20,0 g, que formam um quadrado de lado $d = 0,600$ m. Se $d$ é reduzido para 0,200 m, qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema das quatro partículas?

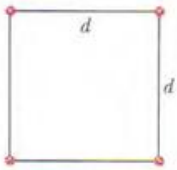



FIG. 13-46 Problema 41.

••42 A Fig. 13-47*a* mostra uma partícula $A$ que pode ser deslocada ao longo de um eixo $y$ desde uma distância infinita até a origem. A origem está localizada no ponto médio entre as partículas $B$ e $C$, que têm massas iguais, e o eixo $y$ é perpendicular à reta que liga essas duas partículas. A distância $D$ é 0,3057 m. A Fig. 13-47*b* mostra a energia potencial $U$ do sistema de três partículas em função da posição da partícula $A$ no eixo $y$. A curva na verdade se estende indefinidamente para a direita e tende assintoticamente para um valor de $-2,7 \times 10^{-11}$ J quando $y \to \infty$. Qual é a massa (a) das partículas $B$ e $C$ e (b) da partícula $A$?

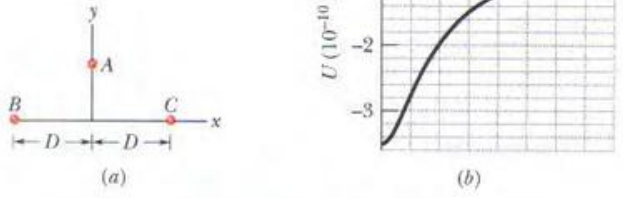



FIG. 13-47 Problema 42.

## seção 13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler

•43 Fobos, um satélite de Marte, se move em uma órbita aproximadamente circular com $9,4 \times 10^6$ m de raio, com um período de 7 h 39 min. Calcule a massa de Marte a partir dessas informações.

•44 A primeira colisão conhecida entre fragmentos espaciais e um satélite artificial em operação ocorreu em 1996: a uma altitude de 700 km, um satélite-espião francês com um ano de uso foi atingido por um pedaço de um foguete Ariane que estava em órbita há 10 anos. Um estabilizador do satélite foi danificado e ele começou a girar sem controle. Imediatamente antes da colisão e em quilômetros por hora, qual era a velocidade do pedaço de foguete em relação ao satélite se ambos estavam em órbitas circulares e a colisão foi (a) frontal e (b) ao longo de trajetórias mutuamente perpendiculares?

•45 O Sol, que está a $2,2 \times 10^{20}$ m do centro da Via Láctea, completa uma revolução em torno desse centro a cada $2,5 \times 10^8$ anos. Supondo que todas as estrelas da galáxia possuem uma massa igual à massa do Sol, $2,0 \times 10^{30}$ kg, que as estrelas estão distribuídas uniformemente em uma esfera em torno do centro da galáxia e que o Sol se encontra na borda dessa esfera, estime o número de estrelas da galáxia.

•46 A distância média de Marte ao Sol é 1,52 vez a distância da Terra ao Sol. Use a lei dos períodos de Kepler para calcular o número de anos necessários para Marte completar uma revolução em torno do Sol; compare a resposta com o valor que aparece no Apêndice C.

•47 Um satélite é colocado em uma órbita elíptica, cujo ponto mais distante está a 360 km da superfície da Terra e cujo ponto mais próximo está a 180 km da superfície. Calcule (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade da órbita.

•48 Um satélite é colocado em órbita em torno da Terra com um raio igual à metade do raio da órbita da Lua. Qual é o período de revolução do satélite em meses lunares? (Um mês lunar é o período de revolução da Lua.)

•49 (a) Que velocidade linear um satélite da Terra deve ter para estar em órbita circular 160 km acima da superfície da Terra? (b) Qual é o período de revolução?

•50 O centro do Sol está em um dos focos da órbita da Terra. A que distância desse foco se encontra o outro foco (a) em metros e (b) em termos do raio solar, $6,96 \times 10^8$ m? A excentricidade da órbita da Terra é 0,0167 e o semi-eixo maior é $1,50 \times 10^{11}$ m.

•51 Um cometa que foi visto em abril de 574 por astrônomos chineses, em um dia conhecido como Woo Woo, foi avistado novamente em maio de 1994. Suponha que o intervalo de tempo entre as observações seja o período do cometa do dia Woo Woo e tome a sua excentricidade como sendo 0,11. Quais são (a) o semi-eixo maior da órbita do cometa e (b) a sua maior distância ao Sol em termos do raio médio da órbita de Plutão, $R_P$?

•52 Um satélite em órbita equatorial circular permanece acima do mesmo ponto do equador da Terra ao longo de toda a órbita. Qual é a altitude da órbita (que recebe o nome de *órbita geoestacionária*)?

••53 Em 1610 Galileu usou seu telescópio para descobrir quatro satélites de Júpiter, cujos raios orbitais médios $a$ e os períodos $T$ aparecem na tabela a seguir.

| Nome | $a$ ($10^8$ m) | $T$ (dias) |
|---|---|---|
| Io | 4,22 | 1,77 |
| Europa | 6,71 | 3,55 |
| Ganimedes | 10,7 | 7,16 |
| Calisto | 18,8 | 16,7 |

(a) Plote log $a$ (eixo $y$) em função de $T$ (eixo $x$) e mostre que o resultado é uma linha reta. (b) Meça a inclinação da reta e compare-a com o valor previsto pela terceira lei de Kepler. (c) Determine a massa de Júpiter a partir da interseção da reta com o eixo $y$.

••54 Em 1993 a sonda Galileu enviou à Terra uma imagem (Fig. 13-48) do asteróide 243 Ida e de um minúsculo satélite (hoje conhecido como Dactyl), o primeiro exemplo confirmado de um sistema asteróide-satélite. Na imagem, o satélite, que tem 1,5 km de largura, está a 100 km do centro do asteróide, que possui 55 km de comprimento. A forma da órbita do satélite não é conhecida com precisão; suponha que seja circular, com um período de 27 h. (a) Qual é a massa do asteróide? (b) O volume do asteróide, medido a partir das imagens da Galileu, é 14.100 km$^3$. Qual é a massa específica (massa por unidade de volume) do asteróide?

FIG. 13-48 Problema 54. Uma pequena lua (à direita) gira em torno do asteróide 243 Ida. *(Cortesia da NASA)*

••55 Em um certo sistema estelar binário, as duas estrelas têm uma massa igual à do Sol e giram em torno do centro de massa. A distância entre as estrelas é igual à distância entre a Terra e o Sol. Qual é o período de revolução das estrelas em anos?

••56 *Procurando um buraco negro.* As observações da luz de uma certa estrela indicam que ela faz parte de um sistema binário. Essa estrela visível tem uma velocidade orbital $v = 270$ km/s, um período orbital $T = 1{,}70$ dia e uma massa aproximada $m_1 = 6M_S$, onde $M_S$ é a massa do Sol, $1{,}99 \times 10^{30}$ kg. Suponha que as órbitas dessa estrela visível e da companheira, que é escura e invisível, são circulares (Fig. 13-49). Qual é a massa $m_2$ da estrela escura, em unidades de $M_S$?

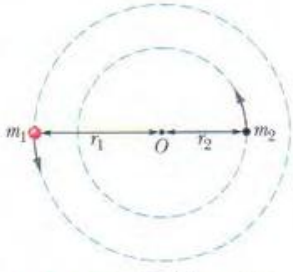



FIG. 13-49 Problema 56.

••57 Um satélite de 20 kg está em uma órbita circular com um período de 2,4 h e um raio de $8{,}0 \times 10^6$ m em torno de um planeta de massa desconhecida. Se o módulo da aceleração gravitacional na superfície do planeta é 8,0 m/s$^2$, qual é o raio do planeta?

•••58 Às vezes, a presença de um planeta invisível associado a uma estrela distante pode ser deduzida a partir da observação do movimento da estrela. Enquanto a estrela e o planeta giram em torno do centro de massa do sistema estrela-planeta, a estrela se aproxima e se afasta de nós com a chamada *velocidade ao longo da linha de visada*, um movimento que pode ser detectado. A Fig. 13-50 mostra o gráfico da velocidade ao longo da linha de visada em função do tempo para a estrela 14 Herculis. Estima-se que a massa da estrela seja 0,90 da massa do Sol. Supondo que apenas um planeta gira em torno da estrela e que a Terra está no plano da órbita do planeta, determine (a) a massa do planeta em unidades de $m_J$, a massa de Júpiter e (b) o raio da órbita do planeta em unidades de $r_T$, o raio da órbita da Terra.

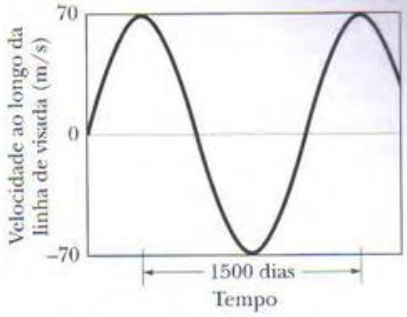



FIG. 13-50 Problema 58.

•••59 Três estrelas iguais de massa $M$ formam um triângulo eqüilátero que gira em torno do centro enquanto as estrelas se movem ao longo de uma mesma circunferência. O lado do triângulo possui um comprimento $L$. Qual é a velocidade das estrelas?

## seção 13-8 Satélites: Órbitas e Energias

•60 Dois satélites, $A$ e $B$, ambos de massa $m$, estão em órbita circular em torno da Terra. O satélite $A$ orbita a uma altitude de 6370 km e o satélite $B$ a uma altitude de 19.110 km. O raio da Terra é 6370 km. (a) Qual é a razão entre a energia potencial do satélite $B$ e a energia potencial do satélite $A$? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do satélite $B$ e a energia cinética do satélite $A$? (c) Qual dos dois satélites possui maior energia total, se ambos têm uma massa de 14,6 kg? (d) Qual é a diferença entre as energias totais dos dois satélites?

•61 Um asteróide, cuja massa é $2{,}0 \times 10^{-4}$ vezes a massa da Terra, gira em uma órbita circular em torno do Sol a uma distância que é o dobro da distância da Terra ao Sol. (a) Calcule o período de revolução do asteróide em anos. (b) Qual é a razão entre a energia cinética do asteróide e a energia cinética da Terra?

•62 Um satélite gira em torno de um planeta de massa desconhecida em uma circunferência com $2{,}0 \times 10^7$ m de raio. O módulo da força gravitacional exercida pelo planeta sobre o satélite é $F = 80$ N. (a) Qual é a energia cinética do satélite? (b) Qual seria o módulo $F$ se o raio da órbita aumentasse para $3{,}0 \times 10^7$ m?

•63 (a) A que altitude acima da superfície da Terra a energia necessária para fazer um satélite subir até essa altitude é igual à energia cinética necessária para que o satélite se mantenha em órbita circular nessa altitude? (b) Em altitudes maiores, qual é maior, a energia para fazer o satélite subir ou a energia cinética para que ele se mantenha em órbita circular?

•64 Na Fig. 13-51, dois satélites, $A$ e $B$, ambos de massa $m = 125$ kg, ocupam a mesma órbita circular de raio $r = 7{,}87 \times 10^6$ m em torno da Terra e se movem em sentidos opostos, estando, por-

UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

tanto, em rota de colisão. (a) Determine a energia mecânica total $E_A + E_B$ do sistema dos *dois satélites e a Terra* antes da colisão. (b) Se a colisão é perfeitamente inelástica, de modo que os destroços se tornam um único bloco (de massa $= 2m$), determine a energia mecânica total imediatamente após a colisão. (c) Imediatamente após a colisão, os destroços caem em direção ao centro da Terra ou continuam em órbita da Terra?

FIG. 13-51 Problema 64.

••65 Um satélite está em uma órbita circular de raio $r$ em torno da Terra. A área $A$ delimitada pela órbita é proporcional a $r^2$, já que $A = \pi r^2$. Determine a forma de variação com $r$ das seguintes propriedades do satélite: (a) o período, (b) a energia cinética, (c) o momento angular e (d) a velocidade escalar.

••66 Uma forma de atacar um satélite em órbita da Terra é disparar uma saraivada de projéteis na mesma órbita do satélite, no sentido oposto. Suponha que um satélite em órbita circular, 500 km acima da superfície da Terra, colida com um projétil de massa 4,0 g. (a) Qual é a energia cinética do projétil no referencial do satélite imediatamente antes da colisão? (b) Qual é a razão entre a energia cinética calculada no item (a) e a energia cinética de uma bala de 4,0 g disparada por um rifle moderno das forças armadas, ao deixar o cano com uma velocidade de 950 m/s?

•••67 Quais são (a) a velocidade e (b) o período de um satélite de 220 kg em uma órbita aproximadamente circular 640 km acima da superfície da Terra? Suponha que o satélite perde energia mecânica a uma taxa média de $1,4 \times 10^5$ J por revolução orbital. Usando a aproximação razoável de que a órbita do satélite se torna uma "circunferência cujo raio diminui lentamente", determine (c) a altitude, (d) a velocidade e (e) o período do satélite ao final da revolução número 1500. (f) Qual é o módulo da força retardadora média que atua sobre o satélite? O momento angular em relação à Terra é conservado (g) para o satélite e (h) para o sistema satélite-Terra (supondo que o sistema é isolado)?

•••68 Duas pequenas espaçonaves, ambas de massa $m = 2000$ kg, estão na órbita circular em torno da Terra na Fig. 13-52, a uma altitude $h$ de 400 km. Kirk, o comandante de uma das naves, chega a qualquer ponto fixo da órbita 90 s antes de Picard, o comandante da segunda nave. Determine (a) o período $T_0$ e (b) a velocidade $v_0$ das naves. No ponto $P$ da Fig. 13-52 Picard dispara um retrofoguete instantâneo na direção tangencial à órbita, *reduzindo* a velocidade da nave em 1,00%. Depois desse disparo a nave assume a órbita elíptica representada na figura por uma linha tracejada. Determine (c) a energia cinética e (d) a energia potencial da nave imediatamente após o disparo. Na nova órbita elíptica de Picard, quais são (e) a energia total $E$, (f) o semi-eixo maior $a$ e (g) o período orbital $T$? (h) Quantos segundos Picard chega ao ponto $P$ antes de Kirk?

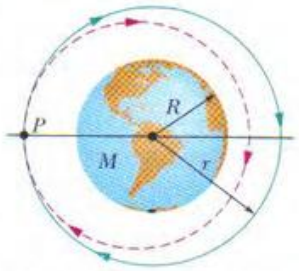



FIG. 13-52 Problema 68.

## seção 13-9 Einstein e a Gravitação

•69 Na Fig. 13-19*b*, a leitura da balança usada pelo físico de 60 kg é 220 N. Quanto tempo o melão leva para chegar ao chão se o físico deixá-lo cair (da velocidade inicial em relação a si próprio) de um ponto 2,1 m acima do piso?

## Problemas Adicionais

70 O visitante misterioso que aparece na encantadora história *O Pequeno Príncipe* teria vindo de um planeta que "era pouco maior do que uma casa!" Suponha que a massa por unidade de volume do planeta seja aproximadamente igual à da Terra e que a rotação do planeta seja desprezível. Determine os valores aproximados (a) da aceleração de queda livre na superfície do planeta e (b) da velocidade de escape do planeta.

71 A Fig. 13-53 é um gráfico da energia cinética $K$ de um asteróide em função da distância $r$ do centro da Terra, quando o asteróide cai em linha reta em direção a esse centro. (a) Qual é a massa (aproximada) do asteróide? (b) Qual é a velocidade do asteróide para $r = 1,945 \times 10^7$ m?

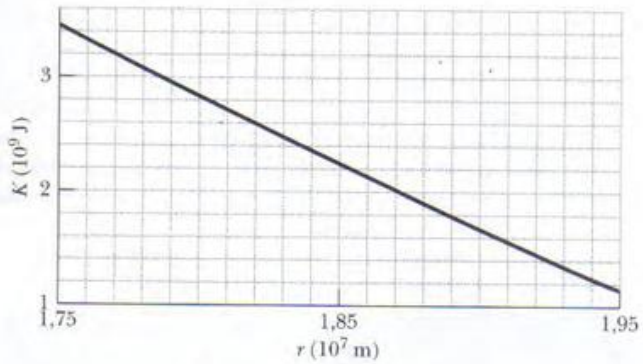



FIG. 13-53 Problema 71.

72 O raio $R_b$ de um buraco negro é o raio de uma superfície esférica chamada horizonte de eventos. Nenhuma informação a respeito da região situada no interior do horizonte de eventos pode chegar ao mundo exterior. De acordo com a teoria da relatividade geral de Einstein, $R_b = 2GM/c^2$, onde $M$ é a massa do buraco negro e $c$ é a velocidade da luz.

Suponha que você deseje estudar um buraco negro a uma distância de $50R_b$. Para evitar efeitos desagradáveis você não quer que a diferença entre a aceleração gravitacional dos seus pés e a da sua cabeça exceda 10 m/s² quando você está com os pés (ou a cabeça) na direção do buraco negro. (a) Qual é o limite tolerável da massa do buraco negro, em unidades da massa $M_S$ do Sol? (Você precisa conhecer o seu peso.) (b) O limite calculado no item (a) é um limite superior (você pode tolerar massas menores) ou um limite inferior (você pode tolerar massas maiores)?

73 A esfera $A$, com uma massa de 80 kg, está situada na origem de um sistema de coordenadas $xy$; a esfera $B$, com uma massa de 60 kg, está situada nas coordenadas (0,25 m, 0); a esfera $C$, com uma massa de 0,20 kg, está situada no primeiro quadrante, a 0,20 m de $A$ e 0,15 m de $B$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional total que $A$ e $B$ exercem sobre $C$?

74 Um satélite está em uma órbita elíptica com um período de $8,0 \times 10^4$ s em torno de um planeta de massa $7,00 \times 10^{24}$ kg. No afélio, a uma distância de $4,5 \times 10^7$ m do centro do planeta, a velocidade angular do satélite é $7,158 \times 10^{-5}$ rad/s. Qual é a velocidade angular do satélite no periélio?

75 O capitão Janeway está em órbita circular de raio $r = 4,20 \times 10^7$ m em torno de um planeta de massa $M = 9,50 \times 10^{25}$ kg em um ônibus espacial de massa $m = 3000$ kg. Quais são (a) o período da órbita e (b) a velocidade do ônibus espacial? Janeway aciona por alguns instantes um retrofoguete, reduzindo em 2,00% a veloci-

dade do ônibus espacial. Nesse momento, quais são (c) a velocidade, (d) a energia cinética, (e) a energia potencial gravitacional e (f) a energia mecânica do ônibus espacial? (g) Qual é o semieixo maior da órbita elíptica agora seguida pelo ônibus espacial? (h) Qual é a diferença entre o período da órbita circular original e o da órbita elíptica? (i) Qual das duas órbitas tem o menor período?

**76** Uma certa estrela de nêutrons tem uma massa igual à do Sol e um raio de 10 km. (a) Qual é a aceleração da gravidade na superfície da estrela? (b) Com que velocidade um objeto estaria se movendo se caísse a partir do repouso por uma distância 1,0 m em direção à estrela? (Suponha que o movimento de rotação da estrela é desprezível.)

**77** Quatro esferas uniformes, de massas $m_A = 40$ kg, $m_B = 35$ kg, $m_C = 200$ kg e $m_D = 50$ kg, têm coordenadas (0, 50 cm), (0, 0), (−80 cm, 0) e (40 cm, 0), respectivamente. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional total que as outras esferas exercem sobre a esfera $B$?

**78** (a) No Problema 77, remova a esfera A e calcule a energia potencial gravitacional do sistema formado pelas outras três partículas. (b) Se a esfera $A$ é introduzida novamente no sistema, a energia potencial do sistema de quatro partículas é maior ou menor que a calculada no item (a)? (c) O trabalho para remover a partícula $A$ do sistema, como no item (a), é positivo ou negativo? (d) O trabalho para recolocar a partícula $A$ no sistema, como no item (b), é positivo ou negativo?

**79** Um dos primeiros satélites artificiais era apenas um balão esférico de folha de alumínio com 30 m de diâmetro e uma massa de 20 kg. Suponha que um meteoro com uma massa de 7,0 kg passe a 3,0 m da superfície do satélite. Qual é o módulo da força gravitacional que o satélite exerce sobre o meteoro no ponto de maior aproximação?

**80** Uma esfera maciça uniforme de raio $R$ produz uma aceleração gravitacional $a_g$ em sua superfície. A que distância do centro da esfera está o ponto (a) do lado de dentro e (b) do lado de fora da esfera no qual a aceleração gravitacional é $a_g/3$?

**81** Um projétil é disparado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, com uma velocidade inicial de 10 km/s. Desprezando a resistência do ar, que distância acima da superfície da Terra o projétil alcança?

**82** Um satélite de 50 kg completa uma volta em torno do planeta Cruton a cada 6,0 h. O módulo da força gravitacional que Cruton exerce sobre o satélite é 80 N. (a) Qual é o raio da órbita? (b) Qual é a energia cinética do satélite? (c) Qual é a massa do planeta Cruton?

**83** Em um sistema estelar binário, duas estrelas de massa $3{,}0 \times 10^{30}$ kg giram em torno do centro de massa do sistema a uma distância de $1{,}0 \times 10^{11}$ m. (a) Qual é a velocidade angular da estrelas em relação ao centro de massa? (b) Se um meteorito passa pelo centro de massa do sistema perpendicularmente ao plano da órbita, qual a menor velocidade que o meteorito deve ter ao passar pelo centro de massa para poder escapar para o "infinito" depois de passar pelo sistema binário?

**84** Um objeto no equador da Terra é acelerado (a) em direção ao centro da Terra porque a Terra gira em torno de si mesma, (b) em direção ao Sol porque a Terra gira em torno do Sol em uma órbita quase circular e (c) em direção ao centro da galáxia porque o Sol gira em torno do centro da galáxia. No último caso, o período é $2{,}5 \times 10^8$ anos e o raio é $2{,}2 \times 10^{20}$ m. Calcule as três acelerações em unidades de $g = 9{,}8$ m/s$^2$.

**85** As massas e coordenadas de três esferas são as seguintes: 20 kg, $x = 0{,}50$ m, $y = 1{,}0$ m; 40 kg, $x = -1{,}0$ m, $y = -1{,}0$ m; 60 kg, $x = 0$ m, $y = -0{,}50$ m. Qual é o módulo da força gravitacional que essas três esferas exercem sobre uma esfera de 20 kg localizada na origem?

**86** Com que velocidade uma carta passaria pelo centro da Terra se caísse no túnel do Exemplo 13-4?

**87** A órbita da Terra em torno do Sol é *quase* circular: As distâncias de maior aproximação e de maior afastamento são $1{,}47 \times 10^8$ km e $1{,}52 \times 10^8$ km, respectivamente. Determine as variações correspondentes (a) da energia total, (b) da energia potencial gravitacional, (c) da energia cinética e (d) da velocidade orbital. (*Sugestão:* Use as leis de conservação da energia e do momento angular.)

**88** Uma espaçonave está viajando em linha reta da Terra para a Lua. A que distância da Terra a força gravitacional total a que a espaçonave está sujeita é zero?

**89** Um objeto de massa $m$ é mantido inicialmente no lugar a uma distância $r = 3R_T$ do centro da Terra, onde $R_T$ é o raio da Terra. Seja $M_T$ a massa da Terra. Uma força é aplicada ao objeto para deslocá-lo para uma distância $r = 4R_E$, na qual é novamente mantido no lugar. Calcule o trabalho realizado pela força aplicada durante o deslocamento integrando o módulo da força.

**90** A maior velocidade de rotação possível de um planeta é aquela para a qual a força gravitacional no equador é igual à força centrípeta. (Por quê)? (a) Mostre que o período de rotação correspondente é dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

onde $\rho$ é a massa específica (massa por unidade de volume) uniforme do planeta esférico. (b) Calcule o período de rotação supondo uma massa específica de 3,0 g/cm$^3$, típica de muitos planetas, satélites e asteróides. Nunca foi observado um astro com um período de rotação menor que o determinado por esta análise.

**91** (a) Se a legendária maçã de Newton fosse liberada, a partir do repouso, 2 m acima da superfície de uma estrela de nêutrons com uma massa igual a 1,5 a massa do Sol e um raio de 20 km, qual seria a velocidade da maçã ao atingir a superfície da estrela? (b) Se a maçã ficasse em repouso sobre a superfície da estrela, qual seria a diferença aproximada entre a aceleração gravitacional no alto e na base da maçã? (Suponha um tamanho razoável para a maçã; a resposta indica que uma maçã não permaneceria inteira nas vizinhanças de uma estrela de nêutrons.)

**92** Algumas pessoas acreditam que as posições dos planetas na hora do nascimento influenciam o recém-nascido. Outras ridicularizam essa crença e alegam que a força gravitacional exercida sobre o bebê pelo obstetra é maior que a força exercida pelos planetas. Para verificar se esta afirmação está correta, calcule o módulo da força gravitacional exercida sobre um bebê de 3,0 kg (a) por um obstetra de 70 kg a 1,0 m de distância, considerado como uma massa pontual, (b) pelo planeta Júpiter ($m = 2 \times 10^{27}$ kg) em sua menor distância da Terra ($= 6 \times 10^{11}$ m) e (c) por Júpiter em sua maior distância da Terra ($= 9 \times 10^{11}$ m). (d) A afirmação está correta?

**93** Um sistema de três estrelas é formado por duas estrelas de massa $m$ girando na mesma órbita circular de raio $r$ em torno de uma estrela central de massa $M$ (Fig. 13-54). As duas estrelas em órbita estão sempre em extremidades opostas de um diâmetro da

órbita. Escreva uma expressão para o período de revolução das estrelas.

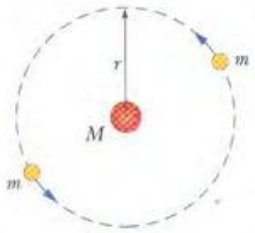


FIG. 13-54 Problema 93.

**94** Um foguete de 150,0 kg que se afasta da Terra em linha reta está a uma velocidade de 3,70 km/s quando o motor é desligado, 200 km acima da superfície da Terra. (a) Desprezando a resistência do ar, determine a energia cinética do foguete quando ele está 1000 km acima da superfície da Terra. (b) Qual é a altura máxima acima da superfície da Terra atingida pelo foguete?

**95** O planeta Roton, com uma massa de $7,0 \times 10^{24}$ kg e um raio de 1600 km, atrai gravitacionalmente um meteorito que está inicialmente em repouso em relação ao planeta, a uma distância suficientemente grande para ser considerada infinita. O meteorito cai em direção ao planeta. Supondo que o planeta não possui atmosfera, determine a velocidade do meteorito ao atingir a superfície do planeta.

**96** Duas esferas de 20 kg são mantidas fixas sobre um eixo $y$, uma em $y = 0,40$ m e a outra em $y = -0,40$ m. Uma bola de 10 kg é liberada a partir do repouso em um ponto sobre o eixo $x$, que está a uma grande distância (praticamente infinita) das esferas. Se as únicas forças que agem sobre a bola são as forças gravitacionais exercidas pelas esferas, então, quando a bola chega ao ponto (0,30 m, 0) quais são (a) sua energia cinética e (b) a força resultante exercida pelas esferas sobre ela, em termos dos vetores unitários?

**97** Um satélite de 125 kg de massa está em uma órbita circular de raio $7,00 \times 10^6$ m em torno de um planeta. Se o período é 8050 s, qual é a energia mecânica do satélite?

**98** No romance de ficção científica *Da Terra à Lua*, escrito em 1865, Júlio Verne conta a história de três astronautas que são lançados em direção à Lua por um gigantesco canhão. Segundo Verne, a cápsula de alumínio com os astronautas é acelerada por uma carga de algodão-pólvora até uma velocidade de 11 km/s ao longo dos 220 m do cano do canhão. (a) Qual seria a aceleração média da cápsula e dos astronautas no cano do canhão em unidades de $g$? (b) Os astronautas poderiam resistir a essa aceleração?

Uma versão moderna do lançamento de uma espaçonave por um canhão (embora sem passageiros) foi proposta na década de 1990. Nesta versão moderna, chamada de canhão SHARP (do inglês Super High Altitude Research Project), a combustão de metano empurra um pistão ao longo do tubo do canhão, comprimindo o gás hidrogênio, que por sua vez impulsiona o foguete. O foguete percorre uma distância de 3,5 km dentro do tubo de lançamento, atingindo uma velocidade de 7,0 km/s. Uma vez lançado, o foguete pode usar motores para ganhar mais velocidade. (c) Qual é a aceleração média do foguete dentro do tubo de lançamento em unidades de $g$? (d) Que velocidade adicional seria necessária (usando os motores do foguete) para que o foguete entrasse em órbita da Terra a uma altitude de 700 km?

**99** Vários planetas (Júpiter, Saturno, Urano) possuem anéis, talvez formados por fragmentos que não chegaram a formar um satélite. Muitas galáxias também contêm estruturas em forma de anéis. Considere um anel fino homogêneo de massa $M$ e raio externo $R$ (Fig. 13-55). (a) Qual é a atração gravitacional que o anel exerce sobre uma partícula de massa $m$ localizada no eixo central do anel a uma distância $x$ do centro do anel? (b) Suponha que a partícula do item (a) seja liberada a partir do repouso. Com que velocidade ela passa pelo centro do anel?

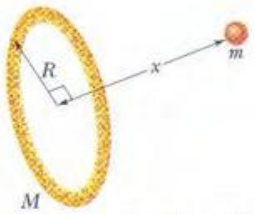


FIG. 13-55 Problema 99.

**100** Quatro partículas iguais de 1,5 kg são colocadas nos vértices de um quadrado com 20 cm de lado. Qual é o módulo da força gravitacional que três dessas partículas exercem sobre a quarta partícula?

**101** Dois astros iguais, de massa $m$, $A$ e $B$, são acelerados um em direção ao outro, a partir do repouso, pela força gravitacional mútua. A distância inicial entre os centros dos dois astros é $R_i$. Suponha que um observador se encontra em um referencial inercial estacionário em relação ao centro de massa desse sistema de dois corpos. Use a lei de conservação da energia mecânica ($K_f + U_f = K_i + U_i$) para determinar as seguintes grandezas quando a distância entre os centros é $0,5R_i$: (a) a energia cinética total do sistema, (b) a energia cinética de cada astro, (c) a velocidade escalar de cada astro em relação ao observador e (d) a velocidade do astro $B$ em relação ao astro $A$.

Em seguida, suponha que o referencial do observador está ligado ao astro $A$ (ou seja, o observador se encontra no astro $A$). Nesse caso, o observador vê o corpo $B$ acelerar em sua direção a partir do repouso. Neste referencial, use novamente a relação $K_f + U_f = K_i + U_i$ para determinar as seguintes grandezas quando a distância entre os centros é $0,5R_i$: (e) a energia cinética do astro $B$ e (f) a velocidade escalar do astro $B$ em relação ao astro $A$. (g) Por que as respostas dos itens (d) e (f) são diferentes? Qual das duas respostas está correta?

**102** Qual é a variação percentual da aceleração da Terra em direção ao Sol quando o alinhamento entre a Terra, o Sol e a Lua muda de um eclipse do Sol (com a Lua entre a Terra e o Sol) para um eclipse da Lua (com a Terra entre a Lua e o Sol)?

**103** Um planeta leva 300 dias (terrestres) para completar uma órbita circular em torno do seu sol, que tem uma massa de $6,0 \times 10^{30}$ kg. Quais são (a) o raio da órbita e (b) a velocidade orbital do planeta?

**104** Uma partícula de poeira de um cometa de massa $m$ está a uma distância $R$ do centro da Terra e a uma distância $r$ do centro da Lua. Se a massa da Terra é $M_T$ e a massa da Lua é $M_L$, qual é a soma da energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra e da energia potencial gravitacional do sistema partícula-Lua?

# Fluidos 14

Warren Bolster/Stone/Getty Images

*Um surfista espera pacientemente, ajoelhado na prancha, pela próxima onda. Quando vê uma onda se aproximar, rema em direção à praia até estar se movendo quase tão depressa quanto a onda. Quando a onda o alcança, fica de pé, ajustando constantemente a posição do corpo para manter o equilíbrio. Como ele consegue acompanhar a onda? Como consegue subir ou descer a onda?*

## Como um surfista surfa?

A resposta está neste capítulo.

## 14-1 O QUE É FÍSICA?

A física dos fluidos é a base da engenharia hidráulica, um ramo da engenharia com muitas aplicações práticas. Um engenheiro nuclear pode estudar o escoamento de um fluido no sistema hidráulico de um reator nuclear após alguns anos de uso, enquanto um bioengenheiro pode estudar o fluxo de sangue nas artérias de um paciente idoso. Um engenheiro ambiental pode estar preocupado com a contaminação das vizinhanças de um depósito de lixo ou com a eficiência de um sistema de irrigação. Um engenheiro naval pode estar interessado em investigar os riscos de um mergulho em águas profundas ou a possibilidade de salvar a tripulação de um submarino danificado. Um engenheiro aeronáutico pode projetar o sistema hidráulico dos *flaps* que ajudam um avião a pousar. A engenharia hidráulica é usada também em muitos espetáculos da Broadway e de Las Vegas, nos quais enormes cenários são rapidamente montados e desmontados por sistemas hidráulicos.

Antes de estudar essas aplicações da física dos fluidos, precisamos responder à seguinte pergunta: "O que é um fluido?"

## 14-2 | O que É um Fluido?

Um **fluido**, ao contrário de um sólido, é uma substância que pode escoar. Os fluidos assumem a forma do recipiente em que são colocados. Eles se comportam dessa forma porque um fluido não pode resistir a uma força paralela à sua superfície. (Na linguagem mais formal da Seção 12-7, um fluido é uma substância que escoa porque ele não pode resistir a uma tensão de cisalhamento. Um fluido pode, porém, exercer uma força na direção perpendicular à superfície.) Algumas substâncias, como o piche, levam um longo tempo para se amoldar aos contornos de um recipiente, mas acabam por fazê-lo; assim, mesmo essas substâncias são classificadas como fluidos.

Você talvez se pergunte por que os líquidos e gases são agrupados na mesma categoria e chamados de fluidos. Afinal (pode pensar), a água é tão diferente do vapor quanto do gelo. Isso, porém, não é verdade. O gelo, como outros sólidos cristalinos, tem seus átomos organizados em um arranjo tridimensional bastante rígido chamado rede cristalina. Nem no vapor nem na água existe um arranjo com ordem de longo alcance como este.

## 14-3 | Massa Específica e Pressão

Quando discutimos os corpos rígidos, estamos interessados em concentrações de matéria como blocos de madeira, bolas de tênis ou barras de metal. As grandezas físicas que utilizamos nesse caso e em termos das quais expressamos as leis de Newton são a *massa* e a *força*. Podemos falar, por exemplo, de um bloco de 3,6 kg submetido a uma força de 25 N.

No caso dos fluidos, estamos mais interessados em substâncias sem uma forma definida e em propriedades que podem variar de um ponto a outro da substância. Nesse caso, é mais útil falar em **massa específica** e **pressão** do que em massa e força.

### Massa Específica

Para determinar a massa específica $\rho$ de um fluido em um certo ponto do espaço, isolamos um pequeno elemento de volume $\Delta V$ em torno do ponto e medimos a massa $\Delta m$ do fluido contido nesse elemento de volume. A **massa específica** é dada por

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \qquad (14\text{-}1)$$

**TABELA 14-1**

**Algumas Massas Específicas**

| Substância ou Objeto | Massa Específica ($kg/m^3$) | Substância ou Objeto | Massa Específica ($kg/m^3$) |
|---|---|---|---|
| Espaço interestelar | $10^{-20}$ | Ferro | $7,9 \times 10^3$ |
| Melhor vácuo em laboratório | $10^{-17}$ | Mercúrio (o metal, não o planeta) | $13,6 \times 10^3$ |
| Ar: 20°C e 1 atm de pressão | 1,21 | Terra: média | $5,5 \times 10^3$ |
| 20°C e 50 atm | 60,5 | núcleo | $9,5 \times 10^3$ |
| Isopor | $1 \times 10^2$ | crosta | $2,8 \times 10^3$ |
| Gelo | $0,917 \times 10^3$ | Sol: média | $1,4 \times 10^3$ |
| Água: 20°C e 1 atm | $0,998 \times 10^3$ | núcleo | $1,6 \times 10^5$ |
| 20°C e 50 atm | $1,000 \times 10^3$ | Anã branca (núcleo) | $10^{10}$ |
| Água do mar: 20°C e 1 atm | $1,024 \times 10^3$ | Núcleo de urânio | $3 \times 10^{17}$ |
| Sangue | $1,060 \times 10^3$ | Estrela de nêutrons (núcleo) | $10^{18}$ |

Teoricamente, a massa específica em um ponto qualquer de um fluido é o limite dessa razão quando o elemento de volume $\Delta V$ em torno do ponto tende a zero. Na prática, supomos que o volume de fluido usado para calcular a massa específica, embora pequeno, é muito maior que um átomo e, portanto, "regular" (com a mesma massa específica em todos os pontos) e não "granulado" por causa da presença de átomos. Além disso, em muitos casos supomos que a massa específica do fluido em uma amostra é a mesma em todos os pontos. Essas duas hipóteses permitem escrever a massa específica na forma

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{(massa específica uniforme)}, \tag{14-2}$$

onde $m$ e $V$ são a massa e o volume da amostra.

A massa específica é uma grandeza; sua unidade no SI é o quilograma por metro cúbico. A Tabela 14-1 mostra a massa específica de algumas substâncias e a massa específica média de alguns objetos. Observe que a massa específica de um gás (veja Ar na tabela) varia consideravelmente com a pressão, mas a massa específica de um líquido (veja Água) não varia; isso significa que os gases são *compressíveis*, mas o mesmo não acontece com os líquidos.

## Pressão

Considere um pequeno sensor de pressão suspenso em um recipiente cheio de fluido, como na Fig. 14-1*a*. O sensor (Fig. 14-1*b*) é formado por um êmbolo de área $\Delta A$ que pode deslizar no interior de um cilindro fechado que repousa sobre uma mola. Um mostrador registra o deslocamento sofrido pela mola (calibrada) ao ser comprimida pelo fluido, indicando assim o módulo $\Delta F$ da força normal que age sobre o êmbolo. Definimos a **pressão** do fluido sobre o êmbolo como

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \tag{14-3}$$

Teoricamente, a pressão em qualquer ponto no fluido é o limite dessa razão quando a área $\Delta A$ de um êmbolo com o centro nesse ponto tende a zero. Entretanto, se a força é uniforme em uma superfície plana de área $A$ podemos escrever a Eq. 14-3 na forma

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{(pressão de uma força uniforme em uma superfície plana)}, \tag{14-4}$$

onde $F$ é o módulo da força normal a que está sujeita a superfície de área $A$. (Quando dizemos que uma força é uniforme em uma superfície isso significa que a força está uniformemente distribuída por todos os pontos da superfície.)

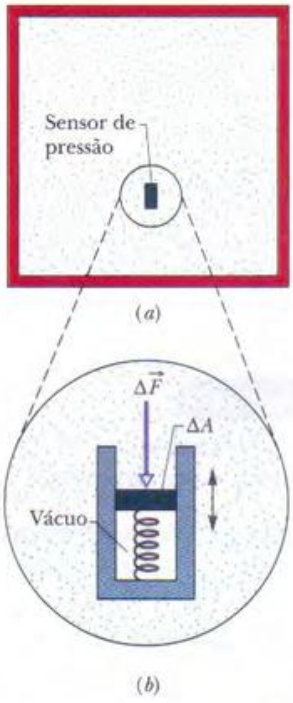



FIG. 14-1 (*a*) Um recipiente cheio de fluido com um pequeno sensor de pressão, mostrado em (*b*). A pressão é medida pela posição relativa do êmbolo móvel do sensor.

**TABELA 14-2**

**Algumas Pressões**

| | Pressão (Pa) | | Pressão (Pa) |
|---|---|---|---|
| Centro do Sol | $2 \times 10^{16}$ | Pneu de automóvel[a] | $2 \times 10^{5}$ |
| Centro da Terra | $4 \times 10^{11}$ | Atmosfera ao nível do mar | $1{,}0 \times 10^{5}$ |
| Maior pressão constante em laboratório | $1{,}5 \times 10^{10}$ | Pressão arterial sistólica normal[a,b] | $1{,}6 \times 10^{4}$ |
| Maior fossa oceânica (no fundo) | $1{,}1 \times 10^{8}$ | Melhor vácuo obtido em laboratório | $10^{-12}$ |
| Salto agulha em uma pista de dança | $10^{6}$ | | |

[a]Acima da pressão atmosférica.
[b]Equivalente a 120 torr nos medidores de pressão dos médicos.

Observamos experimentalmente que em um dado ponto de um fluido em repouso a pressão $p$ definida pela Eq. 14-4 tem o mesmo valor, qualquer que seja a orientação do êmbolo. A pressão é uma grandeza escalar; suas propriedades não dependem da orientação. É verdade que a força que age sobre o êmbolo do nosso sensor de pressão é uma grandeza vetorial, mas a Eq. 14-4 envolve apenas o *módulo* dessa força, que é uma grandeza escalar.

A unidade de pressão no SI é o newton por metro quadrado, que recebe um nome especial, o **pascal** (Pa). Em muitos países, os medidores de pressão de pneus estão calibrados em quilopascals. A relação entre o pascal e outras unidades de pressão muito usadas na prática (mas que não pertencem ao SI) é a seguinte:

$$1 \text{ atm} = 1{,}01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14{,}7 \text{ lb/in}^2.$$

A *atmosfera* (atm) é, como o nome indica, a pressão média aproximada da atmosfera ao nível do mar. O *torr* (nome dado em homenagem a Evangelista Torricelli, que inventou o barômetro de mercúrio em 1674) já foi chamado de *milímetro de mercúrio* (mm Hg). A abreviação de libra por polegada quadrada é psi (do inglês *p*ound per *s*quare *i*nch). A Tabela 14-2 mostra algumas pressões em pascal.

## Exemplo 14-1

Uma sala de estar tem 4,2 m de comprimento, 3,5 m de largura e 2,4 m de altura.

(a) Qual é o peso do ar na sala se a pressão do ar é 1,0 atm?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) O peso do ar é $mg$, onde $m$ é a massa do ar. (2) A massa $m$ está relacionada à massa específica $\rho$ e ao volume $V$ do ar através da Eq. 14-2 ($\rho = m/V$).

***Cálculo:*** Combinando essas duas idéias e usando a massa específica do ar para 1,0 atm que aparece na Tabela 14-1, temos:

$$\begin{aligned} mg &= (\rho V)g \\ &= (1{,}21 \text{ kg/m}^3)(3{,}5 \text{ m} \times 4{,}2 \text{ m} \times 2{,}4 \text{ m})(9{,}8 \text{ m/s}^2) \\ &= 418 \text{ N} \approx 420 \text{ N}. \end{aligned}$$

(Resposta)

Este é o peso de aproximadamente 110 latas de refrigerante.

(b) Qual é o módulo da força que a atmosfera exerce sobre o alto da cabeça de uma pessoa, que tem uma área da ordem de 0,040 m²?

**IDÉIA-CHAVE** Quando a pressão $p$ que um fluido exerce sobre uma superfície de área $A$ é uniforme, a força que o fluido exerce sobre a superfície pode ser calculada usando a Eq. 14-4 ($p = F/A$).

***Cálculo:*** Embora a pressão do ar varie de acordo com o local e a hora do dia, podemos dizer que é de aproximadamente 1,0 atm. Nesse caso, a Eq. 14-4 nos dá

$$\begin{aligned} F = pA &= (1{,}0 \text{ atm})\left(\frac{1{,}01 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1{,}0 \text{ atm}}\right)(0{,}040 \text{ m}^2) \\ &= 4{,}0 \times 10^3 \text{ N}. \end{aligned}$$

(Resposta)

Esta força gigantesca é igual ao peso da coluna de ar que está acima da cabeça da pessoa, e se estende até o limite superior da atmosfera terrestre.

## 14-4 | Fluidos em Repouso

A Fig. 14-2*a* mostra um tanque de água (ou outro líquido qualquer) aberto para a atmosfera. Como todo mergulhador sabe, a pressão *aumenta* com a profundidade abaixo da interface ar-água. O medidor de profundidade usado pelos mergulhadores é, na verdade, um sensor de pressão semelhante ao da Fig. 14-1*b*. Como todo alpinista sabe, a pressão *diminui* com a altitude acima do nível do mar. As pressões encontradas pelos mergulhadores e alpinistas são chamadas de *pressões hidrostáticas* porque se devem a fluidos estáticos (em repouso). Vamos agora procurar uma expressão para a pressão hidrostática em função da profundidade ou da altitude.

Para começar, vamos examinar o aumento da pressão com a profundidade em um tanque cheio d'água. Definimos um eixo $y$ vertical no tanque, com a origem na interface ar-água e o sentido positivo para cima. Em seguida, consideramos a água contida em um cilindro imaginário circular reto de bases $A$ horizontais, de modo que $y_1$ e $y_2$ (ambos números *negativos*) são as profundidades abaixo da superfície das bases superior e inferior do cilindro, respectivamente.

A Fig. 14-2*b* mostra o diagrama de corpo livre da água do cilindro. A água se encontra em *equilíbrio estático*, ou seja, está em repouso, e a resultante das forças que agem sobre ela é nula. A água está sujeita a três forças verticais: a força $\vec{F}_1$ age sobre a superfície superior do cilindro e se deve à água que está acima do cilindro. A força $\vec{F}_2$ age sobre a superfície inferior do cilindro e se deve à água que está abaixo do cilindro. A força gravitacional que age sobre a água no cilindro está representada por $m\vec{g}$, onde $m$ é a massa da água no cilindro. O equilíbrio dessas forças pode ser escrito na forma

$$F_2 = F_1 + mg. \tag{14-5}$$

Queremos transformar a Eq. 14-5 em uma equação envolvendo pressões. De acordo com a Eq. 14-4,

$$F_1 = p_1 A \quad \text{e} \quad F_2 = p_2 A. \tag{14-6}$$

A massa $m$ da água no cilindro é, segundo a Eq. 14-2, $m = \rho V$, onde o volume $V$ do cilindro é o produto da área da base $A$ pela sua altura $y_1 - y_2$. Assim, $m$ é igual a $\rho A(y_1 - y_2)$. Substituindo este resultado e a Eq. 14-6 na Eq. 14-5, obtemos

$$p_2 A = p_1 A + \rho A g(y_1 - y_2)$$

ou

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \tag{14-7}$$

Esta equação pode ser usada para determinar a pressão tanto em um líquido (em função da profundidade) como na atmosfera (em função da altitude ou altura). No primeiro caso, suponha que estejamos interessados em conhecer a pressão $p$ a uma profundidade $h$ abaixo da superfície do líquido. Nesse caso, escolhemos o nível 1 como sendo a superfície, o nível 2 como sendo uma distância $h$ abaixo do nível 1 (como na Fig. 14-3) e $p_0$ como a pressão atmosférica na superfície. Fazemos, portanto,

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \text{ e } y_2 = -h,\ p_2 = p$$

na Eq. 14-7, e obtemos

$$p = p_0 + \rho g h \quad \text{(pressão na profundidade } h\text{)}. \tag{14-8}$$

Note que a pressão em uma dada profundidade no líquido depende dessa profundidade, mas não da dimensão horizontal.

A pressão em um ponto de um fluido em equilíbrio estático depende da profundidade desse ponto, mas não da dimensão horizontal do fluido ou do recipiente.

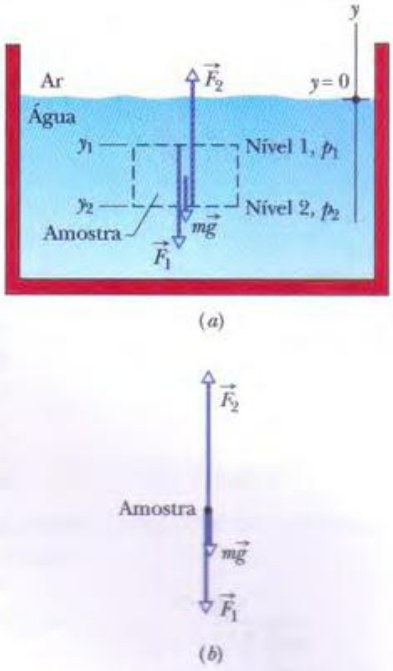



FIG. 14-2 (*a*) Um tanque de água no qual uma amostra de água está contida em um cilindro imaginário com base horizontal de área $A$. Uma força $\vec{F}_1$ age sobre a superfície superior do cilindro; uma força $\vec{F}_2$ age sobre a superfície inferior do cilindro; a força gravitacional que age sobre a água do cilindro está representada por $m\vec{g}$. (*b*) Diagrama de corpo livre da amostra de água.

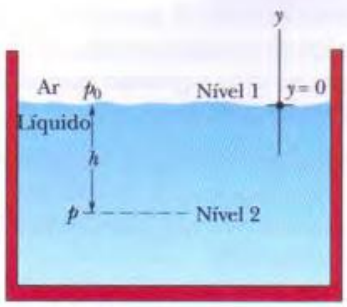



FIG. 14-3 A pressão $p$ aumenta com a profundidade $h$ abaixo da superfície do líquido de acordo com a Eq. 14-8.

Assim, a Eq. 14-8 é válida qualquer que seja a forma do recipiente. Se a superfície inferior do recipiente está a uma profundidade $h$, a Eq. 14-8 fornece a pressão $p$ nessa profundidade.

Na Eq. 14-8, $p$ é chamada de pressão total, ou **pressão absoluta**, no nível 2. Para compreender por quê, observe na Fig. 14-3 que a pressão $p$ no nível 2 é a soma de duas parcelas: (1) $p_0$, a pressão devida à atmosfera, que é aplicada à superfície do líquido, e (2) $\rho gh$, a pressão devida ao líquido acima do nível 2, que é aplicada neste nível. A diferença entre uma pressão absoluta e uma pressão atmosférica é chamada de **pressão manométrica**. (O nome se deve ao uso de um manômetro para medir essa diferença de pressão.) Para a situação da Fig. 14-3, a pressão manométrica é $\rho gh$.

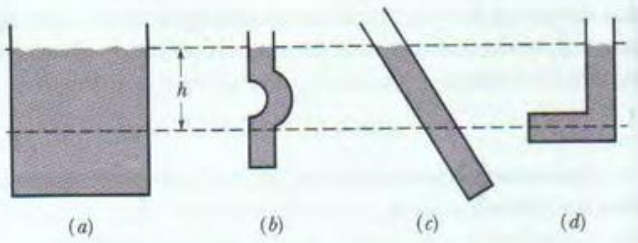
A Eq. 14-7 também pode ser usada acima da superfície do líquido: ela fornece a pressão atmosférica a uma dada distância acima do nível 1 em termos da pressão atmosférica $p_1$ no nível 1 (*supondo* que a massa específica da atmosfera é uniforme ao longo dessa distância). Assim, por exemplo, para calcular a pressão atmosférica a uma distância $d$ acima do nível 1 da Fig. 14-3, fazemos

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = d,\ p_2 = p.$$

Nesse caso, com $\rho = \rho_{ar}$, obtemos

$$p = p_0 - \rho_{ar} g d.$$

**TESTE 1** A figura mostra quatro recipientes de azeite. Ordene-os de acordo com a pressão na profundidade $h$, da maior para a menor.




## Exemplo 14-2

Um mergulhador novato, praticando em uma piscina, inspira ar suficiente do tanque para expandir totalmente os pulmões antes de abandonar o tanque a uma profundidade $L$ e nadar para a superfície. Ele ignora as instruções e não exala o ar durante a subida. Ao chegar à superfície, a diferença entre a pressão externa a que está submetido e a pressão do ar em seus pulmões é 9,3 kPa. De que profundidade partiu? Que risco possivelmente fatal está correndo?

**IDÉIA-CHAVE** A pressão a uma profundidade $h$ em um líquido de massa específica $\rho$ é dada pela Eq. 14-8 ($p = p_0 + \rho gh$), na qual a pressão manométrica $\rho gh$ é somada à pressão atmosférica $p_0$.

***Cálculos:*** Quando o mergulhador enche os pulmões na profundidade $L$, a pressão externa sobre ele (e, portanto, a pressão em seus pulmões) está acima do normal e é dada pela Eq. 14-8:

$$p = p_0 + \rho gL,$$

onde $p_0$ é a pressão atmosférica e $\rho$ é a massa específica da água (998 kg/m$^3$, de acordo com a Tabela 14-1). Quando o mergulhador sobe, a pressão externa sobre ele diminui até se tornar igual à pressão atmosférica $p_0$ quando o mergulhador atinge a superfície. A pressão sangüínea também diminui até voltar ao normal. Entretanto, como o mergulhador não exalou o ar, a pressão do ar em seus pulmões permanece no valor correspondente à profundidade $L$. Na superfície, a diferença entre a pressão mais alta nos pulmões e a pressão mais baixa no tórax é

$$\Delta p = p - p_0 = \rho gL,$$

e, portanto,

$$L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{9300\ \text{Pa}}{(998\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)}$$

$$= 0{,}95\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Trata-se de uma profundidade muito pequena! Mesmo assim, a diferença de pressão de 9,3 kPa (aproximadamente 9% da pressão atmosférica) é suficiente para romper os pulmões do mergulhador e forçar a passagem de ar dos pulmões para a corrente sangüínea, que transporta o ar para o coração, matando o mergulhador. Se ele seguir as instruções e exalar o ar gradualmente enquanto sobe, permitirá que a pressão nos pulmões se torne igual à pressão externa, eliminando o perigo.

**Exemplo 14-3**

O tubo em forma de U da Fig. 14-4 contém dois líquidos em equilíbrio estático: no lado direito existe água de massa específica $\rho_a$ (= 998 kg/m$^3$), e no lado esquerdo existe óleo de massa específica desconhecida $\rho_x$. Os valores das distâncias indicadas na figura são $l$ = 135 mm e $d$ = 12,3 mm. Qual é a massa específica do óleo?

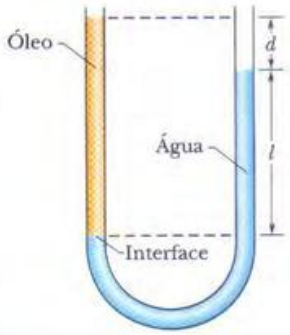



FIG. 14-4 O óleo do lado esquerdo fica mais alto que a água do direito porque a massa específica do óleo é menor que a da água. Ambas as colunas de fluidos produzem a mesma pressão $p_{int}$ na interface.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A pressão $p_{int}$ no nível correspondente à interface óleo-água do lado esquerdo depende da massa específica $\rho_x$ e da altura do óleo acima da interface. (2) A água do lado direito *à mesma altura* está submetida à mesma pressão $p_{int}$. Isso acontece porque, como a água está em equilíbrio estático, as pressões em pontos na água no mesmo nível são necessariamente iguais, mesmo que os pontos estejam separados horizontalmente.

***Cálculos:*** No lado direito, a interface está uma distância $l$ abaixo da superfície da *água*, e a Eq. 14-8 nos dá

$$p_{int} = p_0 + \rho_a g l \quad \text{(lado direito)}.$$

No lado esquerdo, a interface está a uma distância $l + d$ abaixo da superfície do *óleo*, e novamente a Eq. 14-8 nos dá

$$p_{int} = p_0 + \rho_x g(l + d) \quad \text{(lado esquerdo)}.$$

Igualando essas duas expressões e explicitando a massa específica desconhecida, obtemos

$$\rho_x = \rho_a \frac{l}{l+d} = (998\ \text{kg/m}^3)\frac{135\ \text{mm}}{135\ \text{mm} + 12{,}3\ \text{mm}}$$
$$= 915\ \text{kg/m}^3. \quad \text{(Resposta)}$$

Note que a resposta não depende da pressão atmosférica $p_0$ nem da aceleração de queda livre $g$.

## 14-5 | Medindo a Pressão

### O Barômetro de Mercúrio

A Fig. 14-5*a* mostra um *barômetro de mercúrio* simples, um aparelho usado para medir a pressão da atmosfera. O tubo de vidro é enchido com mercúrio e invertido com a extremidade aberta mergulhada em um recipiente com mercúrio, como mostra a figura. O espaço acima da coluna de mercúrio contém apenas vapor de mercúrio, cuja pressão é tão baixa à temperatura ambiente que pode ser desprezada.

Podemos usar a Eq. 14-7 para determinar a pressão atmosférica $p_0$ em termos da altura $h$ da coluna de mercúrio. Escolhemos o nível 1 da Fig. 14-2 como sendo o da interface ar-mercúrio, e o nível 2 como sendo o do alto da coluna de mercúrio, como mostra a Fig. 14-5*a*. Em seguida, fazemos

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = h,\ p_2 = 0$$

na Eq. 14-7, o que nos dá

$$p_0 = \rho g h, \tag{14-9}$$

onde $\rho$ é a massa específica do mercúrio.

Para uma dada pressão, a altura $h$ da coluna de mercúrio não depende da área de seção reta do tubo vertical. O barômetro de mercúrio mais sofisticado da Fig. 14-5*b* fornece a mesma leitura que o da Fig. 14-5*a*; tudo que importa é a distância vertical $h$ entre os níveis de mercúrio.

A Eq. 14-9 mostra que, para uma dada pressão, a altura da coluna de mercúrio depende do valor de $g$ no local onde se encontra o barômetro e da massa específica do mercúrio, que varia com a temperatura. A altura da coluna (em milímetros) é numericamente igual à pressão (em torr) *apenas* se o barômetro estiver em um local onde $g$ tem o valor-padrão de 9,80665 m/s$^2$ *e* se a temperatura do mercúrio for 0°C. Se essas condições não forem satisfeitas (e raramente o são), pequenas correções devem ser feitas para que a altura da coluna de mercúrio possa ser lida como pressão.

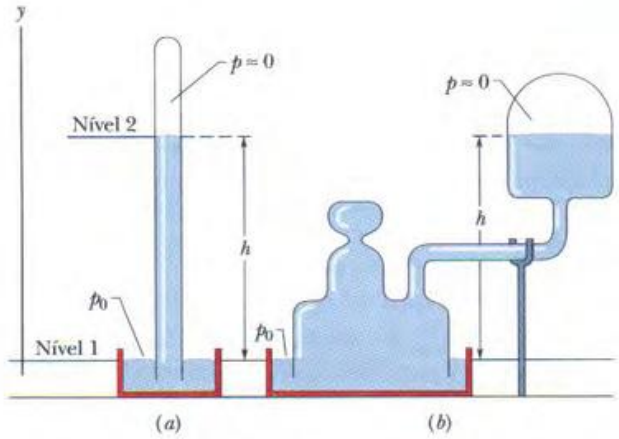



FIG. 14-5 (*a*) Um barômetro de mercúrio. (*b*) Outro barômetro de mercúrio. A distância $h$ é a mesma nos dois casos.

## O Manômetro de Tubo Aberto

Um *manômetro de tubo aberto* (Fig. 14-6) é usado para medir a pressão manométrica $p_m$ de um gás. Ele é formado por um tubo em forma de U contendo um líquido, com uma das extremidades ligada a um recipiente cuja pressão manométrica se deseja medir e a outra aberta para a atmosfera. Podemos usar a Eq. 14-7 para determinar a pressão manométrica em termos da altura $h$ mostrada na Fig. 14-6. Vamos escolher os níveis 1 e 2 da Fig. 14-6. Fazendo

$$y_1 = 0,\ p_1 = p_0 \text{ e } y_2 = -h,\ p_2 = p$$

na Eq. 14-7, obtemos

$$p_m = p - p_0 = \rho g h, \tag{14-10}$$

onde $\rho$ é a massa específica do líquido contido no tubo. A pressão manométrica $p_m$ é diretamente proporcional a $h$.

A pressão manométrica pode ser positiva ou negativa, dependendo de $p > p_0$ ou $p < p_0$. Nos pneus e no sistema circulatório a pressão (absoluta) é maior do que a pressão atmosférica, de modo que a pressão manométrica é uma grandeza positiva, às vezes chamada de *sobrepressão*. Quando alguém usa um canudo para beber um refrigerante a pressão (absoluta) nos pulmões é menor do que a pressão atmosférica. Nesse caso, a pressão manométrica nos pulmões é uma grandeza negativa.

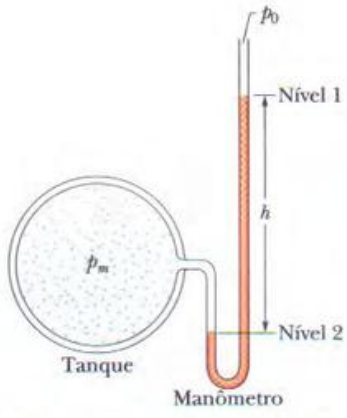



FIG. 14-6 Um manômetro de tubo aberto, usado para medir a pressão manométrica do gás no tanque da esquerda. O lado direito do tubo em U está aberto para a atmosfera.

## 14-6 | O Princípio de Pascal

Quando apertamos uma extremidade de um tubo de pasta de dente para fazer a pasta sair pela outra extremidade estamos pondo em prática o **princípio de Pascal**. Este princípio também é usado na manobra de Heimlich, na qual uma pressão aplicada ao abdômen é transmitida para a garganta, liberando um pedaço de comida ali alojado. O princípio foi enunciado com clareza pela primeira vez em 1652 por Blaise Pascal (em cuja homenagem foi batizada a unidade de pressão do SI):

Uma variação da pressão aplicada a um fluido incompressível contido em um recipiente é transmitida integralmente a todas as partes do fluido e às paredes do recipiente.

## Demonstração do Princípio de Pascal

Considere o caso no qual o fluido incompressível é um líquido contido em um cilindro, como na Fig. 14-7. O cilindro é fechado por um êmbolo no qual repousa um recipiente com bolinhas de chumbo. A atmosfera, o recipiente e as bolinhas de chumbo exercem uma pressão $p_{ext}$ sobre o êmbolo e, portanto, sobre o líquido. A pressão $p$ em qualquer ponto $P$ do líquido é, portanto,

$$p = p_{ext} + \rho g h. \tag{14-11}$$

Vamos adicionar mais algumas bolinhas de chumbo ao recipiente para aumentar $p_{ext}$ de um valor $\Delta p_{ext}$. Como os valores dos parâmetros $\rho$, $g$ e $h$ da Eq. 14-11 permanecem os mesmos, a variação de pressão no ponto $P$ é

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \tag{14-12}$$

Como esta variação de pressão não depende de $h$, é a mesma para todos os pontos do interior do líquido, como afirma o princípio de Pascal.

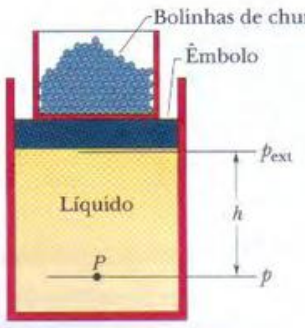



**FIG. 14-7** Bolinhas de chumbo colocadas sobre o êmbolo criam uma pressão $p_{ext}$ no alto de um líquido confinado (incompressível). Se mais bolinhas de chumbo são colocadas sobre o êmbolo, fazendo aumentar $p_{ext}$, a pressão aumenta do mesmo valor em todos os pontos do líquido.

## O Princípio de Pascal e o Macaco Hidráulico

A Fig. 14-8 mostra a relação entre o princípio de Pascal e o macaco hidráulico. Suponha que uma força externa de módulo $F_e$ seja aplicada de cima para baixo ao êmbolo da esquerda (ou de entrada), cuja área é $A_e$. Um líquido incompressível produz uma força de baixo para cima, de módulo $F_s$, no êmbolo da direita (ou de saída), cuja área é $A_s$. Para manter o sistema em equilíbrio deve existir uma força para baixo de módulo $F_s$ no êmbolo de saída, exercida por uma carga externa (não mostrada na figura). A força $\vec{F}_e$ aplicada no lado esquerdo, e a força $\vec{F}_s$ para baixo exercida pela carga no lado direito produzem uma variação $\Delta p$ da pressão do líquido que é dada por

$$\Delta p = \frac{F_e}{A_e} = \frac{F_s}{A_s},$$

e portanto

$$F_s = F_e \frac{A_s}{A_e}. \tag{14-13}$$

A Eq. 14-13 mostra que a força de saída $F_s$ exercida sobre a carga é maior que a força de entrada $F_e$ se $A_s > A_e$, como acontece na Fig. 14-8.

Se deslocamos o êmbolo de entrada para baixo de uma distância $d_e$, o êmbolo de saída se desloca para cima de uma distância $d_s$, de modo que o mesmo volume $V$ de líquido incompressível é deslocado pelos dois êmbolos. Assim,

$$V = A_e d_e = A_s d_s,$$

que pode ser escrita como

$$d_s = d_e \frac{A_e}{A_s}. \tag{14-14}$$

Isso mostra que, se $A_s > A_e$ (como na Fig. 14-8) o êmbolo de saída percorre uma distância menor que o êmbolo de entrada.

De acordo com as Eqs. 14-13 e 14-14, podemos escrever o trabalho da saída na forma

$$W = F_s d_s = \left(F_e \frac{A_s}{A_e}\right)\left(d_e \frac{A_e}{A_s}\right) = F_e d_e, \tag{14-15}$$

que mostra que o trabalho $W$ realizado *sobre* o êmbolo de entrada pela força aplicada é igual ao trabalho $W$ realizado *pelo* êmbolo de saída ao levantar uma carga.

A vantagem do macaco hidráulico é a seguinte:

Com um macaco hidráulico uma certa força aplicada ao longo de uma dada distância pode ser transformada em uma força maior aplicada ao longo de uma distância menor.

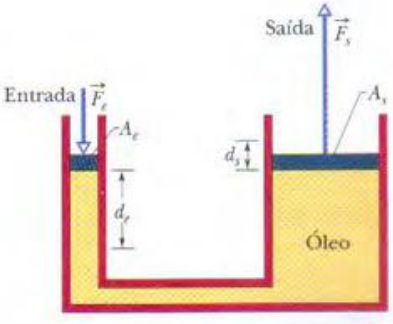



**FIG. 14-8** Um dispositivo hidráulico que pode ser usado para aumentar a força $\vec{F}_e$. O trabalho realizado não é amplificado e é o mesmo para as forças de entrada e de saída.

FIG. 14-9 Um saco de plástico de massa desprezível, cheio d'água, está em equilíbrio estático na piscina. A força gravitacional experimentada pelo saco é equilibrada por uma força resultante para cima exercida pela água que o cerca.

Como o produto da força pela distância permanece inalterado, o trabalho realizado é o mesmo. Entretanto, há freqüentemente uma grande vantagem em poder exercer uma força maior. Muitos de nós, por exemplo, não temos força para levantar um automóvel, mas podemos fazê-lo usando um macaco hidráulico, ainda que tenhamos que movimentar a alavanca do macaco por uma distância muito maior que a percorrida pelo automóvel em uma série de movimentos curtos.

## 14-7 | O Princípio de Arquimedes

A Fig. 14-9 mostra uma estudante em uma piscina, manuseando um saco de plástico muito fino (de massa desprezível) cheio de água. Ela observa que o saco e a água nele contida estão em equilíbrio estático, ou seja, não tendem a subir nem a descer. A força gravitacional para baixo $\vec{F}_g$ a que a água contida no saco está submetida deve ser equilibrada por uma força resultante para cima exercida pela água que está do lado de fora do saco.

Esta força resultante para cima é uma força $\vec{F}_E$, que recebe o nome de **força de empuxo**. Ela existe porque a pressão da água que envolve o saco aumenta com a profundidade. Assim, a pressão na parte inferior do saco é maior que na parte superior, o que equivale a dizer que as forças a que o saco está submetido devido à pressão são maiores em módulo na parte inferior do saco do que na parte superior. Algumas dessas forças estão representadas na Fig. 14-10*a*, onde o espaço ocupado pelo saco foi deixado vazio. Note que os vetores que representam as forças na parte de baixo do saco (com componentes para cima) são mais compridos que os vetores que representam as forças na parte de cima do saco (com componentes para baixo). Quando somamos vetorialmente todas as forças exercidas pela água sobre o saco, as componentes horizontais se cancelam e a soma das componentes verticais é o empuxo $\vec{F}_E$ que age sobre o saco. (A força $\vec{F}_E$ está representada à direita da piscina na Fig. 14-10*a*.)

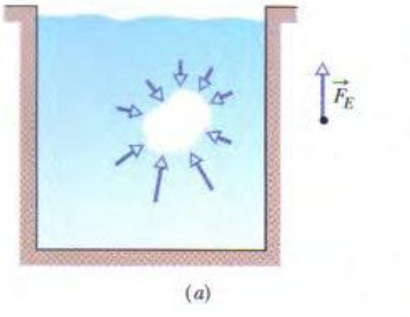



FIG. 14-10 (*a*) A água que está em volta da cavidade produz um empuxo resultante para cima sobre qualquer material que ocupe a cavidade. (*b*) No caso de uma pedra de mesmo volume que a cavidade, a força gravitacional é maior que o empuxo. (*c*) No caso de um pedaço de madeira de mesmo volume, a força gravitacional é menor que o empuxo.

Como o saco de água está em equilíbrio estático, o módulo de $\vec{F}_E$ é igual ao módulo $m_f g$ da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o saco com água: $F_E = m_f g$. (O índice *f* significa *fluido*, no caso água.) Em palavras, o módulo do empuxo é igual ao peso da água no interior do saco.

Na Fig. 14-10*b*, trocamos o saco de água por uma pedra que ocupa um volume exatamente igual ao do espaço vazio da Fig. 14-10*a*. Dizemos que a pedra *desloca* a água, ou seja, ocupa o espaço que de outra forma seria ocupado pela água. Como a forma da cavidade não foi alterada, as forças na superfície da cavidade são as mesmas que quando o saco com água estava no lugar. Assim, o mesmo empuxo para cima que agia sobre o saco com água agora age sobre a pedra, ou seja, o módulo $F_E$ do empuxo é igual a $m_f g$, o peso da água deslocada pela pedra.

Ao contrário do saco com água, a pedra não está em equilíbrio estático. A força gravitacional $\vec{F}_g$ para baixo que age sobre a pedra tem um módulo maior que o empuxo para cima, como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 14-10*b*. Assim, a pedra acelera para baixo, descendo até o fundo da piscina.

Vamos agora preencher a cavidade da Fig. 14-10*a* com um pedaço de madeira, como mostra a Fig. 14-10*c*. Mais uma vez, nada mudou com relação às forças que agem sobre a superfície da cavidade, de modo que o módulo $F_E$ do empuxo é igual a $m_f g$, o peso da água deslocada. Como a pedra, o pedaço de madeira não está em equilíbrio estático. Neste caso, porém, o módulo $F_g$ da força gravitacional é menor que o módulo $F_E$ do empuxo (como mostra o diagrama à direita da piscina), de modo que a madeira acelera para cima, subindo até a superfície.

Nossos resultados para o saco, a pedra e o pedaço de madeira se aplicam a qualquer fluido, e podem ser resumidos no **princípio de Arquimedes:**

> Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido uma força de empuxo $\vec{F}_E$ exercida pelo fluido age sobre o corpo. A força é dirigida para cima e tem um módulo igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pelo corpo.

De acordo com princípio de Arquimedes, o módulo da força de empuxo é dado por

$$F_E = m_f g \quad \text{(força de empuxo)}, \tag{14-16}$$

onde $m_f$ é a massa do fluido deslocado pelo corpo.

## Flutuação

Quando pousamos um pedaço de madeira na superfície de uma piscina, a madeira começa a afundar na água porque é puxada para baixo pela força gravitacional. À medida que o bloco desloca mais e mais água o módulo $F_E$ da força de empuxo, que aponta para cima, aumenta. Finalmente, $F_E$ se torna igual ao módulo $F_g$ da força gravitacional e a madeira pára de afundar. A partir desse momento o pedaço de madeira permanece em equilíbrio estático, e dizemos que está *flutuando* na água. Em todos os casos,

Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo $F_E$ da força de empuxo que age sobre o corpo é igual ao módulo $F_g$ da força gravitacional a que o corpo está submetido.

Podemos escrever esta afirmação como

$$F_E = F_g \quad \text{(flutuação)}. \tag{14-17}$$

De acordo com a Eq. 14-16, $F_E = m_f g$. Assim,

Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo $F_g$ da força gravitacional a que o corpo está submetido é igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pelo corpo.

Podemos escrever esta afirmação como

$$F_g = m_f g \quad \text{(flutuação)}. \tag{14-18}$$

Em outras palavras, um corpo que flutua desloca um peso de fluido igual ao seu próprio peso.

## Peso Aparente em um Fluido

Se colocamos uma pedra sobre uma balança calibrada para medir pesos a leitura da balança é o peso da pedra. Se, porém, repetimos a experiência debaixo d'água a força de empuxo a que a pedra é submetida diminui a leitura da balança. Esta leitura passa a ser, portanto, um peso aparente. O **peso aparente** de um corpo está relacionado ao peso real e à força de empuxo através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{real}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{módulo da}\\ \text{força de empuxo}\end{pmatrix},$$

que pode ser escrita na forma

$$\text{peso}_{ap} = \text{peso} - F_E \quad \text{(peso aparente)}. \tag{14-19}$$

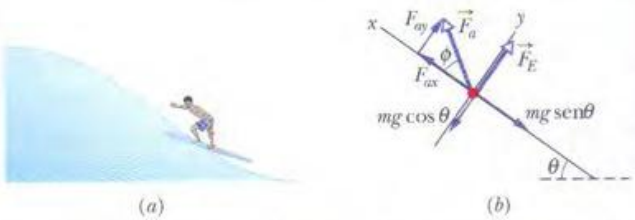
Se em um teste de força você tivesse que levantar uma pedra pesada, poderia fazer isso com mais facilidade debaixo d'água. Nesse caso, a força aplicada teria que ser maior que o peso aparente da pedra e não que o peso real, pois a força de empuxo o ajudaria a levantar a pedra.

O módulo da força de empuxo a que está sujeito um corpo que flutua é igual ao peso do corpo. A Eq. 14-19 nos diz, portanto, que um corpo que flutua tem um peso aparente igual a zero; o corpo produziria uma leitura zero ao ser pesado em uma balança. (Quando os astronautas se preparam para realizar uma tarefa complexa no espaço usam uma piscina para praticar, pois na água seu peso aparente é nulo, como no espaço.)

✓ **TESTE 2** Um pingüim flutua, primeiro em um fluido de massa específica $\rho_0$, depois em um fluido de massa específica $0{,}95\rho_0$ e, finalmente, em um fluido de massa específica $1{,}1\rho_0$. (a) Ordene as massas específicas de acordo com o módulo da força de empuxo exercida pelo pingüim, da maior para a menor. (b) Ordene as massas específicas de acordo com o volume de fluido deslocado pelo pingüim, do maior para o menor.

## Exemplo 14-4

Na Fig. 14-11*a* um surfista está na parte dianteira de uma onda, em um ponto no qual uma tangente à onda tem uma inclinação $\theta = 30{,}0°$. A massa total do surfista e da prancha é $m = 83{,}0$ kg, e o volume submerso da prancha é $V = 2{,}50 \times 10^{-2}$ m$^3$. O surfista mantém sua posição em relação à onda quando esta se move com velocidade constante em direção à praia. Quais são o módulo e a orientação (em relação ao semi-eixo $x$ positivo da Fig. 14-11*b*) da força de arrasto que a água exerce sobre o surfista?




(*a*) (*b*)

**FIG. 14-11** (*a*) Surfista. (*b*) Diagrama de corpo livre do sistema surfista-prancha.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A força de empuxo a que o surfista está submetido tem um módulo $F_E$ igual ao peso da água do mar deslocada pelo volume submerso da prancha. Esta força é perpendicular à superfície na posição do surfista. (2) De acordo com a segunda lei de Newton, como o surfista se move com velocidade constante em direção à praia, a soma (vetorial) da força de empuxo $\vec{F}_E$, da força gravitacional $\vec{F}_g$ e da força de arrasto $\vec{F}_a$ deve ser nula.

***Cálculos:*** O diagrama de corpo livre da Fig. 14-11*b* mostra as forças e suas componentes. A força gravitacional $\vec{F}_g$ aponta para baixo e (como vimos no Capítulo 5) tem uma componente $mg$ sen $\theta$ ao longo da superfície inclinada da onda e uma componente $mg$ cos $\theta$ da direção perpendicular à superfície da onda. Uma força de arrasto $\vec{F}_a$ é exercida pela água sobre a prancha porque a água sobe continuamente a onda enquanto a onda se desloca em direção à praia. Esta força está orientada para cima e para trás, e faz um ângulo $\phi$ com o eixo $x$. A força de empuxo $\vec{F}_E$ é perpendicular à superfície da água; de acordo com a Eq. 14-16 ($F_E = m_f g$), o módulo dessa força depende da massa $m_f$ da água deslocada pela prancha. De acordo com a Eq. 14-2 ($\rho = m/V$), podemos escrever a massa em termos da massa específica da água do mar, $\rho_a$, e do volume submerso $V$ da prancha: $m_f = \rho_a V$. De acordo com a Tabela 14-1, a massa específica da água do mar é $\rho_a = 1{,}024 \times 10^3$ kg/m$^3$. Assim, o módulo da força de empuxo é

$$\begin{aligned} F_E &= m_f g = \rho_a V g \\ &= (1{,}024 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(2{,}50 \times 10^{-2} \text{ m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2) \\ &= 2{,}509 \times 10^2 \text{ N}. \end{aligned}$$

Nesse caso, aplicando a segunda lei de Newton ao eixo $y$, temos:

$$F_{ay} + F_E - mg\cos\theta = m(0),$$

e, portanto,

$$F_{ay} + 2{,}509 \times 10^2 \text{ N} - (83 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)\cos 30{,}0° = 0,$$

e

$$F_{ay} = 453{,}5 \text{ N}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton ao eixo $x$, temos:

$$F_{ax} - mg \text{ sen } \theta = m(0),$$

e

$$F_{ax} = 406{,}7 \text{ N}.$$

Combinando as duas componentes da força de arrasto, verificamos que o módulo da força é

$$\begin{aligned} F_a &= \sqrt{(406{,}7 \text{ N})^2 + (453{,}5 \text{ N})^2} \\ &= 609 \text{ N} \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

e o ângulo é

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{453{,}5 \text{ N}}{406{,}7 \text{ N}}\right) = 48{,}1°. \qquad \text{(Resposta)}$$

***Mantendo o controle:*** Se o surfista inclina a prancha ligeiramente para cima, o módulo da força de arrasto diminui e o ângulo $\phi$ muda. Em conseqüência, a força resultante deixa de ser nula e o surfista desce em relação à onda. Esta decida é, até certo ponto, auto-regulada, porque quando o surfista desce o ângulo $\theta$ de inclinação da onda diminui, e o mesmo acontece com a componente $mg$ sen $\theta$ da força gravitacional que age sobre o surfista. Assim, o equilíbrio é restabelecido com o surfista em uma nova posição (mais baixa) em relação à onda. Da mesma forma, inclinando a prancha ligeiramente para baixo, o surfista aumenta a força de arrasto e sobe em relação à onda. Se o surfista se encontra na parte mais baixa da onda, $\theta$ e $mg$ sen $\theta$ aumentam e o equilíbrio é restabelecido com o surfista em uma nova posição (mais alta) em relação à onda.

**Exemplo 14-5**

Na Fig. 14-12, um bloco de massa específica $\rho = 800\ \text{kg/m}^3$ flutua em um fluido de massa específica $\rho_f = 1200\ \text{kg/m}^3$. O bloco tem uma altura $H = 6{,}0$ cm.

(a) Qual é a altura $h$ da parte submersa do bloco?

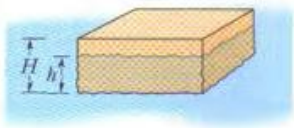



FIG. 14-12 Um bloco de altura $H$ flutuando em um fluido com uma parte $h$ submersa.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Para que o bloco flutue, a força de empuxo que age sobre ele deve ser igual à força gravitacional. (2) A força de empuxo é igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pela parte submersa do bloco.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 14-16, o módulo da força de empuxo é $F_E = m_f g$, onde $m_f$ é a massa do fluido deslocado pelo volume submerso do bloco, $V_f$. De acordo com a Eq. 14-2 ($\rho = m/V$), a massa do fluido deslocado é $m_f = \rho_f V_f$. Não conhecemos $V_f$, mas se chamarmos o comprimento do bloco de $C$ e a largura de $L$, o volume submerso do bloco será, de acordo com a Fig. 14-12, $V_f = CLh$. Combinando as três expressões, descobrimos que o módulo da força de empuxo é dado por

$$F_E = m_f g = \rho_f V_f g = \rho_f CLhg. \qquad (14\text{-}20)$$

Da mesma forma, podemos escrever o módulo $F_g$ da força gravitacional a que o bloco está submetido, primeiro em termos da massa $m$ do bloco e depois em termos da massa específica $\rho$ e do volume (total) $V$ do bloco, que, por sua vez, pode ser expresso em termos das dimensões do bloco, $C$, $L$ e $H$ (altura total):

$$F_g = mg = \rho Vg = \rho_f CLHg. \qquad (14\text{-}21)$$

Como o bloco está em repouso, a aplicação da segunda lei de Newton às componentes das forças em relação a um eixo vertical $y$ ($F_{\text{res},y} = ma_y$) nos dá

$$F_E - F_g = m(0),$$

ou, de acordo com as Eqs. 14-20 e 14-21,

$$\rho_f CLhg - \rho CLHg = 0,$$

e, portanto,

$$h = \frac{\rho}{\rho_f} H = \frac{800\ \text{kg/m}^3}{1200\ \text{kg/m}^3}(6{,}0\ \text{cm})$$
$$= 4{,}0\ \text{cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Se o bloco é totalmente imerso e depois liberado, qual é o módulo da sua aceleração?

***Cálculos:*** A força gravitacional que age sobre o bloco é a mesma, mas agora, com o bloco totalmente submerso, o volume da água deslocada é $V = CLH$. (É usada a altura total do bloco.) Isso significa que $F_E > F_g$ e o bloco é acelerado para cima. De acordo com a segunda lei de Newton,

$$F_E - F_g = ma,$$

ou
$$\rho_f CLHg - \rho CLHg = \rho CLHa,$$

onde substituímos a massa do bloco por $\rho CLH$. Explicitando $a$, obtemos

$$a = \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1\right) g = \left(\frac{1200\ \text{kg/m}^3}{800\ \text{kg/m}^3} - 1\right)(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 4{,}9\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

## 14-8 | Fluidos Ideais em Movimento

O movimento de *fluidos reais* é muito complicado, e ainda não está perfeitamente compreendido. Por essa razão, vamos discutir apenas o movimento de um **fluido ideal**, que é mais fácil de analisar matematicamente. Nosso fluido ideal satisfaz quatro requisitos, que estão relacionados ao seu *escoamento*:

1. ***Escoamento laminar*** No *escoamento laminar*, a velocidade do fluido em um ponto fixo qualquer não varia com o tempo, nem em módulo nem em orientação. O escoamento suave da água no centro de um rio de águas calmas é estacionário; o escoamento da água em uma corredeira, não. A Fig. 14-13 mostra a transição de escoamento laminar para *turbulento* em um fluxo de fumaça. A velocidade das partículas de fumaça aumenta à medida que sobem; para um certo valor crítico da velocidade, o escoamento muda de laminar para turbulento.
2. ***Escoamento incompressível*** Supomos, como para fluidos em repouso, que nosso fluido ideal é incompressível, ou seja, que sua massa específica tem um valor uniforme e constante.
3. ***Escoamento não-viscoso*** Em termos coloquiais, a viscosidade de um fluido é uma medida da resistência que o fluido oferece ao escoamento. Assim, por

FIG. 14-13 Em certo ponto, o escoamento ascendente de fumaça e gás aquecido muda de laminar para turbulento. *(Will McIntyre/Photo Researchers)*

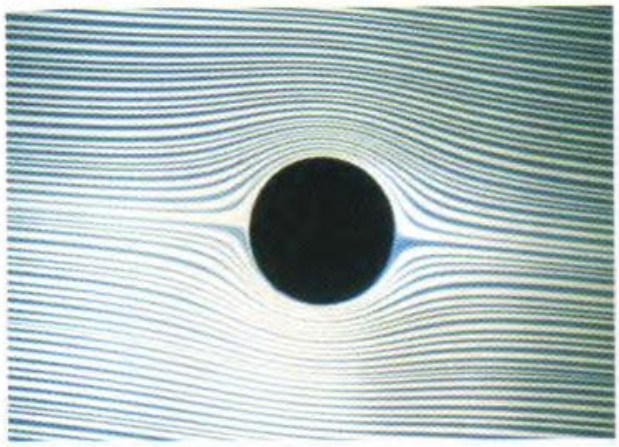


FIG. 14-14 O escoamento laminar de um fluido ao redor de um cilindro, revelado por um corante injetado no fluido antes que este passe pelo cilindro. *(Cortesia de D.H. Peregrine, University of Bristol)*

exemplo, o mel resiste mais ao escoamento que a água e, portanto, é mais viscoso do que a água. A viscosidade dos fluidos é análoga ao atrito entre sólidos; ambos são mecanismos através dos quais a energia cinética de objetos em movimento pode ser transferida para energia térmica. Na ausência de atrito, um bloco desliza com velocidade constante em uma superfície horizontal. Analogamente, um objeto imerso em um fluido não-viscoso não experimenta uma *força de arrasto viscoso* e se move com velocidade constante através do fluido. O cientista inglês Lorde Rayleigh observou que em um fluido ideal as hélices de um navio não funcionariam, mas, por outro lado, em um fluido ideal um navio (uma vez em movimento) não precisaria de hélices!

4. ***Escoamento irrotacional*** Embora a rigor não seja necessário, vamos também supor que o escoamento é *irrotacional*. Para entender o que significa esta propriedade, suponha que um pequeno grão de poeira se move com o fluido. Se o escoamento é irrotacional, este grão de areia não gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, embora possa girar em torno de um outro eixo qualquer. O movimento de uma roda gigante, por exemplo, é rotacional, enquanto o movimento dos passageiros é irrotacional.

Podemos observar o escoamento de um fluido usando um *traçador*, que pode ser constituído por gotas de corante injetadas em vários pontos de um líquido (Fig. 14-14) ou por partículas de fumaça misturadas a um gás (Fig. 14-13). Cada gota ou partícula de um traçador torna visível uma *linha de fluxo*, que é a trajetória seguida por um pequeno elemento do fluido. Como vimos no Capítulo 4, a velocidade de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula. Neste caso, a partícula é o elemento do fluido e sua velocidade $\vec{v}$ é sempre tangente a uma linha de fluxo (Fig. 14-15). Por essa razão, duas linhas de fluxo jamais se cruzam; se o fizessem, uma partícula que chegasse ao ponto de interseção poderia ter ao mesmo tempo duas velocidades diferentes, o que seria um absurdo.

## 14-9 | A Equação de Continuidade

FIG. 14-15 Um elemento do fluido traça uma linha de fluxo ao se deslocar. O vetor velocidade do elemento é tangente à linha de fluxo em todos os pontos.

Você provavelmente já observou que é possível aumentar a velocidade da água que sai de uma mangueira de jardim fechando parcialmente o bico da mangueira com o polegar. Esta é uma demonstração prática do fato de que a velocidade $v$ da água depende da área de seção reta $A$ através da qual a água escoa.

Vamos agora deduzir uma expressão que relaciona $v$ e $A$ no caso do escoamento laminar de um fluido ideal em um tubo de seção reta variável, como o da Fig. 14-16. O escoamento é para a direita e o segmento de tubo mostrado (parte de um tubo mais longo) tem comprimento $L$. A velocidade do fluido é $v_1$ na extremidade esquerda e $v_2$ na extremidade direita. A área da seção reta do tubo é $A_1$ na extremidade esquerda e $A_2$ na extremidade direita. Suponha que em um intervalo de tempo $\Delta t$ um volume

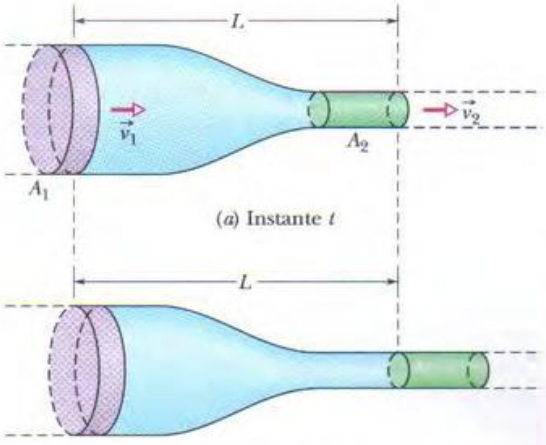



FIG. 14-16 Um fluido escoa da esquerda para a direita com vazão constante através de um segmento de tubo de comprimento $L$. A velocidade do fluido é $v_1$ no lado esquerdo e $v_2$ no lado direito. A área de seção reta é $A_1$ no lado esquerdo e $A_2$ no lado direito. Do instante $t$ em (*a*) até o instante $t + \Delta t$ em (*b*), a quantidade de fluido mostrada em cor violeta entra do lado esquerdo e uma quantidade igual, mostrada em cor verde, sai do lado direito.

$\Delta V$ do fluido entre no segmento de tubo pela extremidade esquerda (este volume é violeta na Fig. 14-16). Como o fluido é incompressível, um volume igual $\Delta V$ deve sair pela extremidade direita do tubo (este volume é verde na Fig. 14-16).

Podemos usar este volume $\Delta V$ comum às duas extremidades para relacionar as velocidades e áreas. Para isso, consideremos primeiramente a Fig. 14-17, que mostra uma vista lateral de um tubo de seção reta *uniforme* de área $A$. Na Fig. 14-17*a*, um elemento $e$ do fluido está prestes a passar pela reta tracejada perpendicular ao eixo do tubo. Se a velocidade do elemento é $v$, durante um intervalo de tempo $\Delta t$ o elemento percorre uma distância $\Delta x = v\Delta t$ ao longo do tubo. O volume $\Delta V$ do fluido que passa pela reta tracejada durante este intervalo de tempo $\Delta t$ é

$$\Delta V = A\,\Delta x = Av\,\Delta t. \tag{14-22}$$

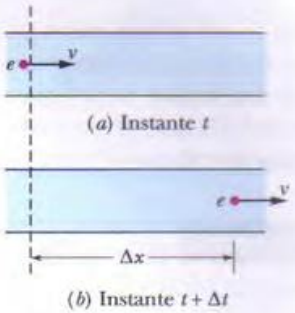



FIG. 14-17 Um fluido escoa com velocidade $v$ constante em um tubo. (*a*) No instante $t$, o elemento do fluido $e$ está prestes a passar pela reta tracejada. (*b*) No instante $t + \Delta t$, o elemento $e$ está a uma distância $\Delta x = v\Delta t$ da reta tracejada.

Aplicando a Eq. 14-22 às duas extremidades do segmento de tubo da Fig. 14-14, temos:

$$\Delta V = A_1 v_1\,\Delta t = A_2 v_2\,\Delta t$$

ou

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(equação de continuidade)}. \tag{14-23}$$

Esta relação entre velocidade e área da seção reta é chamada de **equação de continuidade** para o escoamento de um fluido ideal. Ela nos diz que a velocidade do escoamento aumenta quando a área da seção reta através da qual o fluido escoa é reduzida (como acontece quando fechamos parcialmente o bico de uma mangueira de jardim com o polegar).

A Eq. 14-23 se aplica não só a um tubo real, mas também a qualquer *tubo de fluxo*, um tubo imaginário limitado por linhas de fluxo. Um tubo de fluxo se comporta como um tubo real porque nenhum elemento do fluido pode cruzar uma linha de fluxo; assim, todo o fluido contido em um tubo de fluxo permanece indefinidamente no seu interior. A Fig. 14-18 mostra um tubo de fluxo no qual a área de seção reta aumenta de $A_1$ para $A_2$ no sentido do escoamento. De acordo com a Eq. 14-23, com o aumento da área a velocidade deve diminuir, como mostra o espaçamento maior das linhas de fluxo no lado direito da Fig. 14-18. De modo semelhante, o menor espaçamento das linhas de fluxo na Fig. 14-14 revela que a velocidade de escoamento é maior logo acima e logo abaixo do cilindro.

A Eq. 14-23 pode ser escrita na forma

$$R_V = Av = \text{constante} \qquad \text{(vazão, equação de continuidade)}, \tag{14-24}$$

onde $R_V$ é a **vazão** do fluido (volume que passa por uma seção reta por unidade de tempo). A unidade de vazão no SI é o metro cúbico por segundo ($m^3/s$). Se a massa específica $\rho$ do fluido é uniforme, podemos multiplicar a Eq. 14-24 por essa massa específica para obter a **vazão mássica** $R_m$ (massa por unidade de tempo):

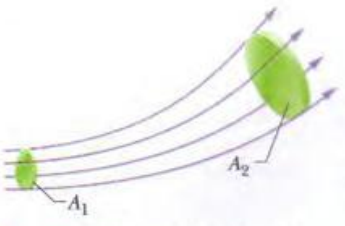
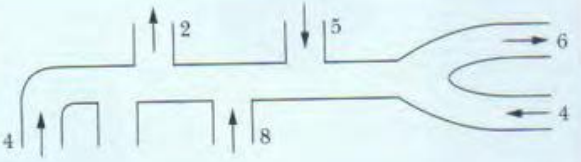



FIG. 14-18 Um tubo de fluxo é definido pelas linhas de fluxo que o envolvem. A vazão é a mesma em todas as seções retas de um tubo de fluxo.

$$R_m = \rho R_V = \rho A v = \text{constante} \quad \text{(vazão mássica)}. \tag{14-25}$$

A unidade de vazão mássica no SI é o quilograma por segundo (kg/s). A Eq. 14-25 nos diz que a massa que entra no segmento de tubo da Fig. 14-16 por segundo deve ser igual à massa que sai do segmento por segundo.

**TESTE 3** A figura mostra um encanamento e indica a vazão (em cm³/s) e o sentido do escoamento em todos os canos exceto um. Quais são a vazão e o sentido do escoamento neste cano?




## Exemplo 14-6

A Fig. 14-19 mostra que o jato de água que sai de uma torneira fica progressivamente mais fino durante a queda. As áreas das seções retas indicadas são $A_0 = 1{,}2\ \text{cm}^2$ e $A = 0{,}35\ \text{cm}^2$. Os dois níveis estão separados por uma distância vertical $h = 45$ mm. Qual é a vazão da torneira?

**IDÉIA-CHAVE** A vazão na seção reta maior deve ser igual à vazão na seção reta menor.

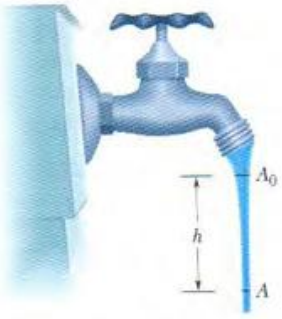



**FIG. 14-19** Quando a água cai de uma torneira, sua velocidade aumenta. Como a vazão deve ser a mesma em todas as seções retas horizontais, o jorro tem que ficar mais estreito.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 14-24, temos:

$$A_0 v_0 = A v, \tag{14-26}$$

onde $v_0$ e $v$ são as velocidades da água nos níveis correspondentes a $A_0$ e $A$. De acordo com a Eq. 2-16, também podemos escrever, já que a água cai livremente com aceleração $g$,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \tag{14-27}$$

Combinando as Eqs. 14-26 e 14-27 para eliminar $v$ e explicitando $v_0$, obtemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}045\ \text{m})(0{,}35\ \text{cm}^2)^2}{(1{,}2\ \text{cm}^2)^2 - (0{,}35\ \text{cm}^2)^2}}$$

$$= 0{,}286\ \text{m/s} = 28{,}6\ \text{cm/s}.$$

De acordo com a Eq. 14-24, a vazão $R_V$ é, portanto,

$$R_V = A_0 v_0 = (1{,}2\ \text{cm}^2)(28{,}6\ \text{cm/s})$$

$$= 34\ \text{cm}^3/\text{s}. \quad \text{(Resposta)}$$

## 14-10 | A Equação de Bernoulli

A Fig. 14-20 mostra um tubo através do qual um fluido ideal escoa com vazão constante. Suponha que, em um intervalo de tempo $\Delta t$, um volume $\Delta V$ do fluido, de cor violeta na Fig. 14-20, entra pela extremidade esquerda (entrada) do tubo e um volume igual, de cor verde na Fig. 14-20, sai pela extremidade direita (saída) do tubo. Como o fluido é incompressível, com uma massa específica constante $\rho$, o volume que sai deve ser igual ao volume que entra.

Sejam $y_1$, $v_1$ e $p_1$ a altura, a velocidade e a pressão do fluido que entra do lado esquerdo, e $y_2$, $v_2$ e $p_2$ os valores correspondentes do fluido que sai do lado direito. Aplicando ao fluido a lei de conservação da energia, vamos mostrar que esses valores estão relacionados através da equação

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \tag{14-28}$$

onde o termo $\frac{1}{2}\rho v^2$ é chamado de **energia cinética específica** (energia cinética por unidade de volume) do fluido. A Eq. 14-28 também pode ser escrita na forma

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \text{(equação de Bernoulli).} \qquad (14\text{-}29)$$

As Eqs. 14-28 e 14-29 são formas equivalentes da **equação de Bernoulli**, que tem este nome por causa de Daniel Bernoulli, que estudou o escoamento de fluidos no século XVIII.* Como a equação da continuidade (Eq. 14-24), a equação de Bernoulli não é um princípio novo, mas simplesmente uma reformulação de um princípio conhecido em uma forma mais adequada para a mecânica dos fluidos. Como teste, vamos aplicar a equação de Bernoulli a um fluido em repouso, fazendo $v_1 = v_2 = 0$ na Eq. 14-28. O resultado é

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2),$$

que é a Eq. 14-7.

Uma previsão importante da equação de Bernoulli surge quando supomos que $y$ é constante ($y = 0$, digamos), ou seja, que a altura do fluido não varia. Nesse caso, a Eq. 14-28 se torna

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2, \qquad (14\text{-}30)$$

ou, em palavras,

> Se a velocidade de um fluido aumenta enquanto ele se move horizontalmente ao longo de uma linha de fluxo, a pressão do fluido diminui, e vice-versa.

Isso significa que nas regiões em que as linhas de fluxo estão mais concentradas (ou seja, em que a velocidade é maior) a pressão é menor, e vice-versa.

A relação entre uma mudança de velocidade e uma mudança de pressão faz sentido quando consideramos um elemento do fluido. Quando o elemento se aproxima de uma região estreita a pressão mais elevada atrás dele o acelera, de modo que ele adquire uma velocidade maior. Quando o elemento se aproxima de uma região mais larga a pressão maior à frente o desacelera, de modo que ele adquire uma velocidade menor.

A equação de Bernoulli é estritamente válida apenas para fluidos ideais. Quando forças viscosas estão presentes parte da energia é convertida em energia térmica. Na demonstração que se segue vamos supor que o fluido é ideal.

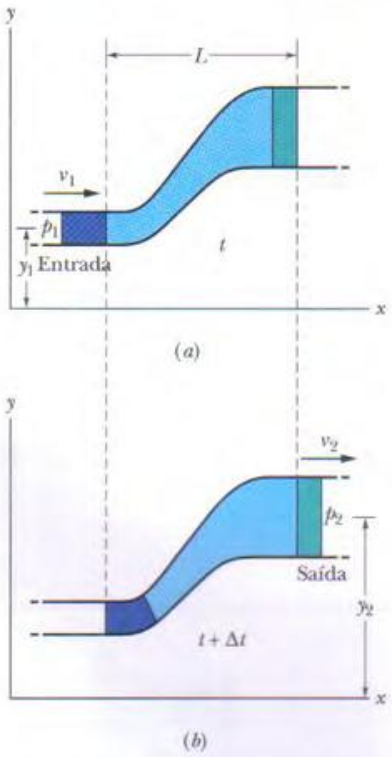



**FIG. 14-20** Um fluido escoa com vazão constante através de um comprimento $L$ de um tubo, da extremidade de entrada, à esquerda, até a extremidade de saída, à direita. Do instante $t$ em ($a$) ao instante $t + \Delta t$ em ($b$) uma quantidade de fluido, representada na cor violeta, entra pela extremidade esquerda e uma quantidade igual, representada na cor verde, sai pela extremidade direita.

## Demonstração da Equação de Bernoulli

Vamos considerar como nosso sistema o volume inteiro do fluido (ideal) da Fig. 14-20. Vamos aplicar a lei de conservação da energia a este sistema quando ele se move do estado inicial (Fig. 14-20*a*) para o estado final (Fig. 14-20*b*). O fluido que está entre os dois planos verticais separados por uma distância $L$ na Fig. 14-20 não muda suas propriedades durante esse processo; precisamos nos preocupar apenas com as mudanças que ocorrem nas extremidades de entrada e saída.

Para começar, aplicamos a lei de conservação da energia na forma do teorema do trabalho e energia cinética,

$$W = \Delta K, \qquad (14\text{-}31)$$

que nos diz que a variação da energia cinética do nosso sistema deve ser igual ao trabalho total realizado sobre o sistema. A variação da energia cinética é uma conseqüência da variação da velocidade do fluido entre as extremidades do tubo, e é dada por

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho\, \Delta V(v_2^2 - v_1^2), \qquad (14\text{-}32)$$

*Se a vazão for irrotacional (como estamos supondo neste livro), a constante da Eq. 14-29 tem o mesmo valor em todos os pontos do tubo; os pontos não precisam pertencer à mesma linha de fluxo. Da mesma forma, na Eq. 14-28 os pontos 1 e 2 podem estar em qualquer lugar do tubo.

onde $\Delta m$ ($= \rho \Delta V$) é a massa do fluido que entra em uma extremidade e sai pela outra extremidade durante um pequeno intervalo de tempo $\Delta t$.

O trabalho realizado sobre o sistema tem duas origens. O trabalho $W_g$ realizado pela força gravitacional ($\Delta m\, \vec{g}$) sobre o fluido de massa $\Delta m$ durante a subida da massa do nível da entrada até o nível da saída é dado por

$$W_g = -\Delta m\, g(y_2 - y_1)$$
$$= -\rho g\, \Delta V\, (y_2 - y_1). \qquad (14\text{-}33)$$

Este trabalho é negativo, porque o deslocamento para cima e a força gravitacional para baixo têm sentidos opostos.

Algum trabalho também precisa ser realizado *sobre* o sistema (na extremidade de entrada) para empurrar o fluido para dentro do tubo e *pelo* sistema (na extremidade de saída) para empurrar o fluido que está mais adiante no tubo. O trabalho realizado por uma força de módulo $F$, agindo sobre uma amostra do fluido contida em um tubo de área $A$ para mover o fluido a uma distância $\Delta x$, é

$$F\,\Delta x = (pA)(\Delta x) = p(A\,\Delta x) = p\,\Delta V.$$

O trabalho realizado sobre o sistema é, portanto, $p_1\,\Delta V$, e o trabalho realizado pelo sistema é $-p_2\,\Delta V$. A soma dos dois trabalhos, $W_p$, é

$$W_p = -p_2\,\Delta V + p_1\,\Delta V$$
$$= -(p_2 - p_1)\,\Delta V. \qquad (14\text{-}34)$$

Assim, a Eq. 14-31 se torna

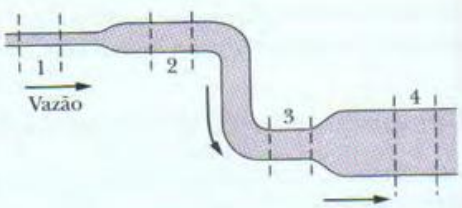
$$W = W_g + W_p = \Delta K.$$

Combinando as Eqs. 14-32, 14-33 e 14-34, obtemos

$$-\rho g\,\Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \tfrac{1}{2}\rho\,\Delta V(v_2^2 - v_1^2).$$

Cancelando $\Delta V$ e reagrupando os termos, obtemos a Eq. 14-28, que queríamos demonstrar.

**TESTE 4** A água escoa suavemente pela tubulação da figura, descendo no processo. Ordene as quatro seções numeradas da tubulação de acordo com (a) a vazão $R_V$, (b) a velocidade $v$ e (c) a pressão $p$ do fluido, em ordem decrescente.




## Exemplo 14-7

Um cano horizontal de calibre variável (como o da Fig. 14-16), cuja seção reta muda de $A_1 = 1{,}20 \times 10^{-3}\ m^2$ para $A_2 = A_1/2$, conduz um fluxo laminar de etanol, de massa específica $\rho = 791\ kg/m^3$. A diferença de pressão entre a parte larga e a parte estreita do cano é 4120 Pa. Qual é a vazão $R_V$ de etanol?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Como todo fluido que passa pela parte mais larga do cano também passa pela parte mais estreita, a vazão $R_V$ deve ser a mesma nas duas partes. Assim, de acordo com a Eq. 14-24,

$$R_V = v_1 A_1 = v_2 A_2. \qquad (14\text{-}35)$$

Entretanto, como não conhecemos as duas velocidades, não podemos calcular $R_V$ a partir desta equação. (2) Como o escoamento é laminar, podemos aplicar a equação de Bernoulli. De acordo com a Eq. 14-28, temos:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y, \qquad (14\text{-}36)$$

onde os índices 1 e 2 se referem às partes larga e estreita do cano, respectivamente, e $y$ é a altura comum às duas partes. Esta equação não parece muito útil para a solução do problema, pois não contém a vazão procurada $R_V$ e contém as velocidades desconhecidas $v_1$ e $v_2$.

***Cálculos:*** Existe uma forma engenhosa de fazer a Eq. 14-36 trabalhar para nós. Primeiro, podemos usar a Eq. 14-35 e o fato de que $A_2 = A_1/2$ para escrever

$$v_1 = \frac{R_V}{A_1} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{R_V}{A_2} = \frac{2R_V}{A_1}. \tag{14-37}$$

Em seguida, podemos substituir essas expressões na Eq. 14-36 para eliminar as velocidades desconhecidas e introduzir a vazão procurada. Fazendo isso e explicitando $R_V$, obtemos

$$R_V = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}}. \tag{14-38}$$

Ainda temos uma decisão a tomar. Sabemos que a diferença de pressão entre as duas partes é 4120 Pa, mas isso significa que $p_1 - p_2 = 4120$ Pa ou $-4120$ Pa? Podemos supor que a primeira hipótese deve ser a verdadeira, pois de outra forma a raiz quadrada na Eq. 14-38 não seria um número real. Em vez disso, porém, vamos raciocinar um pouco. De acordo com a Eq. 14-35, a velocidade $v_2$ na parte estreita deve ser maior do que a velocidade $v_1$ na parte larga para que os produtos $v_1A_1$ e $v_2A_2$ sejam iguais. Sabemos também que se a velocidade de um fluido aumenta enquanto ele escoa em um cano horizontal (como neste caso), a pressão do fluido diminui. Assim, $p_1$ é maior que $p_2$, e $p_1 - p_2 = 4120$ Pa. Substituindo este resultado e os valores conhecidos na Eq. 14-38, obtemos

$$R_V = 1{,}20\times10^{-3}\ \text{m}^2\sqrt{\frac{(2)(4120\ \text{Pa})}{(3)(791\ \text{kg/m}^3)}}$$
$$= 2{,}24\times10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 14-8

No velho Oeste, um bandido atira em uma caixa d'água sem tampa (Fig. 14-21), abrindo um furo a uma distância $h$ da superfície da água. Qual é a velocidade $v$ da água ao sair da caixa d'água?

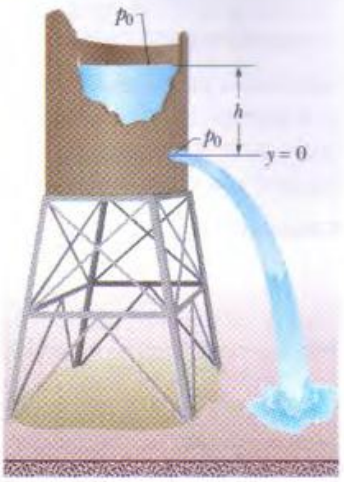



**FIG. 14-21** A água sai de um tanque por um furo situado a uma distância $h$ da superfície da água. A pressão na superfície da água e no local do furo é a pressão atmosférica $p_0$.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Esta situação é equivalente à da água descendo com velocidade $v_0$ por um cano largo (o tanque) de seção reta $A$ e depois se movendo (horizontalmente) com velocidade $v$ em um cano estreito (o furo) de seção reta $a$. (2) Como toda água que passa pelo cano largo passa também pelo cano estreito, a vazão $R_V$ deve ser a mesma nos dois "canos". (3) Podemos também relacionar $v$ a $v_0$ (e a $h$) através da equação de Bernoulli (Eq. 14-28).

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 14-24,

$$R_V = av = Av_0$$

e portanto

$$v_0 = \frac{a}{A}v.$$

Como $a \ll A$, vemos que $v_0 \ll v$. Para aplicar a equação de Bernoulli tomamos o nível do furo como nosso nível de referência para a medida de altura (e, portanto, da energia potencial gravitacional). Notando que a pressão no alto da caixa d'água no local do furo é a pressão atmosférica $p_0$ (pois os dois locais estão expostos à atmosfera), escrevemos a Eq. 14-28 como

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0). \tag{14-39}$$

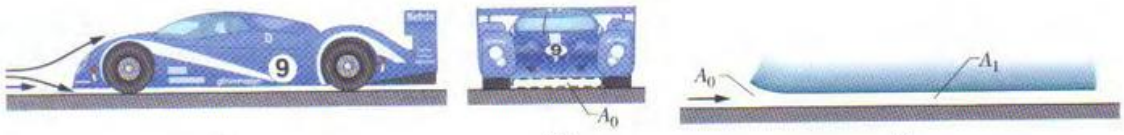
(O alto do tanque é representado pelo lado esquerdo da equação, e o furo pelo lado direito. O zero do lado direito indica que o furo está no nível de referência.) Antes de explicitar $v$ na Eq. 14-39, podemos usar nosso resultado de que $v_0 \ll v$ para simplificá-la: supomos que $v_0^2$, e portanto o termo $\frac{1}{2}\rho v_0^2$ na Eq. 14-39 é desprezível em comparação com os outros termos, e o abandonamos. Explicitando $v$ na equação restante, obtemos

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta é a mesma velocidade que um objeto teria se caísse de uma altura $h$ a partir do repouso.

## Exemplo 14-9 Aumente sua capacidade

Muitos modelos de carros de corrida utilizam a *sustentação negativa* (ou *downforce*) para aumentar o atrito dos pneus com a pista e poder fazer as curvas mais depressa sem derrapar. Parte da sustentação negativa se deve ao *efeito solo*, que é uma força associada ao fluxo de ar por baixo do carro. Quando o carro de corrida da Fig. 14-22 se desloca a 27,25 m/s, o ar é forçado a passar por cima e por baixo do carro (Fig. 14-22*a*). O ar que passa por baixo do carro entra por uma abertura na frente do carro cuja seção reta é $A_0 = 0{,}0330\ \text{m}^2$ (Fig. 14-22*b*) e passa pelo espaço entre o




(a) (b) (c)

FIG. 14-22 (a) O ar passa por cima e por baixo de um carro de corrida. (b) Na parte de baixo o ar entra por uma abertura de seção reta $A_0$. (c) Em seguida, o ar é comprimido em uma região de seção reta $A_1$.

fundo do carro e a pista, cuja seção reta é $A_1 = 0{,}0310\ \text{m}^2$. Trate este fluxo como o de um fluido ideal em cano estacionário horizontal, cuja seção reta diminui de $A_0$ para $A_1$ (Fig. 14-22*c*).

(a) No momento em que passa por $A_0$, o ar está à pressão atmosférica $p_0$. Qual é a pressão $p_1$ quando o ar passa por $A_1$?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Como o fluxo é laminar, podemos usar a equação de Bernoulli (Eq. 14-28). Nesse caso, a equação assume a forma

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g y = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y, \qquad (14\text{-}40)$$

onde $\rho$ é a massa específica do ar e $y$ é a distância entre o ar e a pista. (2) Como todo ar que entra pela abertura de seção reta $A_0$ passa pela região onde a seção reta é $A_1$, a vazão $R_V$ deve ser a mesma nas duas regiões.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 14-24, temos:

$$A_0 v_0 = A_1 v_1,$$

ou

$$v_1 = v_0 \frac{A_0}{A_1}. \qquad (14\text{-}41)$$

Substituindo a Eq. 14-41 na Eq. 14-40 e reagrupando os termos, temos:

$$p_1 = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 \left(\frac{A_0^2}{A_1^2} - 1\right). \qquad (14\text{-}42)$$

A velocidade do ar ao entrar em $A_0$, na frente do carro, é 27,25 m/s, a velocidade do carro em relação ao ar. Substituindo esta velocidade, a massa específica do ar $\rho = 1{,}21\ \text{kg/m}^3$ e os valores de $A_0$ e $A_1$ na Eq. 14-42, obtemos

$$p_1 = p_0 - \tfrac{1}{2}(1{,}21\ \text{kg/m}^3)(27{,}25\ \text{m/s})^2 \left(\frac{(0{,}0330\ \text{m}^2)^2}{(0{,}0310\ \text{m}^2)^2} - 1\right)$$

$$= p_0 - 59{,}838\ \text{Pa} \approx p_0 - 59{,}8\ \text{Pa}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a pressão do ar debaixo do carro é 59,8 Pa menor que a pressão atmosférica.

(b) Se a área da seção reta horizontal do carro é $A_h = 4{,}86\ \text{m}^2$, qual é o módulo da força resultante vertical $F_{\text{res},h}$ que age sobre o carro por causa da diferença de pressão acima e abaixo do carro?

**IDÉIA-CHAVE** De acordo com a Eq. 14-4 ($p = F/A$), a pressão a que uma superfície está sujeita é igual à força por unidade de área.

***Cálculos:*** Nesse caso, estamos interessados nas superfícies superior e inferior do carro. Vamos supor que as duas superfícies possuem a mesma área $A_h$. Acima do carro, o ar se encontra à pressão atmosférica $p_0$ e exerce uma força sobre o carro cuja componente vertical é dada por

$$F_{y,\text{acima}} = -p_0 A_h.$$

Abaixo do carro, o ar se encontra à pressão $p_1 = p_0 - 59{,}838\ \text{Pa}$ e exerce uma força sobre o carro cuja componente vertical é dada por

$$F_{y,\text{abaixo}} = (p_0 - 59{,}838\ \text{Pa})A_h.$$

A força vertical resultante é, portanto,

$$F_{\text{res},y} = F_{y,\text{abaixo}} + F_{y,\text{acima}}$$
$$= (p_0 - 59{,}838\ \text{Pa})A_h - p_0 A_h$$
$$= -(59{,}838\ \text{Pa})(4{,}86\ \text{m}^2) = -291\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

***O risco de "pegar o vácuo":*** Esta força resultante para baixo, que se deve à pressão reduzida que existe debaixo do carro, é chamada de efeito solo e é responsável por cerca de 30% da sustentação negativa que ajuda a manter o carro na pista. Se não houvesse a sustentação negativa um carro de corrida teria que reduzir drasticamente a velocidade nas curvas para não derrapar. Em uma corrida um piloto pode diminuir a resistência que o ar exerce sobre o seu carro seguindo de perto um outro carro, uma tática conhecida como *pegar o vácuo*. Entretanto, o carro da frente perturba o escoamento laminar do ar sob o carro de trás, eliminando o efeito solo. Se o piloto do carro de trás não reduzir a velocidade na curva para compensar a falta do efeito solo, uma derrapagem pode ser inevitável.

## REVISÃO E RESUMO

**Massa Específica** A **massa específica** $\rho$ de qualquer material é definida como a massa do material por unidade de volume:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \qquad (14\text{-}1)$$

Quando uma amostra do material é muito maior do que as dimensões atômicas, costumamos escrever a Eq. 14-1 na forma

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{14-2}$$

**Pressão de um Fluido** Um **fluido** é uma substância que pode escoar; ele se amolda aos contornos do recipiente porque não resiste a tensões de cisalhamento. Pode, porém, exercer uma força perpendicular à superfície. Essa força é descrita em termos da **pressão** $p$:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \tag{14-3}$$

onde $\Delta F$ é a força que age sobre um elemento da superfície de área $\Delta A$. Se a força é uniforme em uma área plana, a Eq. 14-3 pode ser escrita na forma

$$p = \frac{F}{A}. \tag{14-4}$$

A força associada à pressão em um ponto de um fluido tem o mesmo módulo em todas as direções. A **pressão manométrica** é a diferença entre a pressão real (ou *pressão absoluta*) em um ponto e a pressão atmosférica.

**Variação da Pressão com a Altura e com a Profundidade** A pressão em um fluido em repouso varia com a posição vertical $y$. Tomando como positivo o sentido para cima,

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \tag{14-7}$$

A pressão em um fluido é a mesma para todos os pontos situados à mesma altura. Se $h$ é a *profundidade* de uma amostra do fluido em relação a um nível de referência no qual a pressão é $p_0$, a Eq. 14-7 se torna

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{14-8}$$

onde $p$ é a pressão da amostra.

**Princípio de Pascal** Uma variação da pressão aplicada a um fluido incompressível contido em um recipiente é transmitida integralmente a todas as partes do fluido e às paredes do recipiente.

**Princípio de Arquimedes** Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido, uma força de empuxo $\vec{F}_E$ exercida pelo fluido age sobre o corpo. A força é dirigida para cima e tem um módulo dado por

$$F_E = m_f g, \tag{14-16}$$

onde $m_f$ é a massa do fluido deslocado pelo corpo.

Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo $F_E$ do empuxo (para cima) que age sobre o corpo é igual ao módulo $F_g$ da força gravitacional (para baixo) que age sobre ele. O **peso aparente** de um corpo sobre o qual atua um empuxo está relacionado ao peso real através da equação

$$\text{peso}_{ap} = \text{peso} - F_E. \tag{14-19}$$

**Escoamento de Fluidos Ideais** Um **fluido ideal** é incompressível, não tem viscosidade e seu escoamento é laminar e irrotacional. Uma *linha de fluxo* é a trajetória seguida por uma partícula do fluido. Um *tubo de fluxo* é um feixe de linhas de fluxo. O escoamento no interior de um tubo de fluxo obedece à **equação da continuidade**:

$$R_V = Av = \text{constante}, \tag{14-24}$$

onde $R_V$ é a **vazão**, $A$ é a área da seção reta do tubo de fluxo em qualquer ponto e $v$ é a velocidade do fluido nesse ponto. A **vazão mássica** $R_m$ é dada por

$$R_m = \rho R_V = \rho A v = \text{constante}. \tag{14-25}$$

**Equação de Bernoulli** A aplicação do princípio de conservação da energia mecânica ao escoamento de um fluido ideal leva à **equação de Bernoulli**:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \tag{14-29}$$

ao longo de qualquer tubo de fluxo.

## PERGUNTAS

1 *O efeito bule.* A água derramada lentamente de um bule pode mudar de sentido e escorrer por uma distância considerável por baixo do bico do bule, antes de se desprender e cair. (A água é mantida sob o bico pela pressão atmosférica.) Na Fig. 14-23, na camada de água do lado de dentro do bico, o ponto $a$ está no alto e o ponto $b$ está no fundo da camada; na camada de água do lado de fora do bico, o ponto $c$ está no alto e o ponto $d$ está no fundo da camada. Ordene os quatro pontos de acordo com a pressão manométrica a que a água está sujeita, da mais positiva para a mais negativa.

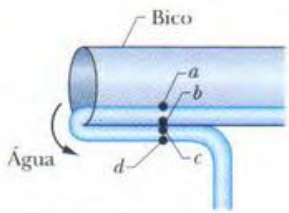


FIG. 14-23 Pergunta 1.

2 A Fig. 14-24 mostra um tanque cheio de água. Cinco pisos e tetos horizontais estão indicados; todos têm a mesma área e estão situados a uma distância $L$, $2L$ ou $3L$ abaixo do alto do tanque. Ordene-os de acordo com a força que a água exerce sobre eles, começando pela maior.

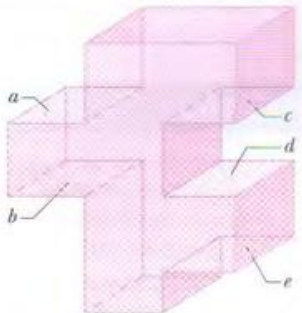


FIG. 14-24 Pergunta 2.

3 Uma peça irregular de 3 kg de um material sólido é totalmente imersa em um certo fluido. O fluido que estaria no espaço ocupado pela peça tem uma massa de 2 kg. (a) Ao ser liberada, a peça sobe, desce ou permanece no mesmo lugar? (b) Se a peça é totalmente imersa em um fluido menos denso e depois liberada, o que acontece?

**4** A Fig. 14-25 mostra quatro situações nas quais um líquido vermelho e um líquido cinzento foram colocados em um tubo em forma de U. Em uma dessas situações os líquidos não podem estar em equilíbrio estático. (a) Que situação é essa? (b) Para as outras três situações, suponha que o equilíbrio é estático. Para cada uma delas a massa específica do líquido vermelho é maior, menor ou igual à massa específica do líquido cinzento?

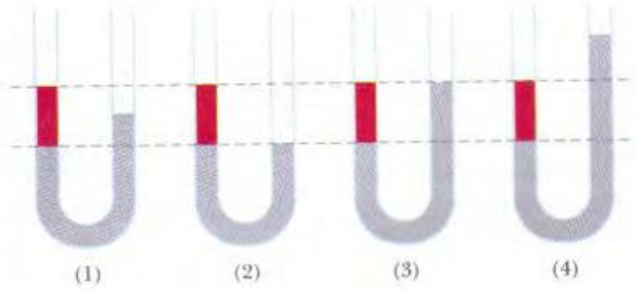



FIG. 14-25 Pergunta 4.

**5** Um barco com uma âncora a bordo flutua em uma piscina um pouco mais larga do que o barco. O nível da água sobe, desce ou permanece o mesmo (a) se a âncora é jogada na água e (b) se a âncora é jogada do lado de fora da piscina? (c) O nível da água na piscina sobe, desce ou permanece o mesmo se, em vez disso, uma rolha de cortiça é lançada do barco para a água, onde flutua?

**6** A Fig. 14-26 mostra três recipientes iguais, cheios até a borda; patos de brinquedo flutuam em dois deles. Ordene os três conjuntos de acordo com o peso total, em ordem decrescente.

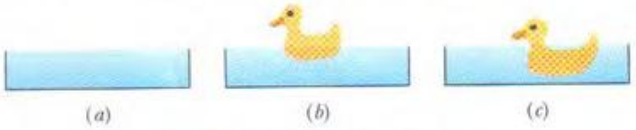



FIG. 14-26 Pergunta 6.

**7** A água flui suavemente em um cano horizontal. A Fig. 14-27 mostra a energia cinética $K$ de um elemento de água que se move ao longo de um eixo $x$ paralelo ao eixo do cano. Ordene os trechos $A$, $B$ e $C$ de acordo com o raio do cano, do maior para o menor.

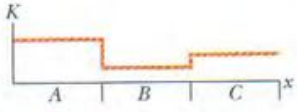



FIG. 14-27 Pergunta 7.

**8** A Fig. 14-28 mostra a pressão manométrica $p_m$ em função da profundidade $h$ para três líquidos. Uma esfera de plástico é totalmente imersa nos três líquidos, um de cada vez. Ordene os gráficos de acordo com o empuxo exercido sobre a esfera, do maior para o menor.

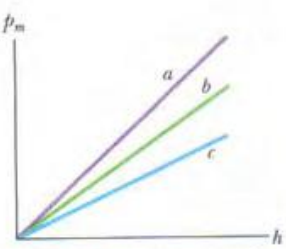



FIG. 14-28 Pergunta 8.

**9** A Fig. 14-29 mostra quatro tubos nos quais a água escoa suavemente para a direita. Os raios das diferentes partes dos tubos estão indicados. Em qual dos tubos o trabalho total realizado sobre um volume unitário de água que escoa da extremidade esquerda para a extremidade direita é (a) nulo, (b) positivo e (c) negativo?

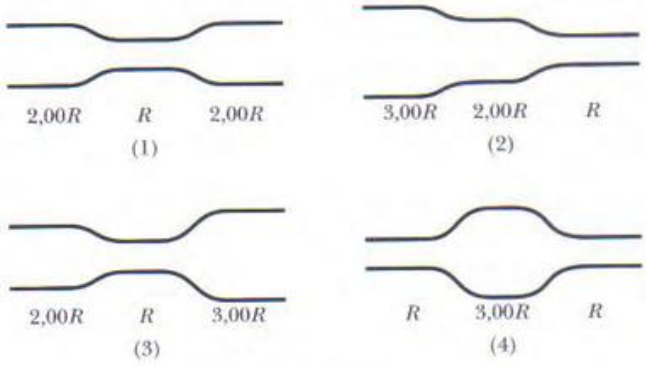



FIG. 14-29 Pergunta 9.

**10** Um bloco retangular é empurrado para baixo em três líquidos, um de cada vez. O peso aparente $P_{ap}$ do bloco em função da profundidade $h$ é mostrado na Fig. 14-30 para os três líquidos. Ordene os líquidos de acordo com o peso por unidade de volume, do maior para o menor.

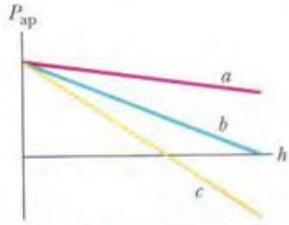



FIG. 14-30 Pergunta 10.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 14-3 Massa Específica e Pressão

•**1** Determine o aumento de pressão do fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de 42 N ao êmbolo circular da seringa, que tem um raio de 1,1 cm.

•**2** Três líquidos imiscíveis são despejados em um recipiente cilíndrico. Os volumes e massas específicas dos líquidos são: 0,50 L, 2,6 g/cm$^3$; 0,25 L, 1,0 g/cm$^3$; 0,40 L, 0,80 g/cm$^3$. Qual é a força total exercida pelos líquidos sobre o fundo do recipiente? Um litro = 1 L = 1000 cm$^3$. (Ignore a contribuição da atmosfera.)

•**3** Uma janela de escritório 3,4 m de largura por 2,1 m de altura. Como resultado da passagem de uma tempestade, a pressão do ar do lado de fora do edifício cai para 0,96 atm, mas no interior do edifício permanece em 1,0 atm. Qual é o módulo da força que empurra a janela para fora por causa dessa diferença de pressão?

•**4** Você calibra os pneus do carro com 28 psi. Mais tarde, mede a pressão arterial, obtendo uma leitura de 12/8 em cm Hg. No SI, as pressões são expressas em pascal ou seus múltiplos, como o quilopascal (kPa). Quais são, em kPa, (a) a pressão dos pneus de seu carro e (b) sua pressão arterial?

•5 Um peixe mantém sua profundidade na água doce ajustando a quantidade de ar em ossos porosos ou em bolsas de ar para tornar sua massa específica média igual à da água. Suponha que, com as bolsas de ar vazias, um certo peixe tem uma massa específica de 1,08 g/cm$^3$. Para que fração de seu volume expandido o peixe deve inflar as bolsas de ar para tornar sua massa específica igual à da água?

•6 Um recipiente hermeticamente fechado e parcialmente evacuado tem uma tampa com uma área de 77 m$^2$ e massa desprezível. Se a força necessária para remover a tampa é 480 N e a pressão atmosférica é $1,0 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão do ar no interior do recipiente?

••7 Em 1654, Otto von Guericke, o inventor da bomba de vácuo, fez uma demonstração para os nobres do Sacro Império Romano na qual duas juntas de oito cavalos não puderam separar dois hemisférios de cobre evacuados. (a) Supondo que os hemisférios tinham paredes finas (e resistentes), de modo que $R$ na Fig. 14-31 pode ser considerado tanto o raio interno como o raio externo, mostre que o módulo da força $\vec{F}$ necessária para separar os hemisférios é dado por $F = \pi R^2 \Delta p$, onde $\Delta p$ é a diferença entre as pressões do lado de fora e do lado de dentro da esfera. (b) Tomando $R$ como 30 cm, a pressão interna como 0,10 atm e a pressão externa como 1,00 atm, determine o módulo da força que as juntas de cavalos teriam que exercer para separar os hemisférios. (c) Explique por que uma única junta de cavalos poderia ter executado a mesma demonstração se um dos hemisférios estivesse preso em uma parede.

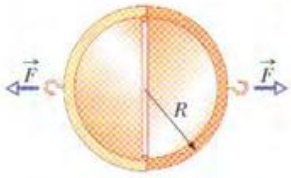


FIG. 14-31 Problema 7.

## seção 14-4 Fluidos em Repouso

•8 Calcule a diferença hidrostática entre a pressão arterial no cérebro e no pé de uma pessoa com 1,83 m de altura. A massa específica do sangue é $1,06 \times 10^3$ kg/m$^3$.

•9 Com uma profundidade de 10,9 km, a fossa das Marianas, no oceano Pacífico, é o lugar mais profundo dos oceanos. Em 1960, Donald Walsh e Jacques Piccard chegaram à fossa das Marianas no batiscafo *Trieste*. Supondo que a água do mar tem uma massa específica uniforme de 1024 kg/m$^3$, calcule a pressão hidrostática aproximada (em atmosferas) que o *Trieste* teve que suportar.

•10 A profundidade máxima $d_{máx}$ a que um mergulhador pode descer com um *snorkel* (tubo de respiração) é determinada pela massa específica da água e pelo fato de que os pulmões humanos não funcionam com uma diferença de pressão (entre o interior e o exterior da cavidade torácica) maior que 0,050 atm. Qual é a diferença entre o $d_{máx}$ da água doce e o da água do Mar Morto (a água natural mais salgada no mundo, com uma massa específica de $1,5 \times 10^3$ kg/m$^3$)?

•11 Alguns membros da tripulação tentam escapar de um submarino avariado 100 m abaixo da superfície. Que força deve ser aplicada a uma escotilha de emergência, de 1,2 m por 0,60 m, para abri-la para fora nessa profundidade? Suponha que a massa específica da água do oceano é 1024 kg/m$^3$ e que a pressão do ar no interior do submarino é 1,00 atm.

•12 O tubo de plástico da Fig. 14-32 tem uma seção reta de 5,00 cm$^2$. Introduz-se água no tubo até que o lado mais curto (de comprimento $d$ = 0,800 m) fique cheio. Em seguida, o lado menor é fechado e mais água é despejada no lado maior. Se a tampa do lado menor é arrancada quando a força a que está submetida excede 9,80 N, que altura da coluna de água do lado maior deixa a tampa na iminência de ser arrancada?

FIG. 14-32 Problemas 12 e 75.

•13 Que pressão manométrica uma máquina deve produzir para sugar lama com uma massa específica de 1800 kg/m$^3$ através de um tubo e fazê-la subir 1,5 m?

•14 *Embolia gasosa em viagens de avião.* Os mergulhadores são aconselhados a não viajar de avião nas primeiras 24 horas após um mergulho, porque o ar pressurizado usado durante o mergulho pode introduzir nitrogênio na corrente sangüínea. Uma redução súbita da pressão do ar (como a que acontece quando um avião decola) pode fazer com que o nitrogênio forme bolhas no sangue, que podem produzir embolias dolorosas ou mesmo fatais. Qual é a variação de pressão experimentada por um soldado da divisão de operações especiais que mergulha a 20 m de profundidade em um dia e salta de pára-quedas de uma altitude de 7,6 km no dia seguinte? Suponha que a massa específica média do ar nessa faixa de altitudes seja 0,87 kg/m$^3$.

•15 *Girafa bebendo água.* Em uma girafa, com a cabeça 2,0 m acima do coração e o coração 2,0 m acima do solo, a pressão manométrica (hidrostática) do sangue na altura do coração é 250 torr. Suponha que a girafa está de pé e a massa específica do sangue é $1,06 \times 10^3$ kg/m$^3$. Determine a pressão arterial (manométrica) em torr (a) no cérebro (a pressão deve ser suficiente para abastecer o cérebro com sangue) e (b) nos pés (a pressão deve ser compensada por uma pele esticada, que se comporta como uma meia elástica). (c) Se a girafa baixasse a cabeça bruscamente para beber água, sem afastar as pernas, qual seria o aumento da pressão arterial no cérebro? (Este aumento provavelmente causaria a morte da girafa.)

•16 Na Fig. 14-33, um tubo aberto, de comprimento $L$ = 1,8 m e seção reta $A$ = 4,6 cm$^2$, penetra na tampa de um barril cilíndrico de diâmetro $D$ = 1,2 m e altura $H$ = 1,8 m. O barril e o tubo estão cheios d'água (até o alto do tubo). Calcule a razão entre a força hidrostática que age sobre o fundo do barril e a força gravitacional que age sobre a água contida no barril. Por que a razão não é igual a 1,0? (Não é necessário levar em conta a pressão atmosférica.)

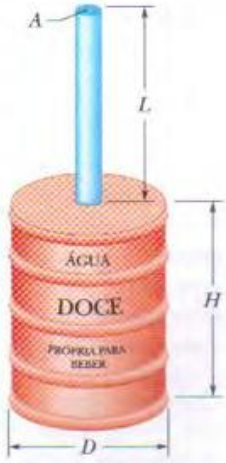


FIG. 14-33 Problema 16.

•17 *Pressão arterial do argentinossauro.* (a) Se a cabeça deste saurópode gigantesco ficava a 21 m de altura e o coração a 9,0 m, que pressão manométrica (hidrostática) era necessária na altura do coração para que a pressão no cérebro fosse 80 torr (suficiente para abastecer o cérebro)? Suponha que a massa específica do sangue do argentinossauro era $1,06 \times 10^3$ kg/m$^3$. (b) Qual era a pressão arterial (em torr) na altura dos pés do animal?

•18 *Seres humanos e elefantes fazendo snorkel.* Quando uma pessoa faz snorkel, os pulmões ficam ligados diretamente à atmosfera através do tubo de respiração e, portanto, estão à pressão atmosférica. Qual é a diferença $\Delta p$, em atmosferas, entre a pressão interna e a pressão da água sobre o corpo do mergulhador se o comprimento do tubo de respiração é (a) 20 cm (situação

normal) e (b) 4,0 m (situação provavelmente fatal)? No segundo caso, a diferença de pressão faz os vasos sangüíneos das paredes dos pulmões se romperem, enchendo os pulmões de sangue. Como mostra a Fig. 14-34, um elefante pode usar a tromba como tubo de respiração e nadar com os pulmões 4,0 m abaixo da superfície da água porque a membrana que envolve seus pulmões contém tecido conectivo que envolve e protege os vasos sangüíneos, impedindo que se rompam.

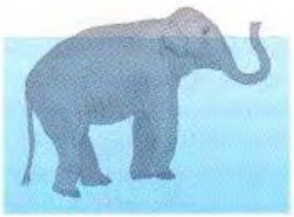


FIG. 14-34 Problema 18.

••19 Dois recipientes cilíndricos iguais, com as bases no mesmo nível, contêm um líquido de massa específica $1,30 \times 10^3$ kg/m$^3$. A área de cada base é 4,00 cm$^2$, mas em um dos recipientes a altura do líquido é 0,854 m e no outro é 1,560 m. Determine o trabalho realizado pela força gravitacional para igualar os níveis quando os recipientes são ligados por um tubo.

••20 *Perda de consciência dos pilotos de caça.* Quando um piloto faz uma curva muito fechada em um avião de caça moderno a pressão do sangue na altura do cérebro diminui, e o sangue deixa de abastecer o cérebro. Se o coração mantém a pressão manométrica (hidrostática) da aorta em 120 torr quando o piloto sofre uma aceleração centrípeta horizontal de $4g$, qual é a pressão sangüínea no cérebro (em torr), situado a 30 cm de distância do coração no sentido do centro da curva? A falta de sangue no cérebro pode fazer com que o piloto passe a enxergar em preto e branco e o campo visual se estreite, um fenômeno conhecido como "visão de túnel". Caso persista, o piloto pode sofrer a chamada $g$-LOC ($g$-*induced loss of consciousness*, perda de consciência induzida por $g$). A massa específica do sangue é $1,06 \times 10^3$ kg/m$^3$.

••21 Na análise de certos fenômenos geológicos é muitas vezes apropriado supor que a pressão em um dado *nível de compensação* horizontal, muito abaixo da superfície, é a mesma em uma vasta região e é igual à pressão produzida pelo peso das rochas que se encontram acima desse nível. Assim, a pressão no nível de compensação é dada pela mesma fórmula usada para calcular a pressão de um fluido. Esse modelo exige, por exemplo, que as montanhas tenham *raízes* de rochas continentais que penetram no manto mais denso (Fig. 14-35). Considere uma montanha de altura $H = 6,0$ km em um continente de espessura $T = 32$ km. As rochas continentais têm uma massa específica 2,9 g/cm$^3$ e o manto que fica abaixo destas rochas tem uma massa específica de 3,3 g/cm$^3$. Calcule a profundidade $D$ da raiz. (*Sugestão:* Iguale as pressões nos pontos $a$ e $b$; a profundidade $y$ do nível de compensação se cancela.)

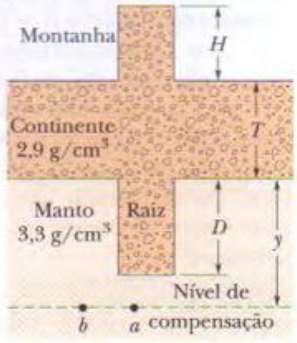



FIG. 14-35 Problema 21.

••22 O tanque em forma de ⊔ mostrado na Fig. 14-36 está cheio d'água e é aberto na parte de cima. Se $d = 5,0$ m, qual é a força exercida pela água (a) na face $A$ e (b) na face $B$?

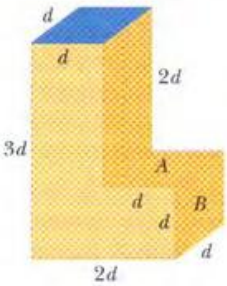



FIG. 14-36 Problema 22.

••23 Um grande aquário de 5,00 m de altura está cheio de água doce até uma altura de 2,00 m. Uma das paredes do aquário é feita de plástico e tem 8,00 m de largura. De quanto aumenta a força exercida sobre esta parede se a altura da água é aumentada para 4,00 m?

•••24 Na Fig. 14-37 a água atinge uma altura $D = 35,0$ m atrás da face vertical de uma represa com $W = 314$ m de largura. Determine (a) a força horizontal a que está submetida a represa por causa da pressão manométrica da água e (b) o torque produzido por essa força em relação a uma reta que passa por $O$ e é paralela à face plana da represa. (c) Determine o braço de alavanca deste torque.

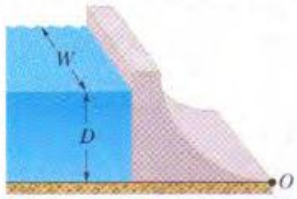



FIG. 14-37 Problema 24.

## seção 14-5 Medindo a Pressão

•25 A coluna de um barômetro de mercúrio (como o da Fig. 14-5*a*) tem uma altura $h = 740,35$ mm. A temperatura é $-5,0$°C, na qual a massa específica do mercúrio é $\rho = 1,3608 \times 10^4$ kg/m$^3$. A aceleração de queda livre no local onde se encontra o barômetro é $g = 9,7835$ m/s$^2$. Qual é a pressão atmosférica medida pelo barômetro em pascal e em torr (que é uma unidade muito usada para as leituras dos barômetros)?

•26 Para sugar limonada, com uma massa específica de 1000 kg/m$^3$, usando um canudo para fazer o líquido subir 4,0 cm, que pressão manométrica mínima (em atmosferas) deve ser produzida pelos pulmões?

••27 Qual seria a altura da atmosfera se a massa específica do ar (a) fosse uniforme e (b) diminuísse linearmente até zero com a altura? Suponha que ao nível do mar a pressão do ar é 1,0 atm e a massa específica do ar é 1,3 kg/m$^3$.

## seção 14-6 O Princípio de Pascal

•28 Um êmbolo com uma seção reta $a$ é usado em uma prensa hidráulica para exercer uma pequena força de módulo $f$ sobre um líquido que está em contato, através de um tubo de ligação, com um êmbolo maior de seção reta $A$ (Fig. 14-38). (a) Qual é o módulo $F$ da força que deve ser aplicada ao êmbolo maior para que o sistema fique em equilíbrio? (b) Se os diâmetros dos êmbolos são 3,80 cm e 53,0 cm, qual é o módulo da força que deve ser aplicada ao êmbolo menor para equilibrar uma força de 20,0 kN aplicada ao êmbolo maior?

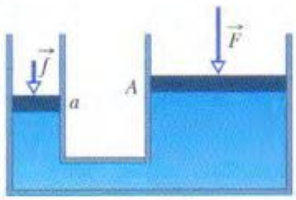



FIG. 14-38 Problema 28.

••29 Na Fig. 14-39, uma mola de constante elástica $3,00 \times 10^4$ N/m liga uma viga rígida ao êmbolo de saída de um macaco hidráulico. Um recipiente vazio de massa desprezível está sobre o êmbolo de entrada. O êmbolo de entrada tem uma área $A_e$ e o êmbolo de saída tem uma área $18,0A_e$. Inicialmente a mola está relaxada. Quantos quilogramas de areia devem ser despejados (lentamente) no recipiente para que a mola sofra uma compressão de 5,00 cm?

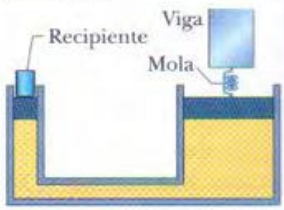



FIG. 14-39 Problema 29.

## seção 14-7 O Princípio de Arquimedes

•30 Na Fig. 14-40, um cubo de aresta $L = 0,600$ m e 450 kg de massa é suspenso por uma corda em um tanque aberto que con-

tém um líquido de massa específica 1030 kg/m³. Determine (a) o módulo da força total exercida sobre a face superior do cubo pelo líquido e pela atmosfera, supondo que a pressão atmosférica é de 1,00 atm, (b) o módulo da força total exercida sobre a face inferior do cubo e (c) a tensão da corda. (d) Calcule o módulo da força de empuxo a que o cubo está submetido usando o princípio de Arquimedes. Que relação existe entre todas essas grandezas?

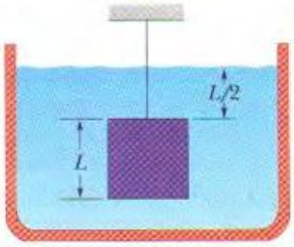


FIG. 14-40 Problema 30.

•31 Uma âncora de ferro de massa específica 7870 kg/m³ parece ser 200 N mais leve na água que no ar. (a) Qual é o volume da âncora? (b) Quanto ela pesa no ar?

•32 Um barco que flutua em água doce desloca um volume de água que pesa 35,6 kN. (a) Qual é o peso da água que este barco desloca quando flutua em água salgada de massa específica $1{,}10 \times 10^3$ kg/m³? (b) Qual é a diferença entre o volume de água doce e o volume de água salgada deslocados?

•33 Três crianças, todas pesando 356 N, fazem uma jangada com toras de madeira de 0,30 m de diâmetro e 1,80 m de comprimento. Quantas toras são necessárias para mantê-las flutuando em água doce? Suponha que a massa específica da madeira é 800 kg/m³.

•34 Um objeto de 5,00 kg é liberado a partir do repouso quando está totalmente imerso em um líquido. O líquido deslocado pelo objeto tem uma massa de 3,00 kg. Que distância e em que sentido o objeto se move em 0,200 s, supondo que se desloca livremente e que a força de arrasto exercida pelo líquido é desprezível?

•35 Um bloco de madeira flutua em água doce com dois terços do volume $V$ submersos e em óleo com $0{,}90V$ submersos. Determine a massa específica (a) da madeira e (b) do óleo.

••36 Um flutuador tem a forma de um cilindro reto, com 0,500 m de altura e 4,00 m² de área das bases; sua massa específica é 0,400 vezes a massa específica da água doce. Inicialmente o flutuador é mantido totalmente imerso em água doce, com a face superior na superfície da água. Em seguida é liberado e sobe gradualmente até começar a flutuar. Qual é o trabalho realizado pelo empuxo sobre o flutuador durante a subida?

••37 Uma esfera oca de raio interno 8,0 cm e raio externo 9,0 cm flutua com metade do volume submerso em um líquido de massa específica 800 kg/m³. (a) Qual é a massa da esfera? (b) Calcule a massa específica do material de que é feita a esfera.

••38 *Jacarés traiçoeiros.* Os jacarés costumam esperar pela presa flutuando com apenas o alto da cabeça exposto, para não serem vistos. Um meio de que dispõem para afundar mais ou menos é controlar o tamanho dos pulmões. Outro é engolir pedras (*gastrólitos*), que passam a residir no estômago. A Fig. 14-41 mostra um modelo muito simplificado de jacaré, com uma massa de 130 kg, que flutua com a cabeça parcialmente exposta. O alto da cabeça tem uma área de 0,20 m². Se o jacaré engolir pedras com uma massa total de 1,0% da massa do corpo (um valor típico), de quanto afundará?

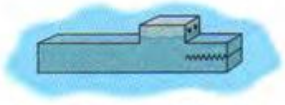


FIG. 14-41 Problema 38.

••39 Que fração do volume de um *iceberg* (massa específica 917 kg/m³) é visível se o *iceberg* flutua (a) no mar (água salgada, massa específica 1024 kg/m³) e (b) em um rio (água doce, massa específica 1000 kg/m³)? (Quando a água congela para formar gelo, o sal é deixado de lado. Assim, a água que resulta do degelo de um *iceberg* pode ser usada para beber.)

••40 Uma pequena esfera totalmente imersa em um líquido é liberada a partir do repouso, e sua energia cinética é medida depois que se desloca 4,0 cm no líquido. A Fig. 14-42 mostra os resultados depois de muitos líquidos terem sido usados: a energia cinética $K$ é plotada no gráfico em função da massa específica do líquido, $\rho_{liq}$, e a escala do eixo vertical é definida por $K_s = 1{,}60$ J. Quais são (a) a massa específica e (b) o volume da bola?

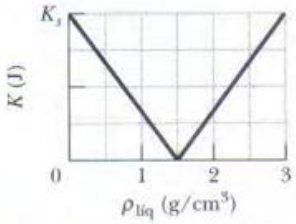


FIG. 14-42 Problema 40.

••41 Uma esfera de ferro oca flutua quase totalmente submersa em água. O diâmetro externo é 60,0 cm e a massa específica do ferro é 7,87 g/cm³. Determine o diâmetro interno.

••42 Na Fig. 14-43*a*, um bloco retangular é gradualmente empurrado para dentro de um líquido. O bloco tem uma altura $d$; a área das faces superior e inferior é $A = 5{,}67$ cm². A Fig. 14-43*b* mostra o peso aparente $P_{ap}$ do bloco em função da profundidade $h$ da face inferior. A escala do eixo vertical é definida por $P_S = 0{,}20$ N. Qual é a massa específica do líquido?

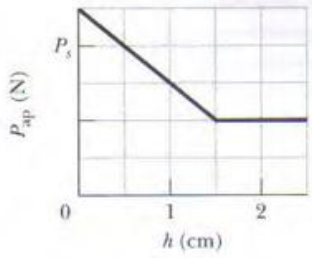


FIG. 14-43 Problema 42.

••43 Uma peça de ferro contendo um certo número de cavidades pesa 6000 N no ar e 4000 N na água. Qual é o volume total de cavidades? A massa específica do ferro é 7,87 g/cm³.

••44 Deixa-se cair uma pequena bola a partir do repouso em uma profundidade de 0,600 m abaixo da superfície em uma piscina com água. Se a massa específica da bola é 0,300 vezes a da água e se a força de arrasto que a água exerce sobre a bola é desprezível, que altura acima da superfície da água a bola atinge ao emergir? (Despreze a transferência de energia para as ondas e respingos produzidos pela bola ao emergir.)

••45 O volume de ar no compartimento de passageiros de um automóvel de 1800 kg é 5,00 m³. O volume do motor e das rodas dianteiras é 0,750 m³ e o volume das rodas traseiras, tanque de gasolina e porta-malas é 0,800 m³; a água não pode penetrar nessas duas regiões. O carro cai em um lago. (a) A princípio, não entra água no compartimento de passageiros. Que volume do carro, em metros cúbicos, fica abaixo da superfície da água com o carro flutuando (Fig. 14-44)? (b) Quando a água penetra lentamente, o carro afunda. Quantos metros cúbicos de água estão dentro do carro quando ele desaparece abaixo da superfície da água? (O carro, com uma carga pesada no porta-malas, permanece na horizontal.)

FIG. 14-44 Problema 45.

••46 Um bloco de madeira tem uma massa de 3,67 kg e uma massa específica de 600 kg/m³. Ele deve ser carregado de chumbo ($1,14 \times 10^4$ kg/m³) para flutuar na água com 0,900 de seu volume submerso. Que massa de chumbo é necessária se o chumbo for colocado (a) no alto do bloco e (b) na base do bloco?

••47 Quando os paleontólogos encontram um fóssil de dinossauro razoavelmente completo podem determinar a massa e o peso do dinossauro vivo usando um modelo em escala esculpido em plástico e baseado nas dimensões dos ossos do fóssil. A escala do modelo é de 1 para 20, ou seja, ele tem 1/20 do comprimento real, as áreas são $(1/20)^2$ das áreas reais e os volumes são $(1/20)^3$ dos volumes reais. Primeiro, pendura-se o modelo em um dos braços de uma balança e colocam-se pesos no outro braço até que o equilíbrio seja estabelecido. Em seguida, o modelo é totalmente imerso em água e removem-se pesos do outro braço até que o equilíbrio seja restabelecido (Fig. 14-45). Para um modelo de um certo fóssil de *T. rex*, 637,76 g tiveram que ser removidos para restabelecer o equilíbrio. Qual era o volume (a) do modelo e (b) do *T. rex* original? (c) Se a massa específica do *T. rex* era aproximadamente igual à da água, qual era a sua massa?

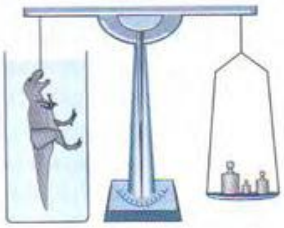


FIG. 14-45 Problema 47.

•••48 A Fig. 14-46 mostra uma bola de ferro suspensa por uma corda de massa desprezível presa em um cilindro que flutua, parcialmente submerso, com as bases paralelas à superfície da água. O cilindro tem uma altura de 6,00 cm, uma área das bases de 12,0 cm², uma massa específica de 0,30 g/cm³ e 2,00 cm de sua altura estão acima da superfície da água. Qual é o raio da bola de ferro?

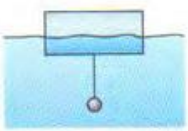


FIG. 14-46 Problema 48.

### seção 14-9 A Equação de Continuidade

•49 Uma mangueira de jardim com diâmetro interno de 1,9 cm está ligada a um borrifador (estacionário) que consiste apenas em um recipiente com 24 furos de 0,13 cm de diâmetro. Se a água circula na mangueira com uma velocidade de 0,91 m/s, com que velocidade deixa os furos do borrifador?

•50 Dois riachos se unem para formar um rio. Um dos riachos tem uma largura de 8,2 m, uma profundidade de 3,4 m e a velocidade da água é 2,3 m/s. O outro riacho tem 6,8 m de largura, 3,2 m de profundidade e a velocidade da água é 2,6 m/s. Se o rio tem uma largura de 10,5 m e a velocidade da água é 2,9 m/s, qual é a profundidade do rio?

•51 *Efeito canal.* A Fig. 14-47 mostra uma canal onde se encontra uma barcaça ancorada com $d = 30$ m de largura e $b = 12$ m de calado. O canal tem uma largura $D = 55$ m, uma profundidade $H = 14$ m e nele circula água com uma velocidade $v_i = 1,5$ m/s. Suponha que a vazão em torno da barcaça é uniforme. Quando a água passa pela proa da barcaça sofre uma queda brusca de nível conhecida como efeito canal. Se a queda é de $h = 0,80$ m, qual é a velocidade da água ao passar ao lado da barcaça (a) pelo plano vertical indicado pela reta tracejada *a* e (b) pelo plano vertical indicado pela reta tracejada *b*? A erosão causada pelo aumento da velocidade é um problema que preocupa os engenheiros hidráulicos.

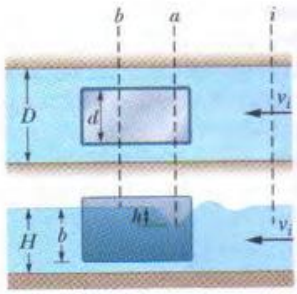



FIG. 14-47 Problema 51.

•52 A Fig. 14-48 mostra dois segmentos de uma antiga tubulação que atravessa uma colina; as distâncias são $d_A = d_B = 30$ m e $D = 110$ m. O raio do cano do lado de fora da colina é 2,00 cm; o raio do cano no interior da colina, porém, não é mais conhecido. Para determiná-lo os engenheiros hidráulicos verificaram inicialmente que a velocidade da água nos segmentos à esquerda e à direita da colina era 2,50 m/s. Em seguida, introduziram um corante na água no ponto *A* e observaram que levava 88,8 s para chegar ao ponto *B*. Qual é o raio médio do cano no interior da colina?

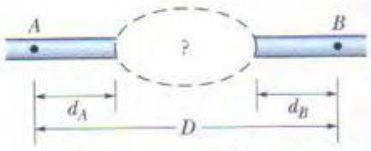



FIG. 14-48 Problema 52.

••53 A água de um porão inundado é bombeada com uma velocidade de 5,0 m/s através de uma mangueira com 1,0 cm de raio. A mangueira passa por uma janela 3,0 m acima do nível da água. Qual é a potência da bomba?

••54 A água que sai de um cano de 1,9 cm (diâmetro interno) passa por três canos de 1,3 cm. (a) Se as vazões nos três canos menores são 26, 19 e 11 L/min, qual é a vazão no tubo de 1,9 cm? (b) Qual é a razão entre a velocidade da água no cano de 1,9 cm e a velocidade no cano em que a vazão é 26 L/min?

### seção 14-10 A Equação de Bernoulli

•55 A água se move com uma velocidade de 5,0 m/s em um cano com uma seção reta de 4,0 cm². A água desce gradualmente 10 m enquanto a seção reta aumenta para 8,0 cm². (a) Qual é a velocidade da água depois da descida? (b) Se a pressão antes da descida é $1,5 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão depois da subida?

•56 A entrada da tubulação da Fig. 14-49 tem uma seção reta de 0,74 m² e a velocidade da água é 0,40 m/s. Na saída, a uma distância $D = 180$ m abaixo da entrada, a seção reta é menor que a da entrada e a velocidade da água é 9,5 m/s. Qual é a diferença de pressão entre a entrada e a saída?

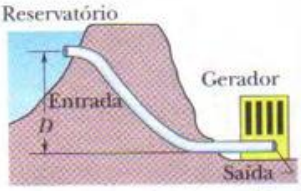



FIG. 14-49 Problema 56.

•57 Um cano com um diâmetro interno de 2,5 cm transporta água para o porão de uma casa a uma velocidade de 0,90 m/s com uma pressão de 170 kPa. Se o cano se estreita para 1,2 cm e sobe para o segundo piso, 7,6 m acima do ponto de entrada, quais são (a) a velocidade e (b) a pressão da água no segundo piso?

•58 Os torpedos são às vezes testados em tubos horizontais por onde escoa água, da mesma forma como os aviões são testados em túneis de vento. Considere um tubo circular com um diâme-

tro interno de 25,0 cm e um torpedo alinhado com o eixo maior do tubo. O torpedo tem 5,00 cm de diâmetro e deve ser testado com a água passando por ele a 2,50 m/s. (a) Com que velocidade a água deve passar na parte do tubo que não está obstruída pelo torpedo? (b) Qual é a diferença de pressão entre a partes obstruída e a parte não obstruída do tubo?

•59 Um tanque cilíndrico de grande diâmetro está cheio de água até uma profundidade $D = 0{,}30$ m. Um furo de seção reta $A = 6{,}5\ \text{cm}^2$ no fundo do tanque permite a drenagem da água. (a) Qual é a velocidade de escoamento da água, em metros cúbicos por segundo? (b) A que distância abaixo do fundo do tanque a seção reta do jorro é igual a metade da área do furo?

•60 Dois tanques, 1 e 2, ambos com uma grande abertura no alto, contêm líquidos diferentes. Um pequeno furo é feito no lado de cada tanque à mesma distância $h$ abaixo da superfície do líquido, mas o furo do tanque 1 tem metade da seção reta do furo do tanque 2. (a) Qual é a razão $\rho_1/\rho_2$ entre as massas específicas dos líquidos se a vazão mássica é a mesma para os dois furos? (b) Qual é a razão $R_{V1}/R_{V2}$ entre as vazões dos dois tanques? (c) Em um certo instante, o líquido do tanque 1 está 12,0 cm acima do furo. A que altura acima do furo o líquido do tanque 2 deve estar nesse instante para que os tanques tenham que ter vazões iguais?

•61 Qual o trabalho realizado pela pressão para fazer passar 1,4 m³ de água por um cano com um diâmetro interno de 13 mm se a diferença de pressão entre as extremidades do cano é 1,0 atm?

••62 Na Fig. 14-50, água doce atravessa um cano horizontal e sai para a atmosfera com uma velocidade $v_1 = 15$ m/s. Os diâmetros dos segmentos esquerdo e direito do cano são 5,0 cm e 3,0 cm. (a) Que volume de água escoa para a atmosfera em um período de 10 min? Quais são (b) a velocidade $v_2$ e (c) a pressão manométrica no segmento esquerdo do tubo?

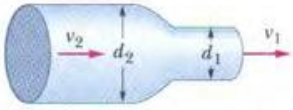


FIG. 14-50 Problema 62.

••63 Na Fig. 14-51, a água doce atrás de uma represa tem uma profundidade $D = 15$ m. Um cano horizontal de 4,0 cm de diâmetro atravessa a represa a uma profundidade $d = 6{,}0$ m. Uma tampa fecha a abertura do cano. (a) Determine o módulo da força de atrito entre a tampa e a parede do tubo. (b) A tampa é retirada. Qual é o volume de água que sai do cano em 3,0 h?

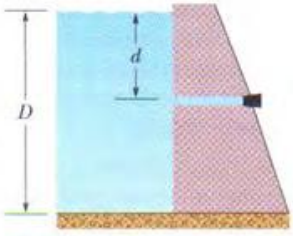


FIG. 14-51 Problema 63.

••64 Água doce escoa horizontalmente do segmento 1 de uma tubulação, com uma seção reta $A_1$, para o segmento 2, com uma seção reta $A_2$. A Fig. 14-52 mostra um gráfico da diferença de pressão $p_2 - p_1$ em função do inverso do quadrado $A_1^{-2}$ da área que seria esperada para uma vazão de certo valor se o escoamento fosse laminar em todas as circunstâncias. A escala do eixo vertical é definida por $\Delta p_s = 300\ \text{kN/m}^2$. Nas condições da figura, quais são os valores (a) de $A_2$ e (b) da vazão?

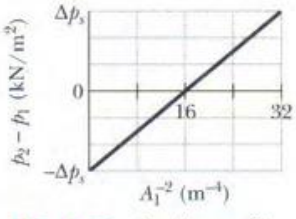


FIG. 14-52 Problema 64.

••65 A Fig. 14-53 mostra um jorro d'água saindo por um furo a uma distância $h = 10$ cm da superfície de tanque que contém $H = 40$ cm de água. (a) A que distância $x$ a água atinge o solo? (b) A que profundidade deve ser feito um segundo furo para que o valor de $x$ seja o mesmo? (c) A que profundidade deve ser feito um furo para maximizar o valor de $x$?

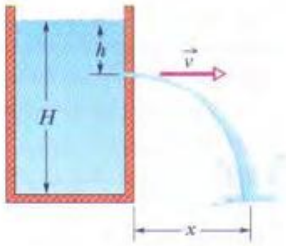


FIG. 14-53 Problema 65.

••66 Na Fig. 14-54 a água escoa em regime laminar no segmento esquerdo de uma tubulação (raio $r_1 = 2{,}00R$), atravessa o segmento seção central (raio $R$) e atravessa o segmento direito (raio $r_3 = 3{,}00R$). A velocidade da água no segmento central é 0,500 m/s. Qual é o trabalho total realizado sobre 0,400 m³ de água quando ela passa do segmento esquerdo para o segmento direito?

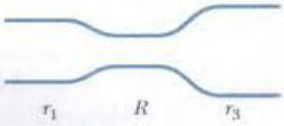


FIG. 14-54 Problema 66.

••67 Um *medidor venturi* é usado para medir a velocidade de um fluido em um cano. O medidor é ligado entre dois segmentos do cano (Fig. 14-55); a seção reta $A$ na entrada e na saída do medidor é igual à seção reta do cano. Entre a entrada e a saída do medidor o fluido escoa com velocidade $V$ e depois passa com velocidade $v$ por uma "garganta" estreita de seção reta $a$. Um manômetro liga a parte mais larga do medidor à parte mais estreita. A variação da velocidade do fluido é acompanhada por uma variação $\Delta p$ da pressão do fluido, que produz uma diferença $h$ na altura do líquido nos dois lados do manômetro. (A diferença $\Delta p$ corresponde à pressão na garganta menos a pressão no cano.) (a) Aplicando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade aos pontos 1 e 2 na Fig. 14-55, mostre que

$$V = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}},$$

onde $\rho$ é a massa específica do fluido. (b) Suponha que o fluido é água doce, que a seção reta é 64 cm² no cano e 32 cm² na garganta e que a pressão é 55 kPa no cano e 41 kPa na garganta. Qual é a vazão de água em metros cúbicos por segundo?

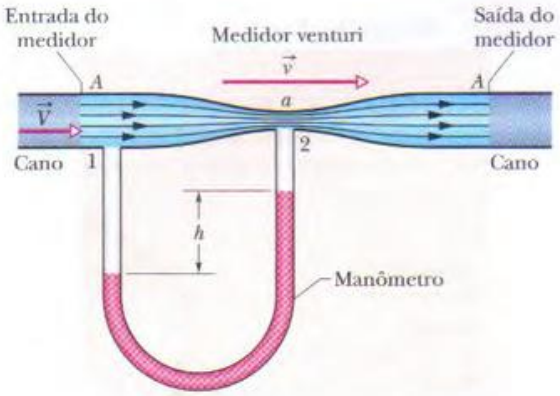


FIG. 14-55 Problemas 67 e 68.

••68 Considere o medidor venturi do Problema 67 e da Fig. 14-51 sem o manômetro. Suponha que $A = 5a$ e que a pressão $p_1$ no ponto $A$ é 2,0 atm. Calcule o valor (a) da velocidade $V$ no ponto $A$ e (b) da velocidade $v$ no ponto $a$ para que a pressão $p_2$ no ponto

$a$ seja zero. (c) Calcule a vazão correspondente se o diâmetro no ponto $A$ é 5,0 cm. O fenômeno que ocorre em $a$ quando $p_2$ cai para perto de zero é conhecido como cavitação; a água evapora para formar pequenas bolhas.

••69 Um líquido de massa específica 900 kg/m³ escoa em um tubo horizontal com seção reta de $1{,}90 \times 10^{-2}$ m² na região $A$ e uma seção reta de $9{,}50 \times 10^{-2}$ m² na região $B$. A diferença de pressão entre as duas regiões é $7{,}20 \times 10^{3}$ Pa. Quais são (a) a vazão e (b) a vazão mássica?

••70 O tubo de Pitot (Fig. 14-56) é usado para medir a velocidade do ar nos aviões. Ele é formado por um tubo externo com pequenos furos $B$ (quatro são mostrados na figura) que permitem a entrada de ar no tubo; este tubo está ligado a um dos lados de um tubo em forma de U. O outro lado do tubo em forma de U está ligado ao furo $A$ na frente do medidor, que aponta no sentido do movimento do avião. Em $A$ o ar fica estagnado, de modo que $v_A = 0$. Em $B$, porém, a velocidade do ar é presumivelmente igual à velocidade $v$ do ar em relação ao avião. (a) Use a equação de Bernoulli para mostrar que

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{ar}}},$$

onde $\rho$ é a massa específica do líquido contido no tubo em **U** e $h$ é a diferença entre os níveis do líquido no tubo. (b) Suponha que o tubo contém álcool e que a diferença de nível $h$ é 26,0 cm. Qual é a velocidade do avião em relação ao ar? A massa específica do ar é 1,03 kg/m³ e a do álcool é 810 kg/m³.

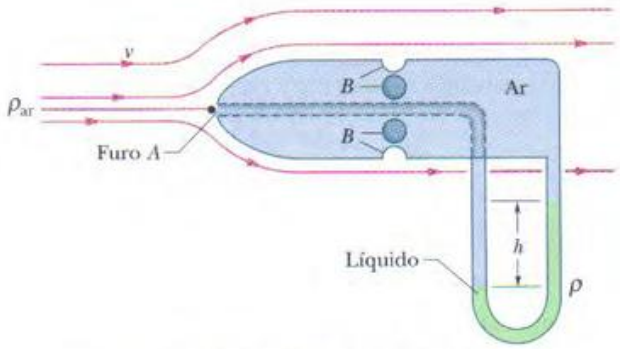



FIG. 14-56 Problemas 70 e 71.

••71 O tubo de Pitot (veja o Problema 70) de um avião que está voando a grande altitude mede uma diferença de pressão de 180 Pa. Qual é a velocidade do ar se a massa específica do ar nessa altitude é 0,031 kg/m³?

•••72 A Fig. 14-57 mostra um diagrama muito simplificado do sistema de drenagem de água da chuva de uma casa. A chuva que cai no telhado inclinado escorre para as calhas da borda do telhado e desce por canos verticais (apenas um é mostrado na figura) para um cano principal $M$ abaixo do porão, que leva a água para um cano ainda maior, situado no subsolo. Na Fig. 14-57 um ralo no porão também está ligado ao cano $M$. Suponha que as seguintes condições são verdadeiras:

1. os canos verticais têm uma altura $h_1 = 11$ m,
2. o ralo do porão fica a uma altura $h_2 = 1{,}2$ do cano $M$,
3. o cano $M$ tem um raio de 3,0 cm,
4. a casa tem $L = 60$ m de fachada e $P = 30$ m de profundidade,
5. toda a água que cai no telhado passa pelo cano $M$,
6. a velocidade inicial da água nos canos verticais é desprezível,
7. a velocidade do vento é desprezível (a chuva cai verticalmente).

Para que índice de precipitação, em centímetros por hora, a água do cano $M$ chega à altura do ralo, ameaçando inundar o porão?

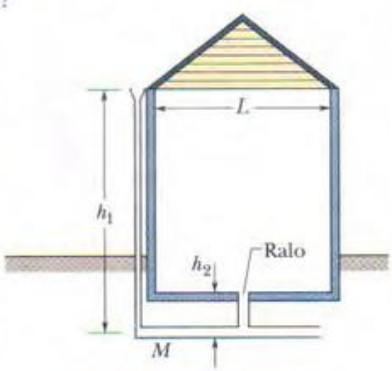



FIG. 14-57 Problema 72.

## Problemas Adicionais

73 Uma bola de vidro com 2,00 cm de raio repousa no fundo de um copo de leite. A massa específica do leite é 1,03 g/cm³, e o módulo da força normal que o fundo do corpo exerce sobre a bola é $9{,}48 \times 10^{-2}$ N. Qual é a massa da bola?

74 Quando tossimos, o ar é expelido em alta velocidade pela traquéia e brônquios superiores e remove o excesso de muco que está prejudicando a respiração. Esta alta velocidade é produzida da seguinte forma: depois que inspiramos uma grande quantidade de ar, a glote (abertura estreita da laringe) se fecha, os pulmões se contraem, aumentando a pressão do ar, a traquéia e os brônquios superiores se estreitam e a glote se abre bruscamente, deixando escapar o ar. Suponha que, durante a expulsão, a vazão seja $7{,}0 \times 10^{-3}$ m/s. Que múltiplo da velocidade do som ($v_s = 343$ m/s) é a velocidade do ar na traquéia se o diâmetro da traquéia (a) permanece com o valor normal de 14 mm e (b) diminui para 5,2 mm?

75 A Fig. 14-32 mostra um tubo em **U** modificado: o lado direito é mais curto do que o esquerdo. A extremidade do lado direito está $d = 10{,}0$ cm acima da bancada do laboratório. O raio do tubo é 1,50 cm. Despeja-se água (lentamente) no lado esquerdo até que comece a transbordar do lado direito. Em seguida, um líquido de massa específica 0,80 g/cm³ é despejado lentamente no lado esquerdo até que sua altura nesse lado seja 8,0 cm (o líquido não se mistura com a água). Que quantidade de água transborda do lado direito?

76 Surpreendido por uma avalanche, um esquiador é totalmente soterrado pela neve, cuja massa específica é 96 kg/m³. Suponha que a massa específica média do esquiador, com seus trajes e equipamentos, seja de 1020 kg/m³. Que fração da força gravitacional que age sobre o esquiador é compensada pelo empuxo da neve?

77 A Fig. 14-58 mostra um *sifão*, que é um tubo usado para transferir líquidos de um recipiente para outro. O tubo $ABC$ deve estar inicialmente cheio, mas se esta condição é satisfeita o líquido escoa pelo tubo até que a superfície do líquido no recipiente esteja no mesmo nível que a extremidade $A$ do tubo. O líquido tem uma massa específica de 1000 kg/m³ e viscosidade desprezível. As distâncias mostradas na figura são $h_1 = 25$ cm, $d = 12$ cm e $h_2 = 40$ cm.

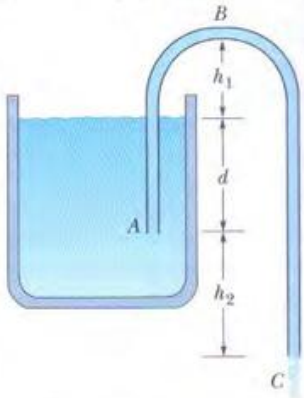



FIG. 14-58 Problema 77.

(a) Com que velocidade o líquido sai do tubo no ponto $C$? (b) Se a pressão atmosférica é $1{,}0 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão do líquido em $B$, o ponto mais alto do tubo? (c) Teoricamente, até que altura máxima $h_1$ esse sifão pode fazer a água subir?

**78** Suponha que seu corpo tenha uma massa específica uniforme 0,95 vez a da água. (a) Se você flutua em uma piscina, que fração do volume de seu corpo está acima da superfície da água?

Areia movediça é o fluido produzido quando a água se mistura com a areia, separando os grãos e eliminando o atrito que os impede de se mover uns em relação aos outros. Poços de areia movediça podem se formar quando a água das montanhas escorre para os vales e se infiltra em bolsões de areia. (b) Se você está flutuando em um poço profundo de areia movediça com uma massa específica 1,6 vez a da água, que fração do seu corpo fica acima da superfície da areia movediça? (c) Em particular, você ainda é capaz de respirar?

**79** Se uma bolha de água mineral com gás sobe com uma aceleração de 0,225 m/s$^2$ e tem um raio de 0,500 mm, qual é a sua massa? Suponha que a força de arrasto que o líquido exerce sobre a bolha seja desprezível.

**80** Qual é a aceleração de um balão de ar quente se a razão entre a massa específica do ar fora do balão e a massa específica do ar dentro do balão é 1,39? Despreze a massa do balão e da cesta.

**81** Uma lata tem um volume total de 1200 cm$^3$ e uma massa de 130 g. Quantos gramas de bolinhas de chumbo com uma massa específica de 11,4 g/cm$^3$ ela pode carregar sem afundar na água?

**82** Um tubo em **U** aberto nas duas extremidades contém mercúrio. Quando 11,2 cm de água são despejados no lado direito do tubo, de quanto o mercúrio sobe no lado esquerdo em relação ao nível inicial?

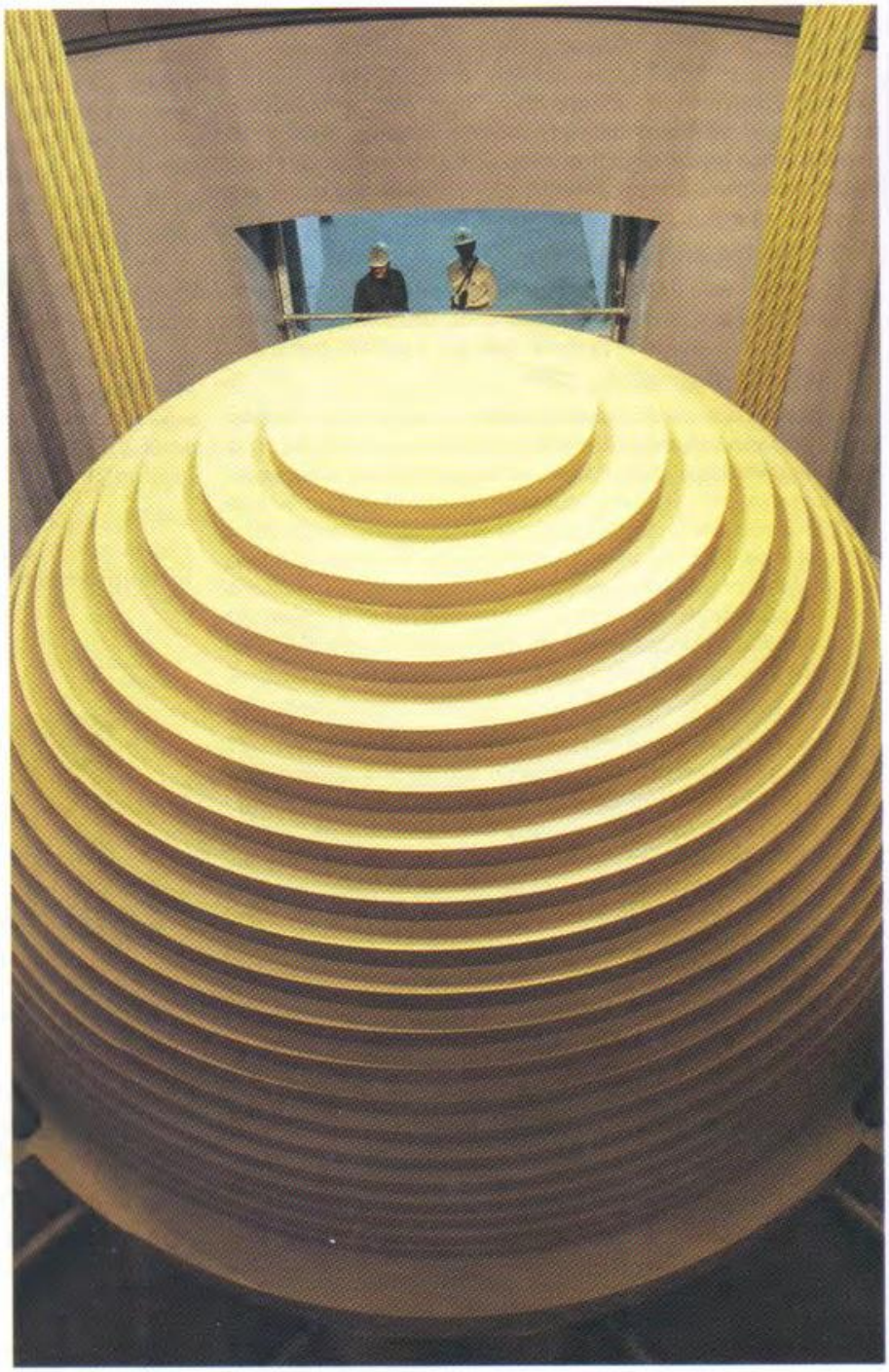
**83** Um objeto está pendurado em uma balança de mola. A balança indica 30 N no ar, 20 N quando o objeto está imerso em água e 24 N quando o objeto está imerso em outro líquido de massa específica desconhecida. Qual é a massa específica deste outro líquido?

**84** Em um experimento, um bloco retangular de altura $h$ é colocado para flutuar em quatro líquidos separados. No primeiro líquido, que é a água, ele flutua totalmente submerso. Nos líquidos $A$, $B$ e $C$ ele flutua com alturas $h/2$, $2h/3$ e $h/4$ acima da superfície do líquido, respectivamente. Qual é a *densidade* (massa específica em relação à da água) do líquido (a) $A$, (b) $B$ e (c) $C$?

**85** Cerca de um terço do corpo de uma pessoa que flutua no Mar Morto está acima da linha da água. Supondo que a massa específica do corpo humano é 0,98 g/cm$^3$, determine a massa específica da água do Mar Morto. (Por que ela é tão maior do que 1,0 g/cm$^3$?)

# 15 Oscilações

*Se o vento faz um edifício oscilar ligeiramente o movimento pode passar despercebido, mas se as oscilações se repetem mais de 10 vezes por segundo tornam-se desagradáveis e podem causar tonturas e náuseas nos ocupantes. Uma razão para isso é que quando uma pessoa está de pé a cabeça tende a balançar mais que os pés, ativando os sensores de movimento do ouvido interno. Vários dispositivos são usados para reduzir a oscilação dos edifícios. Por exemplo, a grande peça (de $5{,}4 \times 10^5$ kg) mostrada nesta fotografia está pendurada no 92º andar de um dos edifícios mais altos do mundo.*



REUTERS/Richard Chung/Landov LLC

*Como é possível atenuar as oscilações inofensivas, mas desagradáveis, que o vento produz em um edifício muito alto?*

A resposta está neste capítulo.

## 15-1 O QUE É FÍSICA?

Nosso mundo está repleto de oscilações, nas quais os objetos se movem repetidamente de um lado para outro. Muitas são simplesmente curiosas ou desagradáveis, mas outras podem ser economicamente importantes ou perigosas. Eis alguns exemplos: Quando um taco rebate uma bola de beisebol, o taco pode sofrer uma oscilação suficiente para machucar a mão do batedor ou mesmo se partir em dois. Quando o vento fustiga uma linha de transmissão de energia elétrica, a linha às vezes oscila ("galopa", no jargão dos engenheiros elétricos) com tanta intensidade que pode se romper, interrompendo o fornecimento de energia elétrica a toda uma região. Nos aviões, a turbulência do ar que passa pelas asas faz com que elas oscilem, causando fadiga no metal, o que pode fazer com que as asas se quebrem. Quando um trem faz uma curva, as rodas oscilam horizontalmente quando são forçadas a mudar de direção, produzindo um som peculiar.

Quando acontece um terremoto nas vizinhanças de uma cidade os edifícios sofrem oscilações tão intensas que podem desmoronar. Quando uma flecha é lançada de um arco as penas da extremidade conseguem passar pelo arco sem se chocar com ele porque a flecha oscila. Quando se deixa cair uma moeda em um prato metálico a moeda oscila de uma forma tão característica que é possível saber o valor da moeda pelo som produzido. Quando um caubói de rodeio monta um touro seu corpo oscila em várias direções enquanto o touro gira e corcoveia (ao menos, é o que o caubói procura fazer).

O estudo e o controle de oscilações são dois objetivos importantes da física e da engenharia. Neste capítulo vamos discutir um tipo básico de oscilação, conhecido como *movimento harmônico simples*.

## 15-2 | Movimento Harmônico Simples

A Fig. 15-1*a* mostra uma seqüência de "instantâneos" de um sistema oscilatório simples, uma partícula que se move repetidamente para um lado e para outro da origem de um eixo $x$. Nesta seção vamos nos limitar a descrever o movimento. Mais adiante discutiremos como esse tipo de movimento pode ser produzido.

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a sua **freqüência**, o número de oscilações completas por segundo. O símbolo de freqüência é $f$ e a unidade de freqüência no SI é o **hertz** (Hz), definido como

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \qquad (15\text{-}1)$$

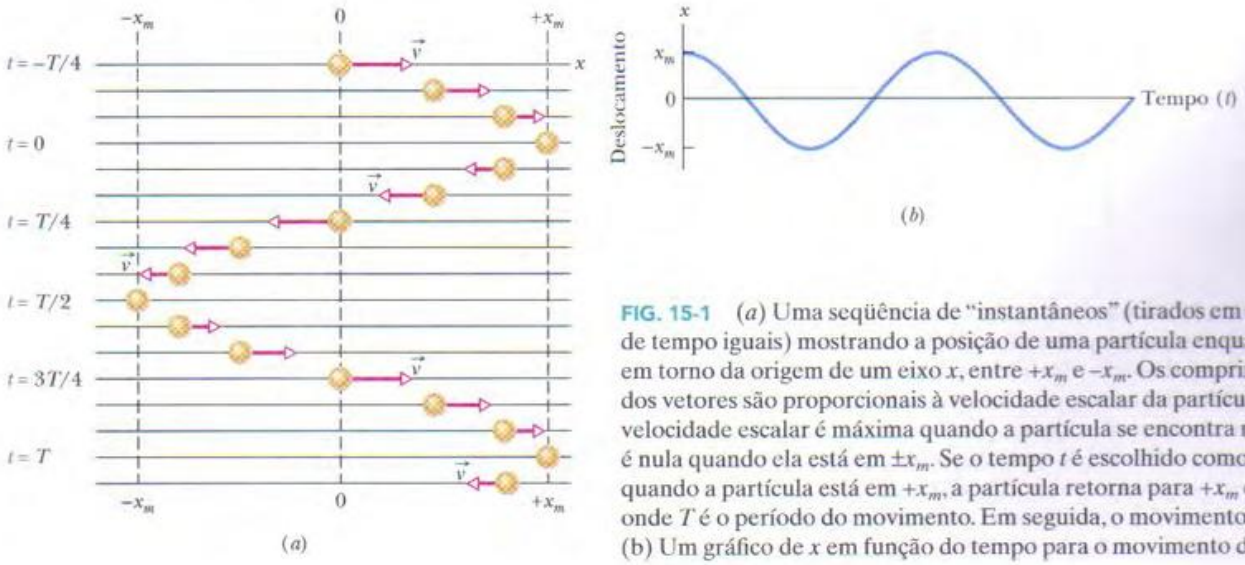



FIG. 15-1 (*a*) Uma seqüência de "instantâneos" (tirados em intervalos de tempo iguais) mostrando a posição de uma partícula enquanto oscila em torno da origem de um eixo $x$, entre $+x_m$ e $-x_m$. Os comprimentos dos vetores são proporcionais à velocidade escalar da partícula. A velocidade escalar é máxima quando a partícula se encontra na origem e é nula quando ela está em $\pm x_m$. Se o tempo $t$ é escolhido como sendo zero quando a partícula está em $+x_m$, a partícula retorna para $+x_m$ em $t = T$, onde $T$ é o período do movimento. Em seguida, o movimento é repetido. (b) Um gráfico de $x$ em função do tempo para o movimento do item (*a*).

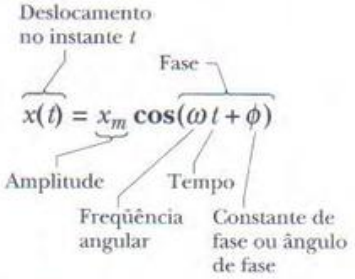



**FIG. 15-2** Nomes das grandezas da Eq. 15-3, que descreve o movimento harmônico simples.

Uma grandeza relacionada à freqüência é o **período** $T$ do movimento, que é o tempo necessário para completar uma oscilação completa (ou um **ciclo**):

$$T = \frac{1}{f}. \tag{15-2}$$

Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de **movimento periódico** ou **movimento harmônico**. No momento estamos interessados em um movimento que se repete de um modo particular, o que está representado na Fig. 15-1*a*. Nesse tipo de movimento o deslocamento $x$ da partícula em relação à origem é dado por uma função do tempo da forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento)}, \tag{15-3}$$

onde $x_m$, $\omega$ e $\phi$ são constantes. Esse movimento é chamado de **movimento harmônico simples** (MHS), uma expressão que significa que o movimento periódico é uma função senoidal do tempo. O gráfico da Eq. 15-3, na qual a função senoidal é uma função co-seno, aparece na Fig. 15-1*b*. (Esse gráfico pode ser obtido fazendo a Fig. 15-1*a* girar 90° no sentido anti-horário e passando uma curva pelas várias posições sucessivas da partícula.) As grandezas que determinam a forma do gráfico são mostradas na Fig. 15-2 com os respectivos nomes. Vamos agora definir essas grandezas.

A grandeza $x_m$, denominada **amplitude** do movimento, é uma constante positiva cujo valor depende do modo como o movimento foi produzido. O índice $m$ indica o valor *máximo*, já que a amplitude representa o deslocamento máximo da partícula em um dos sentidos. A função co-seno da Eq. 15-3 varia entre os limites $\pm 1$; assim, o deslocamento $x(t)$ varia entre os limites $\pm x_m$.

A grandeza dependente do tempo $(\omega t + \phi)$ da Eq. 15-3 é chamada de **fase** do movimento, e a constante $\phi$ é chamada de **constante de fase** (ou **ângulo de fase**). O valor de $\phi$ depende do deslocamento e da velocidade da partícula no instante $t = 0$. Nos gráficos de $x(t)$ da Fig. 15-3*a* a constante de fase $\phi$ é zero.

Para interpretar a constante $\omega$, denominada **freqüência angular** do movimento, notamos primeiramente que o deslocamento $x(t)$ deve ser igual a $x(t + T)$ para qualquer valor de $t$. Para simplificar esta análise, vamos fazer $\phi = 0$ na Eq. 15-3. Nesse caso, podemos escrever

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T). \tag{15-4}$$

A função co-seno se repete pela primeira vez quando seu argumento (a fase) aumenta de $2\pi$ rad; assim, a Eq. 15-4 nos dá

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

ou

$$\omega T = 2\pi.$$

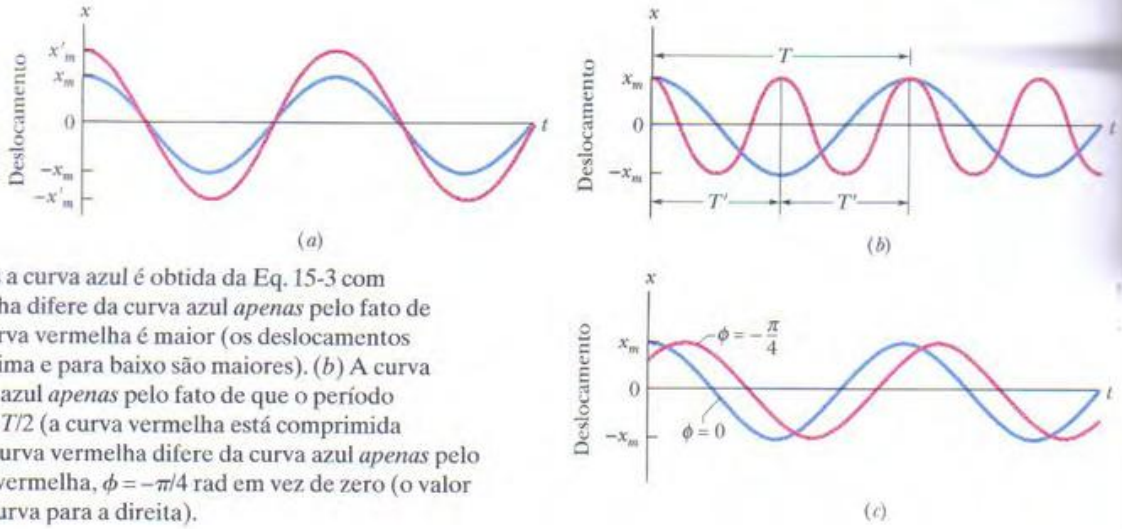



**FIG. 15-3** Nos três casos a curva azul é obtida da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. (*a*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que a amplitude $x'_m$ da curva vermelha é maior (os deslocamentos da curva vermelha para cima e para baixo são maiores). (*b*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que o período da curva vermelha é $T' = T/2$ (a curva vermelha está comprimida horizontalmente). (*c*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que, para a curva vermelha, $\phi = -\pi/4$ rad em vez de zero (o valor negativo de $\phi$ desloca a curva para a direita).

Assim, de acordo com a Eq. 15-2, a freqüência angular é

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \qquad (15\text{-}5)$$

A unidade de freqüência angular no SI é o radiano por segundo. (Por coerência, $\phi$ deve ser expresso em radianos.) A Fig. 15-3 mostra comparações entre as funções $x(t)$ de movimentos harmônicos simples de diferentes amplitudes, períodos (e, portanto, freqüências e freqüências angulares) ou constantes de fase.

**TESTE 1** Uma partícula em oscilação harmônica simples de período $T$ (como a da Fig. 15-1) está em $-x_m$ no instante $t = 0$. A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ no instante (a) $t = 2{,}00T$, (b) $t = 3{,}50T$ e (c) $t = 5{,}25T$?

## A Velocidade do MHS

Derivando a Eq. 15-3, obtemos uma expressão para a velocidade de uma partícula em movimento harmônico simples:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

ou
$$v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade)}. \qquad (15\text{-}6)$$

A Fig. 15-4*a* é um gráfico da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. A Fig. 15-4*b* mostra a Eq. 15-6, também com $\phi = 0$. Analogamente à amplitude $x_m$ da Eq. 15-3, a grandeza positiva $\omega x_m$ da Eq. 15-6 é chamada de **amplitude da velocidade** $v_m$. Como se pode ver na Fig. 15-4*b*, a velocidade da partícula em oscilação varia entre $\pm v_m = \pm \omega x_m$. Note também na figura que a curva de $v(t)$ está *deslocada* (para a esquerda) de um quarto de período em relação à curva de $x(t)$; quando o módulo do deslocamento é máximo [isto é, quando $x(t) = x_m$], o módulo da velocidade é mínimo [isto é, $v(t) = 0$]. Quando o módulo do deslocamento é mínimo (isto é, zero), o módulo da velocidade é máximo (isto é, $v_m = \omega x_m$).

## A Aceleração do MHS

Conhecendo a velocidade $v(t)$ do movimento harmônico simples, podemos obter uma expressão para a aceleração da partícula derivando essa velocidade. Derivando a Eq. 15-6, obtemos:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$$

ou
$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração)}. \qquad (15\text{-}7)$$

A Fig. 15-4*c* é um gráfico da Eq. 15-7 para o caso em que $\phi = 0$. A grandeza positiva $\omega^2 x_m$ da Eq. 15-7 é chamada de **amplitude da aceleração** $a_m$, ou seja, a aceleração da partícula varia entre os limites $\pm a_m = \pm \omega^2 x_m$, como mostra a Fig. 15-4*c*. Observe também que a curva da aceleração $a(t)$ está deslocada (para a esquerda) de $T/4$ em relação à curva da velocidade $v(t)$.

Podemos combinar as Eqs. 15-3 e 15-7 para obter

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \qquad (15\text{-}8)$$

que é a relação característica do movimento harmônico simples:

No MHS, a aceleração é proporcional ao negativo do deslocamento, e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da freqüência angular.

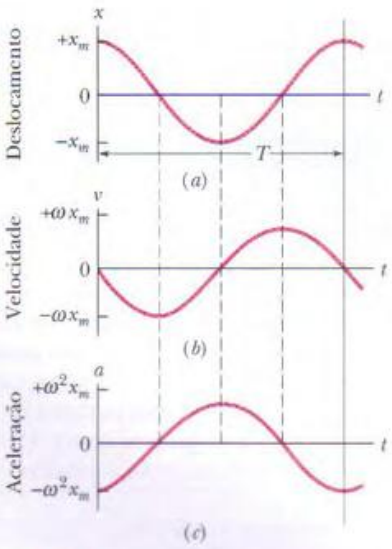



**FIG. 15-4** (*a*) O deslocamento $x(t)$ de uma partícula oscilando em um MHS com ângulo de fase $\phi$ igual a zero. O período $T$ corresponde a uma oscilação completa. (*b*) A velocidade $v(t)$ da partícula. (*c*) A aceleração $a(t)$ da partícula.

Assim, como mostra a Fig. 15-4, quando o deslocamento está passando pelo maior valor positivo a aceleração possui o maior valor negativo e vice-versa. Quando o deslocamento é nulo, a aceleração também é nula.

**TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

***Tática 1:*** ***Ângulos de Fase*** Observe o efeito do ângulo de fase $\phi$ em um gráfico de $x(t)$. Quando $\phi = 0$, $x(t)$ possui um gráfico como o da Fig. 15-4*a*, uma curva co-seno típica. Um valor de $\phi$ positivo desloca a curva para a esquerda ao longo do eixo $t$. (O leitor pode se lembrar disso usando o símbolo $+\phi$, onde a seta para cima indica um aumento de $\phi$ e a seta para a esquerda indica o deslocamento resultante da curva.) Um valor de $\phi$ negativo desloca a curva para a direita, como mostra a Fig. 15-3*c* para $\phi = -\pi/4$.

Quando dois gráficos de um MHS têm ângulos de fase diferentes dizemos que estão *defasados* ou que existe uma *diferença de fase* entre os dois gráficos. Entre as curvas da Fig. 15-3*c* existe uma diferença de fase de $\pi/4$ rad.

Como o MHS se repete após um período $T$ e a função co-seno se repete a cada $2\pi$ rad, um período $T$ representa uma diferença de fase de $2\pi$ rad. Na Fig. 15-4, $x(t)$ está com a fase deslocada um quarto de período para a direita ($-\pi/2$ rad) em relação a $v(t)$ e com a fase deslocada meio período para a direita ($-\pi$ rad) em relação a $a(t)$. Um deslocamento de fase de $2\pi$ rad faz com que uma curva de MHS coincida com si mesma, isto é, permaneça inalterada.

## 15-3 | A Lei do Movimento Harmônico Simples

Uma vez conhecida a forma como a aceleração de uma partícula varia com o tempo, podemos usar a segunda lei de Newton para descobrir qual é a força que deve agir sobre a partícula para que ela adquira essa aceleração. Combinando a segunda lei de Newton com a Eq. 15-8 encontramos, para o movimento harmônico simples, a seguinte relação:

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \tag{15-9}$$

Este resultado, uma força restauradora proporcional ao deslocamento, já foi encontrado em outro contexto: é a expressão matemática da lei de Hooke,

$$F = -kx, \tag{15-10}$$

para uma mola, sendo que neste caso a constante elástica é dada por

$$k = m\omega^2. \tag{15-11}$$

Podemos, na verdade, tomar a Eq. 15-10 como sendo uma definição alternativa do movimento harmônico simples. Em palavras:

> O movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força proporcional ao deslocamento da partícula e de sinal oposto.

O sistema bloco-mola da Fig. 15-5 constitui um **oscilador harmônico simples linear** (ou, simplesmente, oscilador linear), onde o termo "linear" indica que $F$ é proporcional a $x$ e não a alguma outra potência de $x$. A freqüência angular $\omega$ do movimento harmônico simples do bloco está relacionada à constante elástica $k$ e à massa $m$ do bloco pela Eq. 15-11, que nos dá

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(freqüência angular)}. \tag{15-12}$$

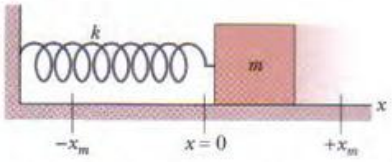



**FIG. 15-5** Um oscilador harmônico simples linear. Não há atrito com a superfície. Como a partícula da Fig. 15-1, o bloco se move em movimento harmônico simples quando é puxado ou empurrado a partir da posição $x = 0$ e depois liberado. O deslocamento é dado pela Eq. 15-3.

Combinando as Eqs. 15-5 e 15-12 podemos escrever, para o **período** do oscilador linear da Fig. 15-5,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(período)}. \tag{15-13}$$

De acordo com as Eqs. 15-12 e 15-13, uma grande freqüência angular (e, portanto, um pequeno período) está associada a uma mola rígida ($k$ elevado) e a um bloco leve ($m$ pequeno).

Todo sistema oscilatório, seja ele um trampolim ou uma corda de violino, possui uma certa "elasticidade" e uma certa "inércia" e, portanto, se parece com um oscilador linear. No oscilador linear da Fig. 15-5 esses elementos estão concentrados em partes diferentes do sistema: a elasticidade está inteiramente na mola, cuja massa desprezamos, e a inércia está inteiramente no bloco, cuja elasticidade é ignorada. Em uma corda de violino, porém, os dois elementos estão presentes na corda, como vamos ver no Capítulo 16.

**TESTE 2** Qual das seguintes relações entre a força $F$ exercida sobre uma partícula e a posição $x$ da partícula produz um movimento harmônico simples: (a) $F = -5x$, (b) $F = -400x^2$, (c) $F = 10x$ ou (d) $F = 3x^2$?

## Exemplo 15-1

Um bloco cuja massa $m$ é 680 g está preso a uma mola cuja constante elástica $k$ é 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância $x = 11$ cm a partir da posição de equilíbrio em $x = 0$ e liberado a partir do repouso no instante $t = 0$.

(a) Quais são a freqüência angular, a freqüência e o período do movimento resultante?

**IDÉIA-CHAVE** O sistema bloco-mola constitui um oscilador harmônico simples linear, com o bloco executando um MHS.

***Cálculos:*** A freqüência é dada pela Eq. 15-12:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\ \text{N/m}}{0{,}68\ \text{kg}}} = 9{,}78\ \text{rad/s}$$

$$\approx 9{,}8\ \text{rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-5, a freqüência é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9{,}78\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 1{,}56\ \text{Hz} \approx 1{,}6\ \text{Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-2, o período é

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}56\ \text{Hz}} = 0{,}64\ \text{s} = 640\ \text{ms}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a amplitude das oscilações?

**IDÉIA-CHAVE** Na ausência de atrito, a energia mecânica do sistema bloco-mola é conservada.

***Raciocínio:*** O bloco é liberado a 11 cm da posição de equilíbrio, com energia cinética nula e o máximo de energia potencial elástica. Assim, o bloco terá energia cinética nula sempre que estiver novamente a 11 cm da posição de equilíbrio, o que significa que jamais se afastará mais do que 11 cm de posição de equilíbrio. Seu deslocamento máximo é de 11 cm:

$$x_m = 11\ \text{cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade máxima $v_m$ do bloco e onde se encontra o bloco quando tem essa velocidade?

**IDÉIA-CHAVE** A velocidade máxima $v_m$ é a amplitude da velocidade $\omega x_m$ na Eq. 15-6.

***Cálculo:*** Assim, temos:

$$v_m = \omega x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})(0{,}11\ \text{m})$$

$$= 1{,}1\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta velocidade máxima é observada quando o bloco está passando pela origem; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*b*, onde se pode observar que a velocidade é máxima em $x = 0$.

(d) Qual é o módulo $a_m$ da aceleração máxima do bloco?

**IDÉIA-CHAVE** O módulo $a_m$ da aceleração máxima é a amplitude da aceleração $\omega^2 x_m$ na Eq. 15-7.

***Cálculo:*** Assim, temos:

$$a_m = \omega^2 x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})^2(0{,}11\ \text{m})$$

$$= 11\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta aceleração máxima é observada quando o bloco está nas extremidades da trajetória. Nesses pontos a força que age sobre o bloco possui o módulo máximo; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*c*, onde se pode ver que os módulos do deslocamento e da aceleração são máximos nos mesmos instantes.

(e) Qual é a constante de fase $\phi$ do movimento?

***Cálculos:*** A Eq. 15-3 fornece o deslocamento do bloco em função do tempo. Sabemos que no instante $t = 0$ o bloco está em $x = x_m$. Substituindo essas *condições iniciais*, como são chamadas, na Eq. 15-3 e cancelando $x_m$, obtemos

$$1 = \cos\phi. \qquad \text{(15-14)}$$

Tomando o inverso da função co-seno, obtemos

$$\phi = 0\ \text{rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Qualquer ângulo que seja um múltiplo inteiro de $2\pi$ rad também satisfaz a Eq. 15-14; escolhemos o menor ângulo.)

(f) Qual é a função deslocamento $x(t)$ do sistema bloco-mola?

***Cálculo:*** A forma geral da função $x(t)$ é dada pela Eq. 15-3. Substituindo as grandezas conhecidas, obtemos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$= (0{,}11\text{ m}) \cos[(9{,}8\text{ rad/s})t + 0]$$
$$= 0{,}11 \cos(9{,}8t), \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $x$ está em metros e $t$ em segundos.

## Exemplo 15-2

Em $t = 0$ o deslocamento $x(0)$ do bloco de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 é $-8{,}50$ cm. (Leia $x(0)$ como "$x$ no instante zero".) A velocidade do bloco $v(0)$ nesse instante é $-0{,}920$ m/s, e a aceleração $a(0)$ é $+47{,}0$ m/s$^2$.

(a) Qual é a freqüência angular $\omega$ desse sistema?

**IDÉIA-CHAVE** Com o bloco em MHS, as Eqs. 15-3, 15-6 e 15-7 fornecem o seu deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, e todas contêm a freqüência angular $\omega$.

***Cálculos:*** Vamos fazer $t = 0$ nas três equações para ver se uma delas nos fornece o valor de $\omega$. Temos:

$$x(0) = x_m \cos\phi, \qquad (15\text{-}15)$$
$$v(0) = -\omega x_m \operatorname{sen}\phi, \qquad (15\text{-}16)$$

e

$$a(0) = \omega^2 x_m \cos\phi. \qquad (15\text{-}17)$$

A Eq. 15-15 não contém $\omega$. Nas Eqs. 15-16 e 15-17 conhecemos o valor do lado esquerdo, mas não conhecemos $x_m$ e $\omega$. Entretanto, dividindo a Eq. 15-17 pela Eq. 15-15 eliminamos $x_m$ e $\phi$ e podemos calcular o valor de $\omega$:

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47{,}0\text{ m/s}^2}{-0{,}0850\text{ m}}}$$
$$= 23{,}5\text{ rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais são os valores da constante de fase $\phi$ e da amplitude $x_m$?

***Cálculos:*** Conhecemos $\omega$ e queremos determinar $\phi$ e $x_m$. Dividindo a Eq. 15-16 pela Eq. 15-15, obtemos

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \operatorname{sen}\phi}{x_m \cos\phi} = -\omega \tan\phi.$$

Explicitando $\tan\phi$, temos:

$$\tan\phi = \frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0{,}920\text{ m/s}}{(23{,}5\text{ rad/s})(-0{,}0850\text{ m})}$$
$$= -0{,}461.$$

Esta equação possui duas soluções:

$$\phi = -25^\circ \text{ e } \phi = 180^\circ + (-25^\circ) = 155^\circ.$$

(Normalmente apenas a primeira dessas soluções é mostrada pelas calculadoras.) Para escolher a solução correta testamos as duas, usando-as para calcular valores da amplitude $x_m$. De acordo com a Eq. 15-15, para $\phi = -25^\circ$,

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos\phi} = \frac{-0{,}0850\text{ m}}{\cos(-25^\circ)} = -0{,}094\text{ m}.$$

Para $\phi = 155^\circ$, $x_m = 0{,}094$ m. Como a amplitude do MHS deve ser uma constante positiva, a constante de fase e a amplitude corretas são

$$\phi = 155^\circ \text{ e } x_m = 0{,}094\text{ m} = 9{,}4\text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 2:*** *Identificação do MHS* No MHS linear a aceleração $a$ e o deslocamento $x$ do sistema estão relacionados através de uma equação da forma

$$a = -(\text{constante positiva})x,$$

segundo a qual a aceleração é proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, com o sinal contrário. Quando encontramos essa expressão para um sistema oscilatório podemos imediatamente compará-la com a Eq. 15-8, identificar a constante positiva como sendo igual a $\omega^2$ e assim obter uma expressão para a freqüência angular do movimento. Em seguida, podemos usar a Eq. 15-5 para calcular o período $T$ e a freqüência $f$.

Em alguns problemas é possível escrever uma expressão para a força $F$ em função do deslocamento $x$. Se o movimento é um MHS linear, a força e o deslocamento estão relacionados através da equação

$$F = -(\text{constante positiva})x,$$

segundo a qual a força é proporcional ao deslocamento, com o sinal contrário. Quando encontramos essa expressão podemos imediatamente compará-la com a Eq. 15-10 e identificar a constante positiva como sendo igual a $k$. Se a massa é conhecida podemos usar as Eqs. 15-12, 15-13 e 15-5 para calcular a freqüência angular $\omega$, o período $T$ e a freqüência $f$.

## 15-4 | A Energia do Movimento Harmônico Simples

Vimos no Capítulo 8 que a energia de um oscilador linear é transformada repetidamente de energia cinética em energia potencial e vice-versa, enquanto a soma das duas, a energia mecânica $E$ do oscilador, permanece constante. Vamos agora examinar essa situação em termos quantitativos.

A energia potencial de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 está inteiramente associada à mola. Seu valor depende do grau de alongamento ou compressão da mola, ou seja, de $x(t)$. Podemos usar as Eqs. 8-11 e 15-3 para obter a seguinte expressão para a energia potencial:

$$U(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}18)$$

*Atenção:* A notação $\cos^2 A$ (usada na Eq. 15-18) significa $(\cos A)^2$ e *não é o mesmo* que $\cos A^2$, que significa $\cos(A^2)$.

A energia cinética do sistema da Fig. 15-5 está inteiramente associada ao bloco. Seu valor depende da rapidez com a qual o bloco está se movendo, ou seja, de $v(t)$. Podemos usar a Eq. 15-6 para obter a seguinte expressão para a energia cinética:

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}19)$$

Usando a Eq. 15-12 para substituir $\omega^2$ por $k/m$, podemos escrever a Eq. 15-19 na forma

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}20)$$

De acordo com as Eqs. 15-18 e 15-20, a energia mecânica é dada por

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$

Para qualquer ângulo $\alpha$,

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

Assim, a grandeza entre colchetes aqui é igual à unidade, e temos

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kx_m^2. \qquad (15\text{-}21)$$

A energia mecânica de um oscilador linear é de fato constante e independente do tempo. A energia potencial e a energia cinética de um oscilador linear são mostradas em função do tempo $t$, na Fig. 15-6*a*, e em função do deslocamento $x$, na Fig. 15-6*b*.

Agora podemos entender por que um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de elasticidade e um elemento de inércia: o primeiro armazena energia potencial e o segundo armazena energia cinética.

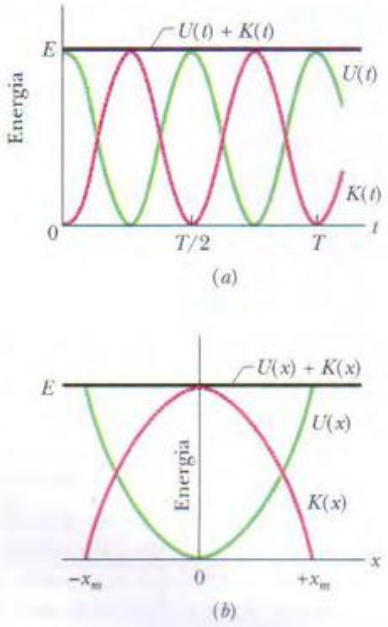



**FIG. 15-6** (*a*) Energia potencial $U(t)$, energia cinética $K(t)$ e energia mecânica $E$ em função do tempo $t$ para um oscilador harmônico linear. Observe que todas as energias são positivas e que a energia potencial e a energia cinética passam por dois máximos em cada período. (*b*) Energia potencial $U(x)$, energia cinética $K(x)$ e energia mecânica $E$ em função da posição $x$ para um oscilador harmônico linear de amplitude $x_m$. Para $x = 0$, a energia é toda cinética; para $x = \pm x_m$, é toda potencial.

**TESTE 3** Na Fig. 15-5 o bloco possui uma energia cinética de 3 J e a mola possui uma energia potencial elástica de 2 J quando o bloco está em $x = +2{,}0$ cm. (a) Qual é a energia cinética do bloco quando ele está em $x = 0$? Qual é a energia potencial elástica da mola quando o bloco está em (b) $x = -2{,}0$ cm e (c) $x = -x_m$?

### Exemplo 15-3

A grande peça que aparece na fotografia de abertura do capítulo está pendurada em quatro cabos e oscila como um pêndulo quando o vento faz o edifício balançar. Quando o edifício se inclina em uma direção (leste, por exemplo) a peça faz o mesmo, mas com um certo retardo, de modo que quando finalmente oscila para leste o edifício está se inclinando para oeste. Na verdade, o movimento do pêndulo se mantém sempre defasado do movimento do edifício, e tende a compensá-lo.

Outros edifícios utilizam tipos diferentes de *amortecedor de massa*, como são chamados esses dispositivos para combater oscilações. Alguns, como o do edifício John Hancock, em Boston, possuem um grande bloco que oscila na extremidade de uma mola, movendo-se em um trilho lubrificado. O princípio é o mesmo do pêndulo: o movimento do bloco está sempre defasado em relação ao movimento do edifício.

Suponha que o bloco possui uma massa $m = 2{,}72 \times 10^5$ kg e foi projetado para oscilar em uma freqüência $f = 10{,}0$ Hz e com uma amplitude $x_m = 20{,}0$ cm.

(a) Qual é a energia mecânica total $E$ do sistema bloco-mola?

**IDÉIA-CHAVE** A energia mecânica $E$ (a soma da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ do bloco com a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ da mola) é constante durante o movimento do oscilador. Assim, podemos escolher qualquer posição do bloco para calcular o valor de $E$.

***Cálculos:*** Como foi dada a amplitude $x_m$ das oscilações, vamos calcular o valor de $E$ quando o bloco está na posição $x = x_m$ com $v = 0$. Para determinar o valor de $U$ nesse ponto precisamos primeiro calcular o valor da constante elástica $k$. De acordo com a Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) e a Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi f$), temos:

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 = m(2\pi f)^2 \\ &= (2{,}72 \times 10^5 \text{ kg})(2\pi)^2(10{,}0 \text{ Hz})^2 \\ &= 1{,}073 \times 10^9 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

Podemos agora calcular $E$:

$$\begin{aligned} E = K + U &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}(1{,}073 \times 10^9 \text{ N/m})(0{,}20 \text{ m})^2 \\ &= 2{,}147 \times 10^7 \text{ J} \approx 2{,}1 \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a velocidade do bloco ao passar pelo ponto de equilíbrio?

***Cálculos:*** Estamos interessados em calcular a velocidade no ponto $x = 0$, no qual a energia potencial é $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ e a energia mecânica total é igual à energia cinética. Sendo assim, podemos escrever

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$2{,}147 \times 10^7 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(2{,}72 \times 10^5 \text{ kg})v^2 + 0,$$

ou

$$v = 12{,}6 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como neste ponto toda a energia do sistema foi convertida em energia cinética, esta é a velocidade máxima $v_m$.

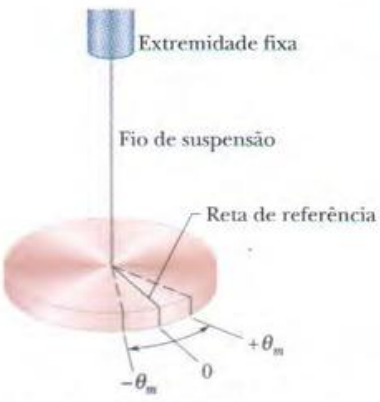



FIG. 15-7 Um pêndulo de torção é uma versão angular de um oscilador harmônico simples linear. O disco oscila em um plano horizontal; a reta de referência oscila com amplitude angular $\theta_m$. A torção do fio de suspensão armazena energia potencial de forma semelhante a uma mola e produz o torque restaurador.

## 15-5 | Um Oscilador Harmônico Simples Angular

A Fig. 15-7 mostra uma versão angular de um oscilador harmônico simples; nesse caso, o elemento de elasticidade está associado à torção de um fio suspenso, e não ao alongamento e à compressão de uma mola. O dispositivo recebe o nome de **pêndulo de torção**.

Quando fazemos girar o disco na Fig. 15-7, produzindo um deslocamento angular $\theta$ a partir da posição de equilíbrio (na qual a reta de referência está em $\theta = 0$) e o liberamos, ele passa a oscilar em torno dessa posição em um **movimento harmônico simples angular.** A rotação do disco de um ângulo $\theta$ em qualquer sentido produz um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\theta. \qquad (15\text{-}22)$$

onde $\kappa$ (letra grega *capa*) é uma constante, a chamada **constante de torção**, que depende do comprimento, do diâmetro e do material de que é feito o fio.

A comparação da Eq. 15-22 com a Eq. 15-10 nos leva a suspeitar que a Eq. 15-22 é a forma angular da lei de Hooke e que podemos transformar a Eq. 15-13, que fornece o período do MHS linear, na equação para o período do MHS angular: substituímos a constante elástica $k$ na Eq. 15-13 pela constante equivalente, a constante $\kappa$ da Eq. 15-22, e substituímos a massa $m$ na Eq. 15-13 pela grandeza equivalente, o momento de inércia $I$ do disco. Essas substituições levam a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \text{(pêndulo de torção)}, \qquad (15\text{-}23)$$

que é a equação correta para o período de um oscilador harmônico simples angular, ou pêndulo de torção.

**TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

***Tática 3:*** ***Identificação do MHS Angular*** Quando um sistema executa um movimento harmônico simples angular, sua aceleração angular $\alpha$ e seu deslocamento angular $\theta$ estão relacionados através de uma equação da forma

$$\alpha = -(\text{constante positiva})\theta.$$

Esta equação é a equivalente angular da Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$) e mostra que a aceleração angular $\alpha$ é proporcional ao deslocamento angular $\theta$ a partir da posição de equilíbrio, com o sinal contrário. Quando encontramos uma expressão com essa forma podemos identificar a constante positiva como sendo igual a $\omega^2$ e, assim, calcular os valores de $\omega$, $f$ e $T$.

Também é possível identificar o MHS angular a partir de uma expressão para o torque $\tau$ em função do deslocamento angular $\theta$, já que essa expressão deve ter a forma da Eq. 15-22 ($\tau = -\kappa\theta$), ou seja,

$$\tau = -(\text{constante positiva})\theta.$$

Esta equação é a equivalente angular da Eq. 15-10 ($F = -kx$) e mostra que o torque $\tau$ é proporcional ao deslocamento angular $\theta$ a partir da posição de equilíbrio, mas tende a fazer o sistema girar no sentido oposto. Se temos uma expressão com essa forma podemos identificar a constante positiva como sendo a constante de torção $\kappa$. Se conhecemos o momento de inércia $I$ do sistema, podemos determinar $T$.

## Exemplo 15-4

A Fig. 15-8*a* mostra uma barra fina cujo comprimento $L$ é 12,4 cm e cuja massa $m$ é 135 g, suspensa em fio longo pelo ponto médio. O período $T_a$ do seu MHS angular é medido como sendo 2,53 s. Um objeto de forma irregular, que será chamado de objeto $X$, é pendurado no mesmo fio, como na Fig. 15-8*b*, e o seu período $T_b$ é medido como sendo 4,76 s. Qual é o momento de inércia do objeto $X$ em relação ao eixo de suspensão?

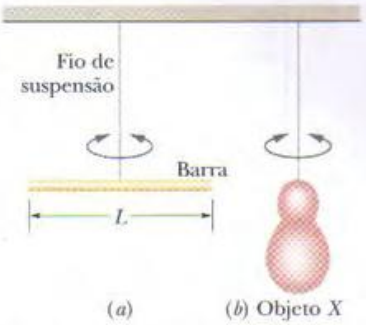



FIG. 15-8 Dois pêndulos de torção, compostos por (*a*) um fio e uma barra e (*b*) o mesmo fio e um objeto de forma irregular.

**IDÉIA-CHAVE** O momento de inércia tanto da barra quanto do objeto $X$ está relacionado ao período através da Eq. 15-23.

***Cálculos:*** Na Tabela 10-2*e* o momento de inércia de uma barra em torno de um eixo perpendicular passando pelo ponto médio é dado por $\frac{1}{12}mL^2$. Assim, para a barra da Fig. 15-8*a*, temos:

$$I_a = \tfrac{1}{12}mL^2 = (\tfrac{1}{12})(0{,}135\ \text{kg})(0{,}124\ \text{m})^2$$
$$= 1{,}73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Vamos agora escrever a Eq. 15-23 duas vezes, uma para a barra e outra para o objeto $X$:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{e} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

A constante $\kappa$, que é uma propriedade do fio, é a mesma nos dois casos; apenas os períodos e os momentos de inércia são diferentes.

Vamos elevar as duas equações ao quadrado, dividir a segunda pela primeira e explicitar $I_b$ na equação resultante. O resultado é o seguinte:

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1{,}73 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\frac{(4{,}76\ \text{s})^2}{(2{,}53\ \text{s})^2}$$
$$= 6{,}12 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

# 15-6 | Pêndulos

Voltamos agora nossa atenção para uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força de retorno está associada à gravitação, e não às propriedades elásticas de um fio ou de uma mola.

## O Pêndulo Simples

Se uma maçã é posta para balançar na extremidade de um fio longo, ela descreve um movimento harmônico simples? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o período $T$ do movimento? Para responder a essas perguntas considere um **pêndulo simples**, composto por uma partícula de massa $m$ (chamada de *peso* do pêndulo) suspensa

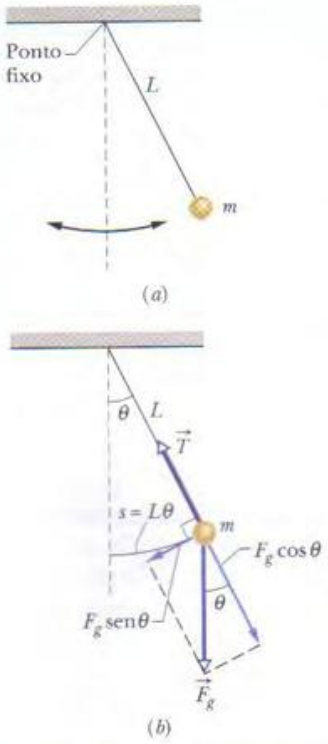



**FIG. 15-9** (*a*) Um pêndulo simples. (*b*) As forças que agem sobre o peso são a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a tensão $\vec{T}$ do fio. A componente tangencial $F_g$ sen $\theta$ da força gravitacional é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central.

por uma das extremidades de um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento $L$, cuja outra extremidade está fixa, como na Fig. 15-9*a*. O peso está livre para oscilar no plano do papel, para a esquerda e para a direita de uma reta vertical que passa pelo ponto fixo do fio.

As forças que agem sobre o peso são a tração $\vec{T}$ exercida pelo fio e a força gravitacional $\vec{F}_g$, como mostra a Fig. 15-9*b*, onde o fio faz um ângulo $\theta$ com a vertical. Decompomos $\vec{F}_g$ em uma componente radial $F_g$ cos $\theta$ e uma componente $F_g$ sen $\theta$ que é tangente à trajetória do peso. Esta componente tangencial produz um torque restaurador em relação ao ponto fixo do pêndulo porque sempre age no sentido oposto ao do deslocamento do peso, tendendo a levá-lo de volta ao ponto central. Este ponto ($\theta = 0$) é chamado de *posição de equilíbrio*, porque o pêndulo ficaria em repouso neste ponto se parasse de oscilar.

De acordo com a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), este torque restaurador pode ser escrito na forma

$$\tau = -L(F_g \operatorname{sen} \theta), \tag{15-24}$$

onde o sinal negativo indica que o torque age no sentido de reduzir $\theta$ e $L$ é o braço de alavanca da componente $F_g$ sen $\theta$ da força gravitacional em relação ao ponto fixo do pêndulo. Substituindo a Eq. 15-24 na Eq. 10-44 ($\tau = I\alpha$) e substituindo o módulo de $F_g$ por $mg$, obtemos

$$-L(mg \operatorname{sen} \theta) = I\alpha, \tag{15-25}$$

onde $I$ é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto fixo e $\alpha$ é a aceleração angular do pêndulo em relação a esse ponto.

Podemos simplificar a Eq. 15-25 supondo que o ângulo $\theta$ é pequeno, pois nesse caso podemos substituir sen $\theta$ por $\theta$ (expresso em radianos). (Por exemplo: se $\theta = 5{,}00° = 0{,}0873$ rad, sen $\theta = 0{,}0872$, uma diferença de apenas 0,1%.) Usando essa aproximação e explicitando $\alpha$, obtemos

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta. \tag{15-26}$$

Esta equação é o equivalente angular da Eq. 15-8, a relação característica do MHS. Ela nos diz que a aceleração angular $\alpha$ do pêndulo é proporcional ao deslocamento angular $\theta$ com o sinal oposto. Assim, quando o peso do pêndulo se move para a direita, como na Fig. 15-9*a*, a aceleração *para a esquerda* aumenta até o peso parar e começar a se mover para a esquerda. Quando o peso está à esquerda da posição de equilíbrio, a aceleração para a direita tende a fazê-lo voltar para a direita, e assim por diante, o que produz um MHS. Mais precisamente, o movimento de *um pêndulo simples com apenas pequenos ângulos de deslocamento* pode ser aproximado por MHS. Podemos expressar essa restrição de outra forma: a **amplitude angular** $\theta_m$ do movimento (o ângulo máximo de deslocamento) deve ser pequena.

Comparando as Eqs. 15-26 e 15-8 notamos que a freqüência angular do pêndulo é $\omega = \sqrt{mgL/I}$. Substituindo essa expressão de $\omega$ na Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi/T$), vemos que o período do pêndulo pode ser escrito como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \tag{15-27}$$

Toda a massa de um pêndulo simples está concentrada na massa $m$ do peso do pêndulo, que está a uma distância $L$ do ponto fixo. Assim, podemos usar a Eq. 10-33 ($I = mr^2$) para escrever $I = mL^2$ como o momento de inércia do pêndulo. Substituindo este valor na Eq. 15-27 e simplificando, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(pêndulo simples, pequena amplitude).} \tag{15-28}$$

Neste capítulo vamos supor que os ângulos de oscilação do pêndulo são sempre pequenos.

## O Pêndulo Físico

Ao contrário do pêndulo simples, um pêndulo real, freqüentemente chamado de **pêndulo físico**, pode ter uma distribuição complicada de massa. Um pêndulo físico também executa um MHS? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o seu período?

A Fig. 15-10 mostra um pêndulo físico arbitrário deslocado de um ângulo $\theta$ em relação à posição de equilíbrio. A força gravitacional $\vec{F}_g$ está aplicada ao centro de massa $C$, a uma distância $h$ do ponto fixo $O$. Comparando as Figs. 15-9*b* e 15-10, vemos que existe apenas uma diferença importante entre um pêndulo físico arbitrário e um pêndulo simples. No caso do pêndulo físico, o braço de alavanca da componente restauradora $F_g \operatorname{sen} \theta$ da força gravitacional é $h$, e não o comprimento $L$ do fio. Sob todos os outros aspectos a análise do pêndulo físico é idêntica à análise do pêndulo simples até a Eq. 15-27. Assim, para pequenos valores de $\theta_m$ o movimento é, aproximadamente, um MHS.

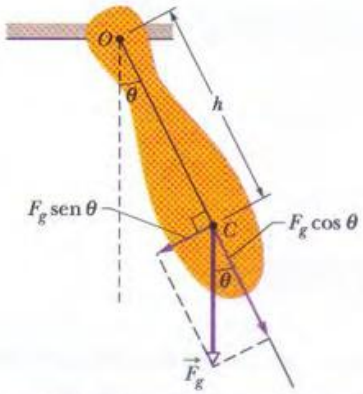



FIG. 15-10 Um pêndulo físico. O torque restaurador é $hF_g \operatorname{sen} \theta$. Quando $\theta = 0$, o centro de massa $C$ está situado diretamente abaixo do ponto de suspensão $O$.

Se substituirmos $L$ por $h$ na Eq. 15-27, podemos escrever o período como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad \text{(pêndulo físico, pequena amplitude).} \qquad (15\text{-}29)$$

Como no pêndulo simples, $I$ é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto $O$. Embora $I$ seja mais igual a $mL^2$ (pois depende da forma do pêndulo físico), ainda é proporcional a $m$.

Um pêndulo físico não oscila se o ponto fixo é o centro de massa. Formalmente, isso corresponde a fazer $h = 0$ na Eq. 15-29. Nesse caso temos $T = \infty$, o que significa que o pêndulo jamais chega a completar uma oscilação.

A todo pêndulo físico com um ponto fixo $O$ que oscila com período $T$ corresponde um pêndulo simples de comprimento $L_0$ e com o mesmo período $T$. Podemos usar a Eq. 15-28 para calcular o valor de $L_0$. O ponto do pêndulo físico que fica a uma distância $L_0$ do ponto $O$ é chamado de *centro de oscilação* do pêndulo físico para o ponto de suspensão dado.

## Medindo g

Podemos usar um pêndulo físico para medir a aceleração de queda livre $g$ em um certo ponto da superfície da Terra. (Milhares de medições desse tipo foram feitas como parte de estudos geofísicos.)

Para analisar um caso simples, tome o pêndulo como sendo uma barra uniforme de comprimento $L$ suspensa por uma das extremidades. Para essa configuração, $h$ da Eq. 15-29, a distância entre o ponto fixo e o centro de massa é $L/2$. De acordo com a Tabela 10-2*e*, o momento de inércia desse pêndulo em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro de massa é $\frac{1}{12}mL^2$. Aplicando o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ($I = I_{CM} + Mh^2$), descobrimos que o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular passando por uma das extremidades da barra é

$$I = I_{CM} + mh^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad (15\text{-}30)$$

Fazendo $h = L/2$ e $I = mL^2/3$ na Eq. 15-29 e explicitando $g$, obtemos

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \qquad (15\text{-}31)$$

Assim, medindo $L$ e o período $T$ podemos determinar o valor de $g$ no local onde se encontra o pêndulo. (Para medidas de precisão são necessários alguns refinamentos, como colocar o pêndulo em uma câmara evacuada.)

✓ **TESTE 4** Três pêndulos físicos, de massas $m_0$, $2m_0$ e $3m_0$, têm a mesma forma e tamanho e estão suspensos pelo mesmo ponto. Ordene as massas de acordo com o período de oscilação do pêndulo, começando pelo maior.

## Exemplo 15-5

Na Fig. 15-11*a* uma régua de um metro oscila em torno de um ponto fixo em uma das extremidades, a uma distância $h$ do centro de massa da régua.

(a) Qual é o período de oscilação $T$?

**IDÉIA-CHAVE** A régua não é um pêndulo simples, porque a massa não está concentrada na extremidade oposta ao ponto fixo; a régua é, portanto, um pêndulo físico.

***Cálculos:*** O período de um pêndulo físico é dado pela Eq. 15-29, que exige o conhecimento do momento de inércia da régua em relação ao ponto fixo. Vamos tratar a régua como uma barra uniforme de comprimento $L$ e massa $m$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 15-30, $I = \frac{1}{3}mL^2$ a distância $h$ da Eq. 15-29 é $L/2$. Substituindo esses valores na Eq. 15-29, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad (15\text{-}32)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(2)(1{,}00\text{ m})}{(3)(9{,}8\text{ m/s}^2)}} = 1{,}64\text{ s} \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que este resultado não depende da massa $m$ do pêndulo.

(b) Qual é a distância $L_0$ entre o ponto fixo $O$ da régua e o centro de oscilação?

***Cálculos:*** Estamos interessados em determinar o comprimento $L_0$ do pêndulo simples (desenhado na Fig. 15-11*b*), que possui o mesmo período que o pêndulo físico (a régua) da Fig. 15-11*a*. Igualando as Eqs. 15-28 e 15-32, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Podemos ver, por inspeção, que

$$L_0 = \tfrac{2}{3}L = (\tfrac{2}{3})(100\text{ cm}) = 66{,}7\text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Na Fig. 15-11*a* o ponto $P$ está a essa distância do ponto fixo $O$. Assim, o ponto $P$ é o centro de oscilação da barra para o ponto fixo dado.

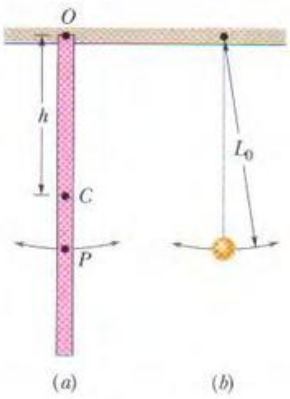



FIG. 15-11 (*a*) Uma régua de um metro suspensa por uma das extremidades para formar um pêndulo físico. (*b*) Um pêndulo simples cujo comprimento $L_0$ é escolhido para que os períodos dos dois pêndulos sejam iguais. O ponto $P$ do pêndulo (*a*) é o centro de oscilação.

## Exemplo 15-6 Aumente sua capacidade

Um trampolim de competição repousa sobre um fulcro que está a cerca de um terço do comprimento do trampolim a partir da extremidade fixa (Fig. 15-12*a*). Na corrida para o mergulho um saltador dá três passos rápidos no trampolim, passando pelo fulcro e fazendo a extremidade livre do trampolim girar para baixo. Quando o trampolim volta à posição horizontal o saltador pula para cima e para a frente, em direção à extremidade livre do trampolim (Fig. 15-12*b*). Um saltador experiente atinge a extremidade livre exatamente no momento em que o trampolim completou 2,5 oscilações a partir do início do salto. Isso significa que o saltador pisa na extremidade livre exatamente no momento em que esta está se deslocando para baixo com a velocidade máxima (Fig. 15-12*c*). Dessa forma, o saltador faz a extremidade livre descer mais ainda e consegue um grande impulso para o alto.

A Fig. 15-12*d* mostra um modelo simples, mas realista, de um trampolim de competição. A parte do trampolim à direita do fulcro é tratada como uma barra rígida de comprimento $L$, que pode girar em torno de uma articulação no fulcro, comprimindo uma mola (imaginária) abaixo da extremidade livre do trampolim. Se a massa da barra é $m = 20{,}0$ kg e o salto dura $t_s = 0{,}620$ s, qual deve ser a constante elástica $k$ para que o saltador pise o trampolim no momento certo?

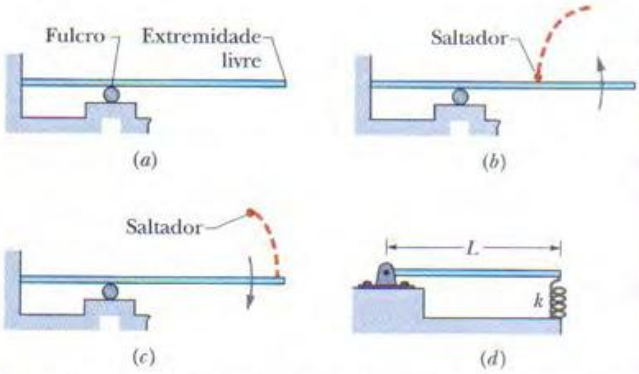



FIG. 15-12 (*a*) Um trampolim. (*b*) O saltador pula para cima e para a frente quando o trampolim passa pela posição horizontal. (*c*) O saltador pisa novamente na tábua 2,5 oscilações depois. (*d*) Modelo do trampolim usando uma barra e uma mola.

**IDÉIA-CHAVE** Se o movimento da barra é um MHS, a aceleração e o deslocamento da extremidade livre estão relacionados por uma expressão como a da Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$). Isso significa que podemos calcular $\omega$ e em seguida o valor desejado, $k$, a partir dessa expressão.

***Torque e força:*** Como a barra gira em torno da articulação enquanto a extremidade livre oscila, estamos interessados no torque $\vec{\tau}$ aplicado à barra em relação à articulação. Esse torque é produzido pela força $\vec{F}$ que a mola exerce sobre a barra. Como $\vec{F}$ varia com o tempo, $\vec{\tau}$ também varia. Entretanto, em qualquer instante os módulos de $\vec{\tau}$ e $\vec{F}$ estão relacionados pela Eq. 10-39 ($\tau = rF \operatorname{sen} \phi$). Temos ainda

$$\tau = LF \operatorname{sen} 90°, \tag{15-33}$$

onde $L$ é o braço de alavanca da força $\vec{F}$ e 90° é o ângulo entre o braço de alavanca e a linha de ação da força. Combinando a Eq. 15-33 com a Eq. 10-44 ($\tau = I\alpha$), obtemos

$$I\alpha = LF, \tag{15-34}$$

onde $I$ é o momento de inércia da barra em relação à articulação e $\alpha$ é a aceleração angular da barra em relação a esse mesmo ponto. De acordo com a Eq. 15-30, o momento de inércia $I$ da barra é $\frac{1}{3}mL^2$.

Vamos agora traçar mentalmente um eixo $x$ vertical passando pela extremidade direita da barra, com o sentido positivo para cima. Nesse caso, a força exercida pela mola sobre a extremidade direita da barra é $F = -kx$, onde $x$ é o deslocamento vertical da extremidade direita.

Substituindo essas expressões de $I$ e $F$ na Eq. 15-34, obtemos

$$\frac{mL^2\alpha}{3} = -Lkx. \tag{15-35}$$

***Mistura:*** Agora temos uma mistura de deslocamento linear $x$ (vertical) e aceleração angular $\alpha$ (em relação à articulação). Podemos substituir $\alpha$ na Eq. 15-35 pela aceleração (linear) $a$ ao longo do eixo $x$ usando a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), que relaciona a aceleração tangencial à aceleração angular. No nosso caso, a aceleração tangencial é $a$ e o raio de rotação é $L$, de modo que $\alpha = a/L$. Com essa substituição, a Eq. 15-35 se torna

$$\frac{mL^2 a}{3L} = -Lkx,$$

o que nos dá

$$a = -\frac{3k}{m}x. \tag{15-36}$$

A Eq. 15-36 tem a mesma forma que a Eq. 15-8 ($a = -\omega^2 x$). Isso significa que a barra realiza um MHS. Comparando as Eqs. 15-36 e 15-8, constatamos que

$$\omega^2 = \frac{3k}{m}.$$

Explicitando $k$ e substituindo $\omega$ pelo seu valor, dado pela Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi/T$), obtemos

$$k = \frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{15-37}$$

onde $T$ é o período das oscilações da barra que representa o trampolim. Queremos que o tempo do salto, $t_s$, seja igual a 2,5 oscilações do trampolim, ou seja, que $t_s = 2{,}5T$. Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 15-37, temos:

$$k = \frac{m}{3}\left(\frac{2\pi}{t_s}2{,}5\right)^2 \tag{15-38}$$

$$= \frac{(20{,}0\text{ kg})}{3}\left(\frac{2\pi}{0{,}620\text{ s}}2{,}5\right)^2$$

$$= 4{,}28 \times 10^3\text{ N/m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta deve ser a constante elástica do trampolim.

***Treinamento:*** De acordo com a Eq. 15-38, quanto maior a duração $t_s$ do salto menor deve ser a constante elástica $k$ para que o saltador pise no trampolim no momento certo. O valor de $k$ pode ser reduzido, afastando-se o fulcro da extremidade livre, ou aumentado, deslocando-se o fulcro no sentido oposto. Um saltador experiente procura manter constante o tempo de salto $t_s$ durante o treinamento, e ajusta a posição do fulcro para conseguir o melhor resultado possível.

## 15-7 | Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme

Em 1610, Galileu descobriu os quatro maiores satélites de Júpiter usando o telescópio que acabara de construir. Após algumas semanas de observação ele constatou que os satélites estavam se deslocando de um lado para outro do planeta no que hoje chamaríamos de movimento harmônico simples; o disco do planeta era o ponto médio do movimento. As observações de Galileu, escritas de próprio punho, chegaram aos nossos dias. A. P. French, do MIT, usou os dados colhidos por Galileu para determinar a posição da lua Calisto em relação a Júpiter. Nos resultados mostrados na Fig. 15-13 os pontos são baseados nas observações de Galileu, e a curva representa um ajuste aos dados. A curva sugere que o movimento do satélite pode ser descrito aproximadamente pela Eq. 15-3, a função do MHS. De acordo com o gráfico, o período do movimento é de 16,8 dias.

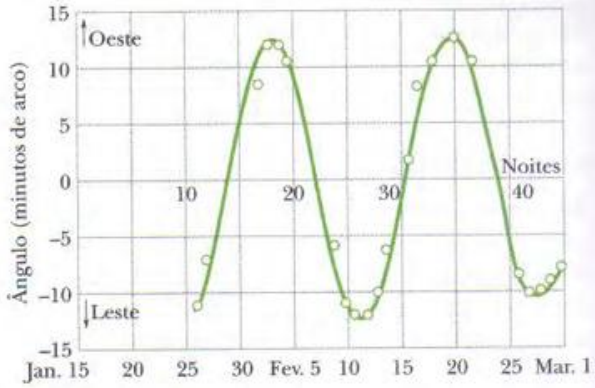
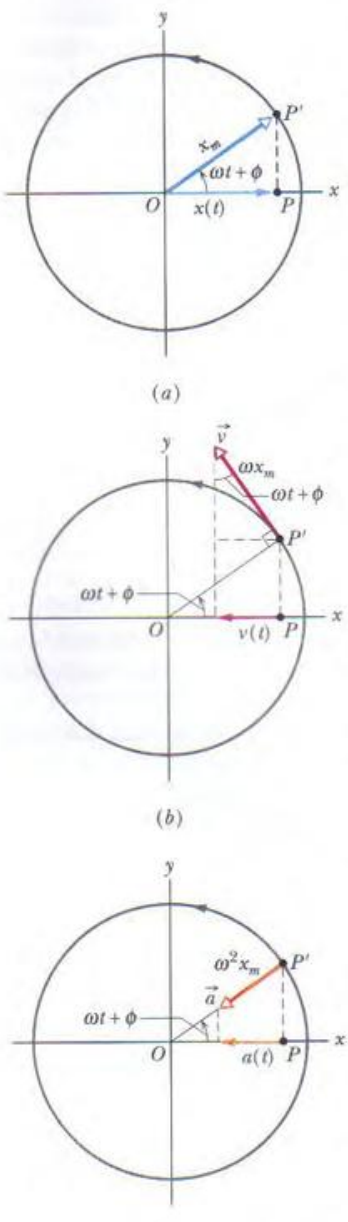



**FIG. 15-13** O ângulo entre Júpiter e o satélite Calisto do ponto de vista da Terra. Os pontos se baseiam nas observações de Galileu, em 1610, e a curva representa um ajuste aos dados, sugerindo um movimento harmônico simples. Para a distância média entre Júpiter e a Terra 10 minutos de arco correspondem a cerca de $2 \times 10^6$ km. (Adaptado de A.P. French, *Newtonian Mechanics*, W.W. Norton & Company, New York, 1971, p. 288.)

*Na realidade*, Calisto se move com velocidade praticamente constante em uma órbita quase circular em torno de Júpiter. O verdadeiro movimento não é um movimento harmônico simples, e sim um movimento circular uniforme. O que Galileu viu, e o leitor pode ver com um bom binóculo e um pouco de paciência, foi a projeção desse movimento circular uniforme em uma reta no plano do movimento. As notáveis observações de Galileu nos levam à conclusão de que o movimento harmônico simples é o movimento circular uniforme visto de perfil. Em uma linguagem mais formal:

> O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência ao longo da qual acontece o movimento circular.




A Fig. 15-14*a* mostra um exemplo. Uma *partícula de referência* $P'$ executa um movimento circular uniforme com velocidade angular $\omega$ (constante) em uma *circunferência de referência*. O raio $x_m$ da circunferência é o módulo do vetor posição da partícula. Em um instante $t$ a posição angular da partícula é $\omega t + \phi$, onde $\phi$ é a posição angular no instante $t = 0$.

A projeção da partícula $P'$ no eixo $x$ é um ponto $P$, que consideramos como uma segunda partícula. A projeção do vetor posição da partícula $P'$ no eixo $x$ fornece a localização $x(t)$ de $P$. Assim, temos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-3. Nossa conclusão está correta. Se a partícula de referência $P'$ executa um movimento circular uniforme, sua projeção, a partícula projetada $P$, executa um movimento harmônico simples em um diâmetro do círculo.

A Fig. 15-14*b* mostra a velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-18 ($v = \omega r$), o módulo do vetor velocidade é $\omega x_m$; sua projeção no eixo $x$ é

$$v(t) = \omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-6. O sinal negativo aparece porque a componente da velocidade de $P$ na Fig. 15-14*b* está dirigida para a esquerda, no sentido negativo do eixo $x$.

A Fig. 15-14*c* mostra a aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$), o módulo do vetor aceleração radial é $\omega^2 x_m$; sua projeção no eixo $x$ é

**FIG. 15-14** (*a*) Uma partícula de referência $P'$ descrevendo um movimento circular uniforme em uma circunferência de raio $x_m$. A projeção $P$ da posição da partícula no eixo $x$ executa um movimento harmônico simples. (*b*) A projeção da velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência é a velocidade do MHS. (*c*) A projeção da aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência é a aceleração do MHS.

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 15-7. Assim, tanto para o deslocamento como para a velocidade e para a aceleração a projeção do movimento circular uniforme é de fato um movimento harmônico simples.

## 15-8 | Movimento Harmônico Simples Amortecido

Um pêndulo oscila apenas por um curto período de tempo debaixo d'água, pois a água exerce sobre o pêndulo uma força de arrasto que elimina rapidamente o movimento. Um pêndulo oscilando no ar funciona melhor, mas ainda assim o movimento ocorre durante um tempo limitado, porque o ar exerce uma força de arrasto sobre o pêndulo (e uma força de atrito age no ponto de sustentação), roubando energia do movimento do pêndulo.

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa dizemos que o oscilador e seu movimento são **amortecidos**. Um exemplo idealizado de um oscilador amortecido é mostrado na Fig. 15-15, na qual um bloco de massa $m$ oscila verticalmente preso a uma mola de constante elástica $k$. Uma barra liga o bloco a uma palheta imersa em um líquido. Vamos supor que a barra e a palheta têm massa desprezível. Quando a palheta se move para cima e para baixo o líquido exerce uma força de arrasto sobre ela e, portanto, sobre todo o sistema. A energia mecânica do sistema bloco-mola diminui com o tempo, à medida que a energia é transferida para energia térmica do líquido e da palheta.

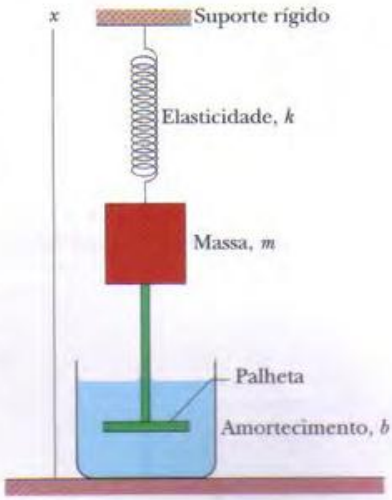



FIG. 15-15 Um oscilador harmônico simples amortecido ideal. Uma palheta imersa em um líquido exerce uma força de amortecimento sobre o bloco, enquanto este oscila paralelamente ao eixo $x$.

Vamos supor que o líquido exerce uma **força de amortecimento** $\vec{F}_a$ proporcional à velocidade $\vec{v}$ da palheta e do bloco (uma hipótese que constitui uma boa aproximação se a palheta se move lentamente). Nesse caso, para componentes ao longo do eixo $x$ na Fig. 15-15 temos:

$$F_a = -bv, \tag{15-39}$$

onde $b$ é uma **constante de amortecimento** que depende das características tanto da pá como do líquido e tem unidades de quilograma por segundo no SI. O sinal negativo indica que $\vec{F}_a$ se opõe ao movimento.

A força exercida pela mola sobre o bloco é $F_m = -kx$. Vamos supor que a força gravitacional a que o bloco está submetido seja desprezível em comparação com $F_a$ e $F_m$. Nesse caso, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo $x$ ($F_{\text{res},x} = ma_x$) como

$$-bv - kx = ma. \tag{15-40}$$

Substituindo $v$ por $dx/dt$, $a$ por $d^2x/dt^2$ e reagrupando os termos, obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{15-41}$$

A solução desta equação é

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \tag{15-42}$$

onde $x_m$ é a amplitude e $\omega'$ é a freqüência angular do oscilador amortecido. Esta freqüência angular é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{15-43}$$

Se $b = 0$ (na ausência de amortecimento), a Eq. 15-43 se reduz à Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) para a freqüência angular de um oscilador não-amortecido, e a Eq. 15-42 se reduz à Eq. 15-3 para o deslocamento de um oscilador não-amortecido. Se a constante de amortecimento é pequena mas diferente de zero (de modo que $b \ll \sqrt{km}$), então $\omega' \approx \omega$.

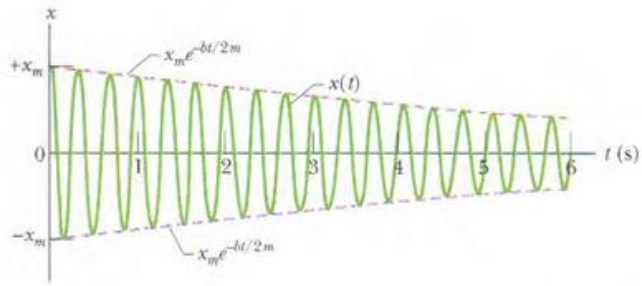



FIG. 15-16 A função deslocamento $x(t)$ do oscilador amortecido da Fig. 15-15, para os valores do Exemplo 15-7. A amplitude, que é dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui exponencialmente com o tempo.

Podemos considerar a Eq. 15-42 como uma função co-seno cuja amplitude, dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui gradualmente com o tempo, como mostra a Fig. 15-16. Para um oscilador não-amortecido a energia mecânica é constante e é dada pela Eq. 15-21 ($E = \frac{1}{2}kx_m^2$). Se o oscilador é amortecido a energia mecânica não é constante e diminui com o tempo. Se o amortecimento é pequeno, podemos determinar $E(t)$ substituindo $x_m$ na Eq. 15-21 por $x_m e^{-bt/2m}$, a amplitude das oscilações amortecidas. Fazendo isso, obtemos a equação

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}, \qquad (15\text{-}44)$$

que nos diz que, como a amplitude, a energia mecânica diminui exponencialmente com o tempo.

**TESTE 5** A tabela mostra três conjuntos de valores para a constante elástica, a constante de amortecimento e a massa do oscilador amortecido da Fig. 15-15. Ordene os conjuntos de acordo com o tempo necessário para que a energia mecânica se reduza a um quarto do valor inicial em ordem decrescente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conjunto 1 | $2k_0$ | $b_0$ | $m_0$ |
| Conjunto 2 | $k_0$ | $6b_0$ | $4m_0$ |
| Conjunto 3 | $3k_0$ | $3b_0$ | $m_0$ |

## Exemplo 15-7

Para o oscilador amortecido da Fig. 15-15, $m = 250$ g, $k = 85$ N/m e $b = 70$ g/s.

(a) Qual é o período do movimento?

**IDÉIA-CHAVE** Como $b \ll \sqrt{km} = 4{,}6$ kg/s, o período é aproximadamente o de um oscilador não-amortecido.

***Cálculo:*** De acordo com a Eq. 15-13, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0{,}34\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o tempo necessário para que a amplitude das oscilações amortecidas se reduza à metade do valor inicial?

**IDÉIA-CHAVE** A amplitude num instante $t$ é dada na Eq. 15-42 como $x_m e^{-bt/2m}$.

***Cálculos:*** A amplitude é $x_m$ no instante $t = 0$; assim, devemos encontrar o valor de $t$ para o qual

$$x_m e^{-bt/2m} = \tfrac{1}{2}x_m.$$

Cancelando $x_m$ e tomando o logaritmo natural da equação restante, temos $\ln(1/2)$ do lado direito e

$$\ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m$$

do lado esquerdo. Assim,

$$t = \frac{-2m\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{-(2)(0{,}25\text{ kg})(\ln\frac{1}{2})}{0{,}070\text{ kg/s}}$$

$$= 5{,}0\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Como $T = 0{,}34$ s, isso corresponde a cerca de 15 períodos de oscilação.

(c) Quanto tempo é necessário para que a energia mecânica se reduza à metade do valor inicial?

**IDÉIA-CHAVE** De acordo com a Eq. 15-44, a energia mecânica no instante $t$ é $\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$.

***Cálculos:*** A energia mecânica é $\frac{1}{2}kx_m^2$ no instante $t = 0$; assim, devemos encontrar o valor de $t$ para o qual

$$\tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}kx_m^2).$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por $\frac{1}{2}kx_m^2$ e explicitando $t$ como no item anterior, obtemos

$$t = \frac{-m \ln \frac{1}{2}}{b} = \frac{-(0{,}25\ \text{kg})(\ln \frac{1}{2})}{0{,}070\ \text{kg/s}} = 2{,}5\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor é exatamente metade do tempo calculado no item (b), ou cerca de 7,5 períodos de oscilação. A Fig. 15-16 foi desenhada para ilustrar esse exemplo.

## 15-9 | Oscilações Forçadas e Ressonância

Uma criança que se diverte em um balanço sem que ninguém a empurre constitui um exemplo de *oscilações livres*. Caso, porém, alguém empurre o balanço periodicamente dizemos que o balanço está executando *oscilações forçadas*. Existem *duas* freqüências angulares associadas a um sistema que executa oscilações forçadas: (1) a freqüência angular *natural* $\omega$, que é a freqüência angular com a qual o sistema oscilaria livremente depois de sofrer uma perturbação brusca de curta duração; (2) a freqüência angular $\omega_e$ da força externa que produz as oscilações forçadas.

Podemos usar a Fig. 15-15 para representar um oscilador harmônico simples forçado ideal se supusermos que a estrutura indicada como "suporte rígido" se move para cima e para baixo com uma freqüência angular variável $\omega_e$. Um oscilador forçado desse tipo oscila com a freqüência angular $\omega_e$ da força externa, e seu deslocamento $x(t)$ é dado por

$$x(t) = x_m \cos(\omega_e t + \phi), \qquad (15\text{-}45)$$

onde $x_m$ é a amplitude das oscilações.

O valor da amplitude do deslocamento $x_m$ depende de uma função complicada de $\omega$ e $\omega_e$. A amplitude da velocidade $v_m$ das oscilações é mais simples de descrever: ela é máxima para

$$\omega_e = \omega \quad \text{(ressonância)}, \qquad (15\text{-}46)$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A Eq. 15-46 expressa também, *aproximadamente*, a situação para a qual a amplitude do deslocamento, $x_m$, é máxima. Assim, se empurramos um balanço com a freqüência angular natural de oscilação as amplitudes do deslocamento e da velocidade atingem valores elevados, um fato que as crianças aprendem depressa por tentativa e erro. Se empurramos com outra freqüência angular, maior ou menor, as amplitudes do deslocamento e da velocidade são menores.

A Fig. 15-17 mostra a variação da amplitude do deslocamento de um oscilador com a freqüência angular $\omega_e$ da força externa para três valores do coeficiente de amortecimento $b$. Observe que para os três valores a amplitude é aproximadamente máxima para $\omega_e/\omega = 1$ (a condição de ressonância da Eq. 15-46). As curvas da Fig. 15-17 mostram que a um amortecimento menor está associado um *pico de ressonância* mais alto e mais estreito.

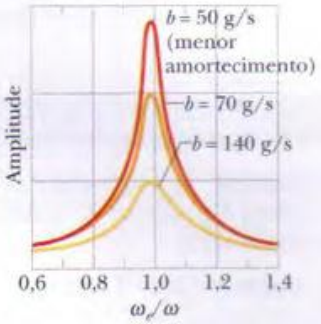



**FIG. 15-17** A amplitude do deslocamento $x_m$ de um oscilador forçado varia quando a freqüência angular $\omega_e$ da força externa varia. As curvas da figura correspondem a três valores da constante de amortecimento $b$.

Todas as estruturas mecânicas possuem uma ou mais freqüências angulares naturais; se a estrutura é submetida a uma força externa cuja freqüência coincide com uma dessas freqüências angulares naturais as oscilações resultantes podem fazer com que a estrutura se rompa. Assim, por exemplo, os projetistas de aeronaves devem se certificar de que nenhuma das freqüências angulares naturais com as quais uma asa pode oscilar coincida com a freqüência angular dos motores durante o vôo. Uma asa que vibrasse violentamente para certas velocidades dos motores obviamente tornaria qualquer vôo muito perigoso.

A ressonância parece ter sido uma das causas do desabamento de muitos edifícios na Cidade do México em setembro de 1985, quando um grande terremoto (8,1 na escala Richter) aconteceu na costa oeste do México. As ondas sísmicas do terre-

**FIG. 15-18** Em 1985, edifícios de altura intermediária desabaram na Cidade do México por causa de um terremoto que ocorreu longe da cidade. Edifícios mais altos e mais baixos permaneceram de pé. *(John T. Barr/Getty Images News and Sport Services)*

moto eram provavelmente fracas demais para causar grandes danos quando chegaram à Cidade do México, a cerca de 400 km de distância. Entretanto, a Cidade do México foi, em sua maior parte, construída sobre o leito de um lago antigo, onde o solo ainda é úmido e macio. Embora a amplitude das ondas sísmicas fosse pequena no solo firme a caminho da Cidade do México, aumentou consideravelmente no solo macio da cidade. As amplitudes das acelerações das ondas chegaram a $0{,}20g$, e a freqüência angular se concentrou (surpreendentemente) em torno de 3 rad/s. Não só o solo oscilou violentamente, mas muitos edifícios de altura intermediária tinham freqüências de ressonância da ordem de 3 rad/s. A maioria desses edifícios desabou durante os tremores (Fig. 15-18), enquanto edifícios mais baixos (com freqüências angulares de ressonância maiores) e mais altos (com freqüências angulares de ressonância menores) permaneceram de pé.

## REVISÃO E RESUMO

**Freqüência** A *freqüência* $f$ de um movimento periódico, ou oscilatório, é o número de oscilações por segundo. No SI, ela é medida em hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (15\text{-}1)$$

**Período** O *período* $T$ é o tempo necessário para uma oscilação completa, ou **ciclo**. Ele está relacionado à freqüência através da equação

$$T = \frac{1}{f}. \quad (15\text{-}2)$$

**Movimento Harmônico Simples** No *movimento harmônico simples* (MHS) o deslocamento $x(t)$ de uma partícula a partir da posição de equilíbrio é descrito pela equação

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento)}, \quad (15\text{-}3)$$

onde $x_m$ é a **amplitude** do deslocamento, a grandeza $(\omega t + \phi)$ é a **fase** do movimento e $\phi$ é a **constante de fase**. A **freqüência angular** $\omega$ está relacionada ao período e à freqüência do movimento através da equação

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(freqüência angular)}. \quad (15\text{-}5)$$

Derivando a Eq. 15-3, chega-se às equações da velocidade e da aceleração de uma partícula em MHS em função do tempo:

$$v = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade)} \quad (15\text{-}6)$$

e

$$a = -\omega^2 x m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração)}. \quad (15\text{-}7)$$

Na Eq. 15-6 a grandeza positiva $\omega x_m$ é a **amplitude da velocidade** do movimento, $v_m$. Na Eq. 15-7 a grandeza positiva $\omega^2 x_m$ é a **amplitude da aceleração** do movimento, $a_m$.

**O Oscilador Linear** Uma partícula de massa $m$ que se move sob a influência de uma força restauradora dada pela lei de Hooke $F = -kx$ exibe um movimento harmônico simples com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(freqüência angular)} \quad (15\text{-}12)$$

e

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(período)}. \quad (15\text{-}13)$$

Um sistema desse tipo é chamado de **oscilador harmônico simples linear**.

**Energia** Uma partícula em movimento harmônico simples possui, em qualquer instante, uma energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ e uma energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. Se não há atrito, a energia mecânica $E = K + U$ permanece constante mesmo que $K$ e $U$ variem.

**Pêndulos** Exemplos de dispositivos que executam um movimento harmônico simples são o **pêndulo de torção** da Fig. 15-7, o **pêndulo simples** da Fig. 15-9 e o **pêndulo físico** da Fig. 15-10. Os períodos de oscilação desses pêndulos para pequenas oscilações são, respectivamente,

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad \text{(pêndulo de torção)}, \quad (15\text{-}23)$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \text{(pêndulo simples)}, \quad (15\text{-}28)$$

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh} \quad \text{(pêndulo físico)}. \quad (15\text{-}29)$$

**Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme** O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência na qual ocorre o movimento circular uniforme. A Fig. 15-14 mostra que as projeções de todos os parâmetros do movimento circular (posição, velocidade e aceleração) fornecem os valores correspondentes dos parâmetros do movimento harmônico simples.

**Movimento Harmônico Amortecido** A energia mecânica $E$ de sistemas oscilatórios reais diminui durante as oscilações porque forças externas, como a força de arrasto, inibem as oscilações e transferem energia mecânica para a energia térmica. Nesse caso, dizemos que o oscilador real e o seu movimento são **amortecidos**. Se a **força de amortecimento** é dada por $\vec{F}_a = -b\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade do oscilador e $b$ é uma **constante de amortecimento**, o deslocamento do oscilador é dado por

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \quad (15\text{-}42)$$

onde $\omega'$, a freqüência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (15\text{-}43)$$

Se a constante de amortecimento é pequena $(b \ll \sqrt{km})$, $\omega' \approx \omega$, onde $\omega$ é a freqüência angular do oscilador não-amortecido. Para pequenos valores de $b$, a energia mecânica $E$ do oscilador é dada por

$$E(t) = \tfrac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}. \qquad (15\text{-}44)$$

**Oscilações Forçadas e Ressonância** Se uma força externa de freqüência angular $\omega_e$ age sobre um sistema oscilatório de freqüência angular *natural* $\omega$, o sistema oscila com freqüência angular $\omega_e$. A amplitude da velocidade $v_m$ do sistema é máxima para

$$\omega_e = \omega, \qquad (15\text{-}46)$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A amplitude $x_m$ do sistema é (aproximadamente) máxima na mesma situação.

## PERGUNTAS

**1** O gráfico da Fig. 15-19 mostra a aceleração $a(t)$ de uma partícula que executa um MHS. (a) Qual dos pontos indicados corresponde à partícula na posição $-x_m$? (b) No ponto 4, a velocidade da partícula é positiva, negativa ou nula? (c) No ponto 5, a partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$?

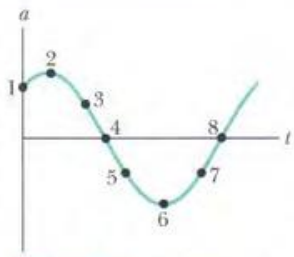



FIG. 15-19 Pergunta 1.

**2** Qual das seguintes relações entre a aceleração $a$ e o deslocamento $x$ de uma partícula corresponde a um MHS: (a) $a = 0{,}5x$, (b) $a = 400x^2$, (c) $a = -20x$, (d) $a = -3x^2$?

**3** Qual dos seguintes intervalos se aplica ao ângulo $\phi$ do MHS da Fig. 15-20*a*:

(a) $-\pi < \phi < -\pi/2$,

(b) $\pi < \phi < 3\pi/2$,

(c) $-3\pi/2 < \phi < -\pi$?

**4** A velocidade $v(t)$ de uma partícula que executa um MHS é mostrada no gráfico da Fig. 15-20*b*. A partícula está momentaneamente em repouso, está se deslocando em direção a $-x_m$ ou está se deslocando em direção a $+x_m$ (a) no ponto $A$ do gráfico e (b) no ponto $B$? A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ quando sua velocidade é representada (c) pelo ponto $A$ e (d) pelo ponto $B$? A velocidade da partícula está aumentando ou diminuindo (e) no ponto $A$ e (f) no ponto $B$?

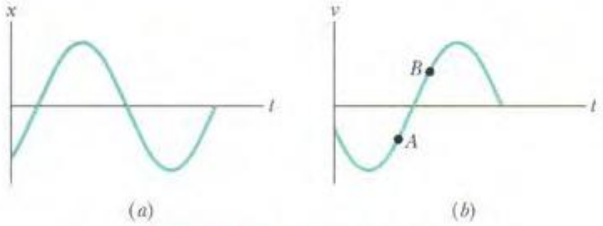



FIG. 15-20 Perguntas 3 e 4.

**5** A Fig. 15-21 mostra as curvas $x(t)$ obtidas em três experimentos fazendo um certo sistema bloco-mola oscilar em um MHS. Ordene as curvas de acordo com (a) a freqüência angular do sistema, (b) a energia potencial da mola no instante $t = 0$, (c) a energia cinética do bloco no instante $t = 0$, (d) a velocidade do bloco no instante $t = 0$ e (e) a energia cinética máxima do bloco, em ordem decrescente.

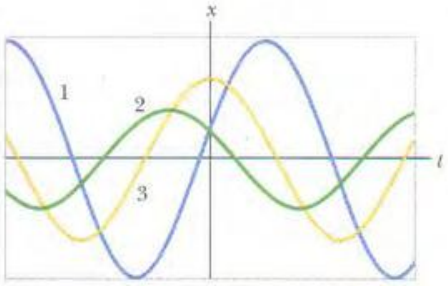



FIG. 15-21 Pergunta 5.

**6** A Fig. 15-22 mostra, para três situações, os deslocamentos $x(t)$ de um par de osciladores harmônicos simples ($A$ e $B$) que são iguais em tudo, exceto na fase. Para cada par, qual o deslocamento de fase (em radianos e em graus) necessário para deslocar a curva $A$ e fazê-la coincidir com a curva $B$? Das várias respostas possíveis, escolha o deslocamento com o menor valor absoluto.

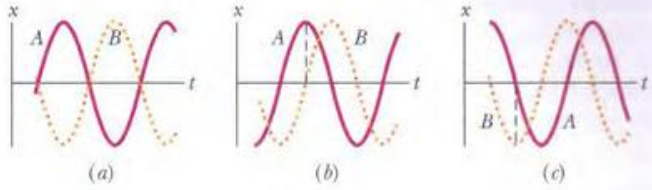



FIG. 15-22 Pergunta 6.

**7** Você deve completar a Fig. 15-23*a* para que seja o gráfico da velocidade $v$ em função do tempo $t$ do oscilador bloco-mola que é mostrado na Fig. 15-23*b* para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-23*a*, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo $v$ (vertical) deve interceptar o eixo $t$? (Por exemplo, ele deve interceptar o eixo $t$ no ponto $A$, ou, talvez, na região entre os pontos $A$ e $B$?) (b) Se a velocidade do bloco é dada por $v = -v_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, qual é o valor de $\phi$? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), forneça uma faixa de valores (como $0 < \phi < \pi/2$).

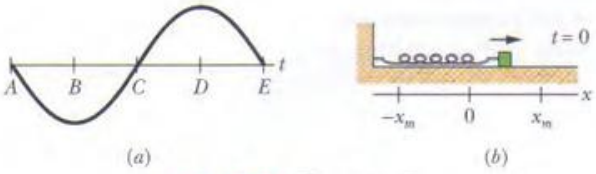



FIG. 15-23 Pergunta 7.

**8** Você deve completar a Fig. 15-24*a* para que seja o gráfico da aceleração $a$ em função do tempo $t$ do oscilador bloco-mola que é mostrado na Fig. 15-24*b* para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-24*a*, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo $v$ (vertical) deve interceptar o eixo $t$? (Por exemplo, ele

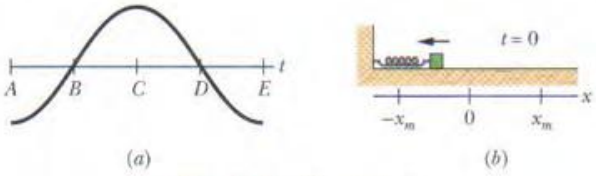



FIG. 15-24 Pergunta 8.

deve interceptar o eixo $t$ no ponto $A$, ou, talvez, na região entre os pontos $A$ e $B$?) (b) Se a aceleração do bloco é dada por $a = -a_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, qual é o valor de $\phi$? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), forneça uma faixa de valores (como $0 < \phi < \pi/2$).

**9** Na Fig. 15-25, um sistema bloco-mola é colocado em MHS em dois experimentos. No primeiro o bloco é puxado até sofrer um deslocamento $d_1$ em relação à posição de equilíbrio, e depois liberado. No segundo, é puxado até sofrer um deslocamento maior $d_2$, e depois liberado. (a) A amplitude, (b) o período, (c) a freqüência, (d) a energia cinética máxima e (e) a energia potencial máxima do movimento no segundo experimento são maiores, menores ou iguais às do primeiro experimento?

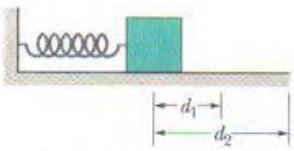


FIG. 15-25 Pergunta 9.

**10** A Fig. 15-26 mostra os gráficos da energia cinética $K$ em função da posição $x$ para três osciladores harmônicos que têm a mesma massa. Ordene os gráficos de acordo (a) com a constante elástica e (b) o período do oscilador, em ordem decrescente.

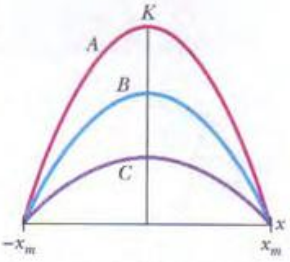


FIG. 15-26 Pergunta 10.

**11** A Fig. 15-27 mostra três pêndulos físicos formados por esferas uniformes iguais, rigidamente ligadas por barras iguais de massa desprezível. Os pêndulos são verticais e podem oscilar em torno do ponto de suspensão $O$. Ordene os pêndulos de acordo com o período das oscilações, em ordem decrescente.

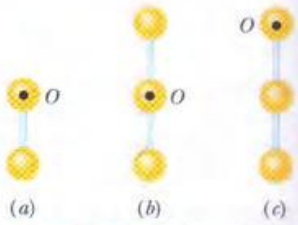


FIG. 15-27 Pergunta 11.

**12** Você deve construir o dispositivo de transferência de oscilação mostrado na Fig. 15-28. Ele é composto por dois sistemas bloco-mola pendurados em uma barra flexível. Quando a mola do sistema 1 é distendida e depois liberada, o MHS resultante do sistema 1, de freqüência $f_1$, faz a barra oscilar. A barra exerce uma força sobre o sistema 2, com a mesma freqüência $f_1$. Você pode escolher entre quatro molas com constantes elásticas $k$ de 1600, 1500, 1400 e 1200 N/m e entre quatro blocos com massas $m$ de 800, 500, 400 e 200 kg. Determine mentalmente que mola deve ser ligada a que bloco nos dois sistemas para maximizar a amplitude das oscilações do sistema 2.

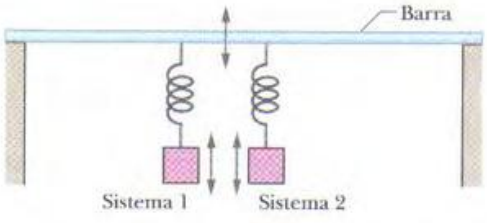


FIG. 15-28 Pergunta 12.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples

•**1** Qual é a aceleração máxima de uma plataforma que oscila com uma amplitude de 2,20 cm e uma freqüência de 6,60 Hz?

•**2** Uma partícula com uma massa de $1,00 \times 10^{-20}$ kg descreve um movimento harmônico simples com um período de $1,00 \times 10^{-5}$ s e uma velocidade máxima de $1,00 \times 10^3$ m/s. Calcule (a) a freqüência angular e (b) o deslocamento máximo da partícula.

•**3** Em um barbeador elétrico a lâmina se move para a frente e para trás, ao longo de uma distância de 2,0 mm, em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 120 Hz. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima da lâmina e (c) o módulo da aceleração máxima da lâmina.

•**4** Um corpo de 0,12 kg executa um movimento harmônico simples de amplitude 8,5 cm e período 0,20 s. (a) Qual é o módulo da força máxima que age sobre o corpo? (b) Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual é a constante elástica da mola?

•**5** Um objeto que executa um movimento harmônico simples leva 0,25 s para se deslocar de um ponto de velocidade nula para o ponto seguinte do mesmo tipo. A distância entre esses pontos é 36 cm. Calcule (a) o período, (b) a freqüência e (c) a amplitude do movimento.

•**6** Do ponto de vista das oscilações verticais, um automóvel pode ser considerado como estando apoiado em quatro molas iguais. As molas de um certo carro são ajustadas de tal forma que as oscilações têm uma freqüência de 3,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica de cada mola se a massa do carro é 1450 kg e está igualmente distribuída pelas molas? (b) Qual será a freqüência de oscilação se cinco passageiros pesando, em média, 73,0 kg entrarem no carro e a distribuição de massa continuar uniforme?

•**7** Um oscilador é formado por um bloco com uma massa de 0,500 kg ligado a uma mola. Quando é posto em oscilação com uma amplitude de 35,0 cm o oscilador repete o movimento a cada 0,500 s. Determine (a) o período, (b) a freqüência, (c) a freqüência angular, (d) a constante elástica, (e) a velocidade máxima e (f) o módulo da força máxima que a mola exerce sobre o bloco.

•**8** Um sistema oscilatório bloco-mola oscilante leva 0,75 s para começar a repetir seu movimento. Determine (a) o período, (b) a freqüência em hertz e (c) a freqüência angular em radianos por segundo.

•**9** Um alto-falante produz um som musical através das oscilações de um diafragma cuja amplitude é limitada a 1,00 $\mu$m. (a) Para que freqüência o módulo $a$ da aceleração do diafragma é igual a $g$? (b) Para freqüências maiores, $a$ é maior ou menor que $g$?

•**10** Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função posição $x(t)$ aparece na Fig. 15-29 se a função posição é

da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por $x_s = 6{,}0$ cm.

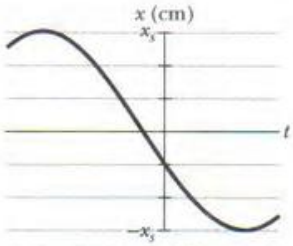


FIG. 15-29 Problema 10.

•11 A função $x = (6{,}0\text{ m})\cos[(3\pi\text{ rad/s})t + \pi/3\text{ rad}]$ descreve o movimento harmônico simples de um corpo. Em $t = 2{,}0$ s, quais são (a) o deslocamento, (b) a velocidade, (c) a aceleração e (d) a fase do movimento? Quais são também (e) a freqüência e (f) o período do movimento?

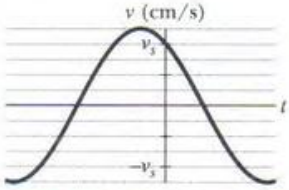


FIG. 15-30 Problema 12.

•12 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função velocidade $v(t)$ aparece na Fig. 15-30 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por $v_s = 4{,}0$ cm/s.

•13 Na Fig. 15-31 duas molas iguais, de constante elástica 7580 N/m, estão ligadas a um bloco de massa 0,245 kg. Qual é a freqüência de oscilação no piso sem atrito?

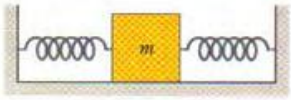


FIG. 15-31
Problemas 13 e 23.

••14 A Fig. 15-32 mostra o bloco 1, de massa 0,200 kg, deslizando para a direita, sobre uma superfície elevada, com uma velocidade de 8,00 m/s. O bloco sofre uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso, que está preso a uma mola de constante elástica 1208,5 N/m. (Suponha que a mola não afeta a colisão.) Após a colisão, o bloco 2 inicia um MHS com um período de 0,140 s e o bloco 1 desliza para fora da extremidade oposta da superfície elevada, indo cair a uma distância horizontal $d$ dessa superfície, depois de descer uma distância $h = 4{,}90$ m. Qual é o valor de $d$?

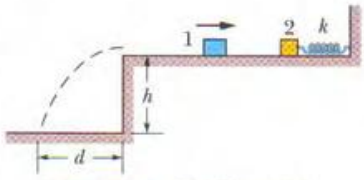


FIG. 15-32 Problema 14.

••15 Um oscilador é formado por um bloco preso a uma mola ($k = 400$ N/m). Em um certo instante $t$ a posição (medida a partir da posição de equilíbrio do sistema), a velocidade e a aceleração do bloco são $x = 0{,}100$ m, $v = -13{,}6$ m/s e $a = -123$ m/s$^2$. Calcule (a) a freqüência de oscilação, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude do movimento.

••16 Em um certo ancoradouro as marés fazem com que a superfície do oceano suba e desça uma distância $d$ (do nível mais alto ao nível mais baixo) em um movimento harmônico simples com um período de 12,5 h. Quanto tempo é necessário para que a água desça uma distância de $0{,}250d$ a partir do nível mais alto?

••17 Um bloco está em uma superfície horizontal (uma mesa oscilante) que se move horizontalmente para a frente e para trás em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 2,0 Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é 0,50. Qual o maior valor possível da amplitude do MHS para que o bloco não deslize pela superfície?

••18 Duas partículas executam movimentos harmônicos simples de mesma amplitude e freqüência ao longo de retas paralelas próximas. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, toda vez que seu deslocamento é de metade da amplitude. Qual é a diferença de fase entre elas?

••19 Duas partículas oscilam em movimento harmônico simples ao longo de um segmento retilíneo comum de comprimento $A$. As duas partículas têm um período de 1,5 s, mas existe uma diferença de fase de $\pi/6$ rad entre seus movimentos. (a) Qual é a distância entre as partículas (em termos de $A$) 0,50 s após a partícula atrasada passar por uma das extremidades da trajetória? (b) Nesse instante, as partículas estão se movendo no mesmo sentido, em sentidos opostos, se aproximando uma da outra, ou em sentidos opostos, se afastando uma da outra?

••20 A Fig. 15-33*a* é um gráfico parcial da função posição $x(t)$ de um oscilador harmônico simples com uma freqüência angular de 1,20 rad/s; a Fig. 15-33*b* é um gráfico parcial da função velocidade $v(t)$ correspondente. As escalas dos eixos verticais são definidas por $x_s = 5{,}0$ cm e $v_s = 5{,}0$ cm/s. Qual é a constante de fase do MHS se a função posição $x(t)$ é dada na forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$?

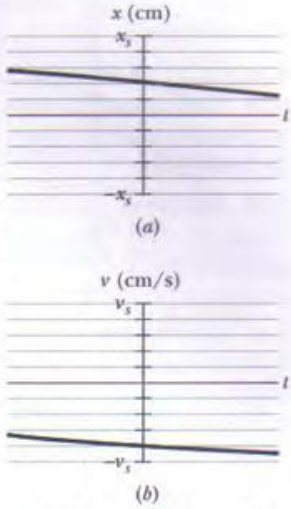


FIG. 15-33 Problema 20.

••21 Um bloco está apoiado em um êmbolo que se move verticalmente em um movimento harmônico simples. (a) Se o MHS tem um período de 1,0 s, para que valor da amplitude do movimento o bloco e o êmbolo se separam? (b) Se o êmbolo se move com uma amplitude de 5,0 cm, qual é a maior freqüência para a qual o bloco e o êmbolo permanecem continuamente em contato?

••22 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de massa 2,00 kg preso a uma mola de constante elástica 100 N/m. Em $t = 1{,}00$ s a posição e a velocidade do bloco são $x = 0{,}129$ m e $v = 3{,}415$ m/s. (a) Qual é a amplitude das oscilações? Quais eram (b) a posição e (c) a velocidade do bloco em $t = 0$ s?

••23 Na Fig. 15-31 duas molas estão presas a um bloco que pode oscilar em um piso sem atrito. Se a mola da esquerda é removida o bloco oscila com uma freqüência de 30 Hz. Se a mola removida é a da direita, o bloco oscila com uma freqüência de 45 Hz. Com que freqüência o bloco oscila se as duas molas estão presentes?

•••24 Na Fig. 15-34 dois blocos ($m = 1{,}8$ kg e $M = 10$ kg) e uma mola ($k = 200$ N/m) estão dispostos em uma superfície horizontal sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é 0,40. Que amplitude do movimento harmônico simples do sistema blocos-mola faz com que o bloco menor fique na iminência de deslizar sobre o bloco maior?

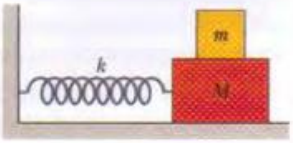


FIG. 15-34 Problema 24.

•••25 Na Fig. 15-35 um bloco pesando 14,0 N, que pode deslizar sem atrito em um plano inclinado de ângulo $\theta = 40{,}0°$, está ligado ao alto do plano inclinado por uma mola de massa despre-

zível com 0,450 m de comprimento, quando está relaxada, e constante elástica 120 N/m. (a) A que distância do alto do plano inclinado fica o ponto de equilíbrio do bloco? (b) Se o bloco é puxado ligeiramente para baixo ao longo do plano inclinado e depois liberado, qual é o período das oscilações resultantes?

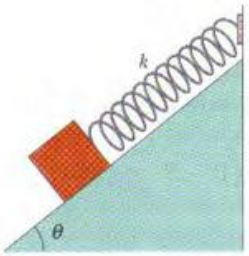


FIG. 15-35 Problema 25.

•••26 Na Fig. 15-36 duas molas são ligadas entre si e a um bloco de massa 0,245 kg que oscila em um piso sem atrito. As duas molas possuem uma constante elástica $k$ = 6430 N/m. Qual é a freqüência das oscilações?

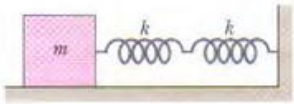


FIG. 15-36 Problema 26.

## seção 15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples

•27 Determine a energia mecânica de um sistema bloco-mola com uma constante elástica de 1,3 N/cm e uma amplitude de oscilação de 2,4 cm.

•28 Um sistema oscilatório bloco-mola possui uma energia mecânica de 1,00 J, uma amplitude de 10,0 cm e uma velocidade máxima de 1,20 m/s. Determine (a) a constante elástica, (b) a massa do bloco e (c) a freqüência de oscilação.

•29 Quando o deslocamento em um MHS é de metade da amplitude $x_m$, que fração da energia total é (a) energia cinética e (b) energia potencial? (c) Para que deslocamento, como fração da amplitude, a energia do sistema é metade energia cinética e metade energia potencial?

•30 A Fig. 15-37 mostra o poço de energia potencial unidimensional no qual se encontra uma partícula de 2,0 kg (a função $U(x)$ é da forma $bx^2$ e a escala do eixo vertical é definida por $U_s$ = 2,0 J). (a) Se a partícula passa pela posição de equilíbrio com uma velocidade de 85 cm/s, ela retorna antes de chegar ao ponto $x$ = 15 cm? (b) Caso a resposta seja afirmativa, calcule a posição do ponto de retorno; caso a resposta seja negativa, calcule a velocidade da partícula no ponto $x$ = 15 cm.

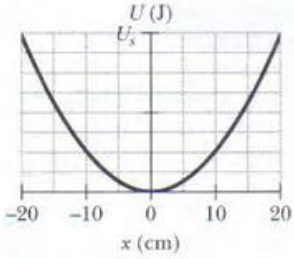


FIG. 15-37 Problema 30.

•31 Um objeto de 5,00 kg que repousa em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola com $k$ = 1000 N/m. O objeto é deslocado horizontalmente 50,0 cm a partir da posição de equilíbrio e recebe uma velocidade inicial de 10,0 m/s na direção da posição de equilíbrio. Quais são (a) a freqüência do movimento, (b) a energia potencial inicial do sistema bloco-mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento?

•32 A Fig. 15-38 mostra a energia cinética $K$ de um oscilador harmônico simples em função de sua posição $x$. A escala vertical é definida por $K_s$ = 4,0 J. Qual é a constante elástica?

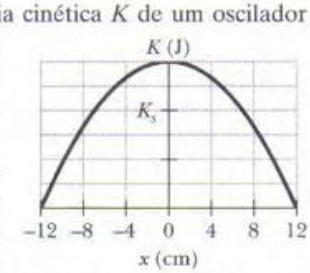


FIG. 15-38 Problema 32.

••33 Uma partícula de 10 g executa um MHS com uma amplitude de 2,0 mm, uma aceleração máxima de módulo $8,0 \times 10^3$ m/s$^2$ e uma constante de fase desconhecida $\phi$. Quais são (a) o período do movimento, (b) a velocidade máxima da partícula e (c) a energia mecânica total do oscilador? Qual é o módulo da força que age sobre a partícula quando ela está (d) em seu deslocamento máximo e (e) na metade do deslocamento máximo?

••34 Se o ângulo de fase de um sistema bloco-mola em MHS é $\pi/6$ rad e a posição do bloco é dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, qual é a razão entre a energia cinética e a energia potencial no instante $t$ = 0?

••35 Um bloco de massa $M$ = 5,4 kg, em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, está ligado a um suporte rígido através de uma mola de constante elástica $k$ = 6000 N/m. Uma bala de massa $m$ = 9,5 g e velocidade $\vec{v}$ de módulo 630 m/s atinge o bloco e fica alojada nele (Fig. 15-39). Supondo que a compressão da mola é desprezível até a bala se alojar no bloco, determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

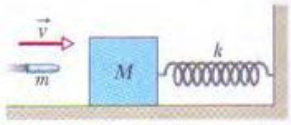


FIG. 15-39 Problema 35.

••36 Na Fig. 15-40 o bloco 2, de massa 2,0 kg, oscila na extremidade de uma mola em MHS com período de 20 ms. A posição do bloco é dada por $x$ = (1,0 cm) $\cos(\omega t + \pi/2)$. O bloco 1, de massa 4,0 kg, desliza em direção ao bloco 2 com uma velocidade de módulo 6,0 m/s, dirigida ao longo do comprimento da mola. Os dois blocos sofrem uma colisão perfeitamente inelástica no instante $t$ = 5,0 ms. (A duração da colisão é muito menor que o período do movimento.) Qual é a amplitude do MHS após a colisão?

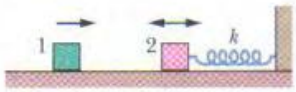


FIG. 15-40 Problema 36.

•••37 Uma mola de massa desprezível está pendurada em um teto com um pequeno objeto preso à extremidade inferior. O objeto é inicialmente mantido em repouso em uma posição $y_i$ tal que a mola se encontra no estado relaxado. Em seguida, o objeto é liberado e passa a oscilar para cima e para baixo, com a posição mais baixa 10 cm abaixo de $y_i$. (a) Qual é a freqüência das oscilações? (b) Qual é a velocidade do objeto quando se encontra 8,0 cm abaixo da posição inicial? (c) Um objeto de massa 300 g é preso ao primeiro objeto, após o que o sistema passa a oscilar com metade da freqüência original. Qual é a massa do primeiro objeto? (d) A que distância abaixo de $y_i$ está a nova posição de equilíbrio (repouso), com os dois objetos presos à mola?

## seção 15-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular

•38 Uma esfera maciça com uma massa de 95 kg e 15 cm de raio está suspensa por um fio vertical. Um torque de 0,20 N · m é necessário para fazer a esfera girar 0,85 rad e manter essa orientação. Qual é o período das oscilações que ocorrem quando a esfera é liberada?

••39 O balanço de um relógio antigo oscila com uma amplitude angular de $\pi$ rad e um período de 0,500 s. Determine (a) a velocidade angular máxima do balanço, (b) a velocidade angular no momento em que o deslocamento é $\pi/2$ rad e (c) o módulo da aceleração angular no momento em que o deslocamento é $\pi/4$ rad.

## seção 15-6 Pêndulos

•40 Suponha que um pêndulo simples é formado por um pequeno peso de 60,0 g pendurado na extremidade de uma corda de massa desprezível. Se o ângulo $\theta$ entre a corda e a vertical é dado por

$$\theta = (0{,}0800\ \text{rad})\cos[(4{,}43\ \text{rad/s})t + \phi],$$

quais são (a) o comprimento da corda e (b) a energia cinética máxima do peso?

•41 (a) Se o pêndulo físico do Exemplo 15-5 é invertido e pendurado pelo ponto $P$, qual é o período de oscilação? (b) O período é maior, menor ou igual ao valor anterior?

•42 No Exemplo 15-5 vimos que um pêndulo físico possui um centro de oscilação a uma distância $2L/3$ do ponto de suspensão. Mostre que a distância entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação para um pêndulo de qualquer formato é $I/mh$, onde $I$ e $h$ têm os significados da Eq. 15-29 e $m$ é a massa do pêndulo.

•43 Na Fig. 15-41 o pêndulo é formado por um disco uniforme de raio $r = 10{,}0$ cm e 500 g de massa preso a uma barra uniforme de comprimento $L = 500$ mm e 270 g de massa. (a) Calcule o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão. (b) Qual é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa do pêndulo? (c) Calcule o período de oscilação.

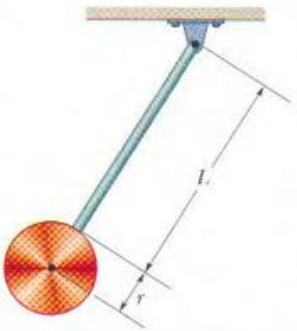


FIG. 15-41 Problema 43.

•44 Um pêndulo físico é formado por uma régua de um metro, cujo ponto de suspensão é um pequeno furo feito na régua a uma distância $d$ da marca de 50 cm. O período de oscilação é 2,5 s. Determine o valor de $d$.

•45 Na Fig. 15-42 um pêndulo físico é formado por um disco uniforme (de raio $R = 2{,}35$ cm) sustentado em um plano vertical por um pino situado a uma distância $d = 1{,}75$ cm do centro do disco. O disco é deslocado de um pequeno ângulo e liberado. Qual é o período do movimento harmônico simples resultante?

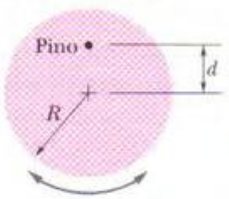


FIG. 15-42 Problema 45.

•46 Um pêndulo físico é formado por duas réguas de um metro de comprimento unidas da forma indicada na Fig. 15-43. Qual é o período de oscilação do pêndulo em torno de um pino que passa pelo ponto $A$ situado no centro da régua horizontal?

FIG. 15-43 Problema 46.

•47 Uma artista de circo, sentada em um trapézio, está balançando com um período de 8,85 s. Quando fica de pé, elevando assim de 35,0 o centro de massa do sistema *trapézio + artista*, qual é o novo período do sistema? Trate o sistema *trapézio + artista* como um pêndulo simples.

••48 Uma barra fina uniforme (massa = 0,50 kg) oscila em torno de um eixo que passa por uma das extremidades da barra e é perpendicular ao plano de oscilação. A barra oscila com um período de 1,5 s e uma amplitude angular de 10°. (a) Qual é o comprimento da barra? (b) Qual é a energia cinética máxima da barra?

••49 Na Fig. 15-44 uma barra de comprimento $L = 1{,}85$ m oscila como um pêndulo físico. (a) Que valor da distância $x$ entre o centro de massa da barra e o ponto de suspensão $O$ corresponde ao menor período? (b) Qual é esse período?

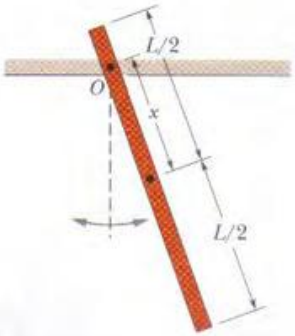


FIG. 15-44 Problema 49.

••50 O cubo de 3,00 kg na Fig. 15-45 tem $d = 6{,}00$ cm de aresta e está montado em um eixo que passa pelo seu centro. Uma mola ($k = 1200$ N/m) liga o vértice superior do cubo a uma parede rígida. Inicialmente a mola está relaxada. Se o cubo é girado de 3° e liberado, qual é o período do MHS resultante?

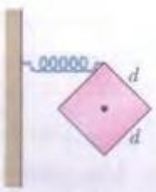


FIG. 15-45 Problema 50.

••51 Na vista superior da Fig. 15-46 uma barra longa e uniforme de massa 0,600 kg está livre para girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. Uma mola de constante elástica $k = 1850$ N/m é ligada horizontalmente entre uma das extremidades da barra e uma parede fixa. Quando a barra está em equilíbrio fica paralela à parede. Qual é o período das pequenas oscilações que acontecem quando a barra é girada ligeiramente e depois liberada?

FIG. 15-46 Problema 51.

••52 Um bloco retangular, com faces de largura $a = 35$ cm e comprimento $b = 45$ cm, é suspenso por uma barra fina que passa por um pequeno furo no seu interior e colocado para oscilar como um pêndulo, com uma amplitude suficientemente pequena para que se trate de um MHS. A Fig. 15-47 mostra uma possível posição do furo, a uma distância $r$ do centro do bloco, sobre a reta que liga o centro a um dos vértices. (a) Plote o período do pêndulo em função da distância $r$ de modo que o mínimo da curva fique evidente. (b) O mínimo acontece para que valor de $r$? Na realidade existe um lugar geométrico em torno do centro do bloco para o qual o período de oscilação possui o mesmo valor mínimo. (c) Qual é a forma desse lugar geométrico?

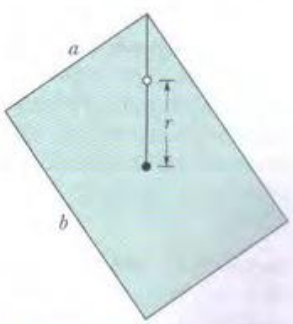


FIG. 15-47 Problema 52.

••53 O ângulo do pêndulo da Fig. 15-9*b* é dado por $\theta = \theta_m \cos[(4{,}44\ \text{rad/s})t + \phi]$. Se, em $t = 0$, $\theta = 0{,}040$ rad e $d\theta/dt = -0{,}200$ rad/s, quais são (a) a constante de fase $\phi$ e (b) o ângulo máximo $\theta_m$? (*Atenção:* Não confunda a taxa de variação de $\theta$, $d\theta/dt$, com a freqüência angular $\omega$ do MHS.)

••54 Na Fig. 15-48*a* uma placa de metal está montada em um eixo que passa pelo seu centro de massa. Uma mola com $k = 2000$ N/m está ligada a uma parede e a um ponto da borda da placa a uma distância $r = 2{,}5$ cm do centro de massa. Inicialmente a mola

está relaxada. Se a placa é girada de 7° e liberada, oscila em torno do eixo em um MHS, com sua posição angular dada pela Fig. 15-48*b*. A escala do eixo horizonte é definida por $t_s = 20$ ms. Qual é o momento de inércia da placa em relação ao centro de massa?

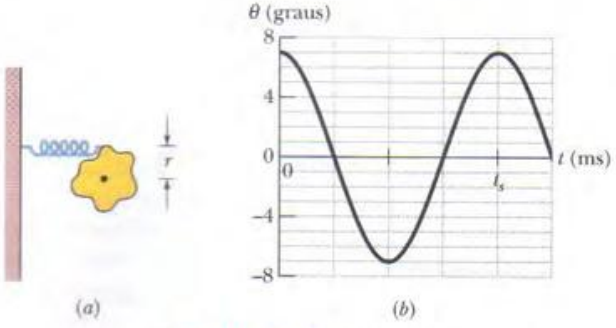



FIG. 15-48 Problema 54.

•••55 Um pêndulo é formado suspendendo-se por um ponto uma barra longa e fina. Em uma série de experimentos o período é medido em função da distância $x$ entre o ponto de suspensão e o centro da barra. (a) Se o comprimento da barra é $L = 2{,}20$ m e a massa é $m = 22{,}1$ g, qual é o menor período? (b) Se $x$ é escolhido de modo a minimizar o período e $L$ é aumentado, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo? (c) Se, em vez disso, m for aumentada com $L$ mantido constante, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo?

•••56 Na Fig. 15-49 um disco de 2,50 kg com $D = 42{,}0$ cm de diâmetro está preso a uma das extremidades de uma barra de comprimento $L = 76{,}0$ cm e massa desprezível que está suspensa pela outra extremidade. (a) Com a mola de torção de massa desprezível desconectada, qual é o período de oscilação? (b) Com a mola de torção conectada, a barra fica em equilíbrio na vertical. Qual é a constante de torção da mola se o período de oscilação diminuiu de 0,500 s?

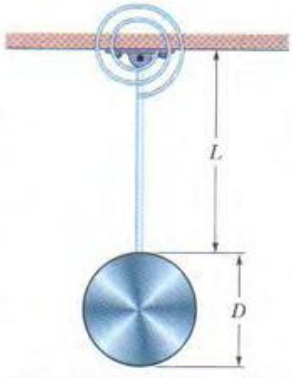



FIG. 15-49 Problema 56.

## seção 15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido

•57 Na Fig. 15-15 o bloco possui uma massa de 1,50 kg e a constante elástica é 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b(dx/dt)$, onde $b = 230$ g/s. O bloco é puxado 12,0 cm para baixo e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude das oscilações resultantes diminua para um terço do valor inicial. (b) Quantas oscilações o bloco realiza nesse intervalo de tempo?

•58 No Exemplo 15-7, qual é a razão entre a amplitude das oscilações amortecidas e a amplitude inicial após 20 ciclos?

•59 A amplitude de um oscilador fracamente amortecido diminui de 3,0% a cada ciclo. Que porcentagem da energia mecânica do oscilador é perdida em cada ciclo?

••60 O sistema de suspensão de um automóvel de 2000 kg "cede" 10 cm quando o chassis é colocado no lugar. Além disso, a amplitude das oscilações diminui de 50% a cada ciclo. Estime os valores (a) da constante elástica $k$ e (b) da constante de amortecimento $b$ do sistema mola-amortecedor de uma das rodas, supondo que cada roda sustente 500 kg.

## seção 15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância

•61 Suponha que, na Eq. 15-45, a amplitude $x_m$ é dada por

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2]^{1/2}},$$

onde $F_m$ é a amplitude (constante) da força externa alternada exercida sobre a mola pelo suporte rígido da Fig. 15-15. Na ressonância, quais são (a) a amplitude do movimento e (b) a amplitude da velocidade do bloco?

•62 Nove pêndulos com os seguintes comprimentos são pendurados em uma viga horizontal: (a) 0,10; (b) 0,30; (c) 0,40; (d) 0,80; (e) 1,2; (f) 2,8; (g) 3,5; (h) 5,0; (i) 6,2 m. A viga sofre oscilações horizontais com freqüências angulares na faixa de 2,00 rad/s a 4,00 rad/s. Quais dos pêndulos entram (fortemente) em oscilação?

••63 Um carro de 1000 kg com quatro ocupantes de 82 kg viaja em uma estrada de terra com "costelas" separadas por uma distância média de 4,0 m. O carro trepida com amplitude máxima quando está a 16 km/h. Quando o carro pára e os ocupantes saltam, qual é a variação da altura do carro?

### Problemas Adicionais

64 Um bloco está em MHS na extremidade de uma mola, com a posição dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Se $\phi = \pi/5$ rad, que porcentagem da energia mecânica total é energia potencial no instante $t = 0$?

65 A Fig. 15-50 mostra a posição de um bloco de 20 g oscilando em um MHS na extremidade de uma mola. A escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 40{,}0$ ms. Quais são (a) a energia cinética máxima do bloco e (b) o número de vezes por segundo que esse máximo é atingido? (*Sugestão:* Medir a inclinação de uma curva provavelmente fornecerá valores muito pouco precisos. Tente encontrar outro método.)

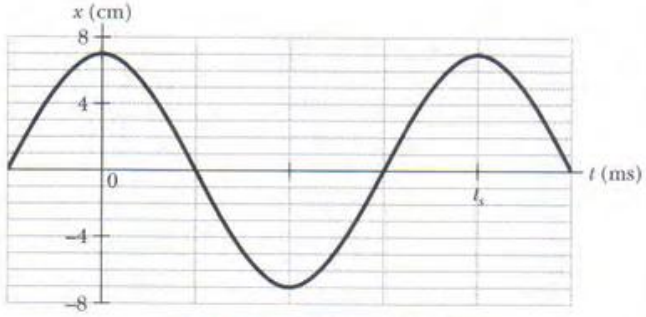



FIG. 15-50 Problemas 65 e 66.

66 A Fig. 15-50 mostra a posição $x(t)$ de um bloco oscilando em um MHS na extremidade de uma mola ($t_s = 40{,}0$ ms). Quais são (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração radial de uma partícula no movimento circular uniforme correspondente?

67 A Fig. 15-51 mostra a energia cinética $K$ de um pêndulo simples em função do ângulo $\theta$ com a vertical. A escala do eixo vertical é definida por $K_s = 10{,}0$ mJ. O peso do pêndulo tem uma massa de 0,200 kg. Qual é o comprimento do pêndulo?

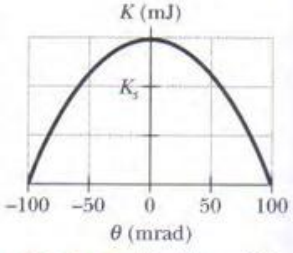



FIG. 15-51 Problema 67.

68 Embora o estado da Califórnia seja conhecido pelos terremo-

tos, possui vastas regiões com rochas precariamente equilibradas que tombariam mesmo quando submetidas a um fraco tremor de terra. As rochas permaneceram nessa situação por milhares de anos, o que sugere que terremotos maiores não ocorreram nessas regiões durante todo esse tempo. Se um terremoto submetesse uma dessas rochas a uma oscilação senoidal (paralela ao solo) com uma freqüência de 2,2 Hz, uma amplitude de oscilação de 1,0 cm faria a rocha tombar. Qual seria o módulo da aceleração máxima da oscilação, em termos de $g$?

**69** Um bloco de 4,00 kg está suspenso por uma mola com $k = 500$ N/m. Uma bala de 50,0 g é disparada verticalmente contra o bloco, de baixo para cima, com uma velocidade de 150 m/s, e fica alojada no bloco. (a) Determine a amplitude do MHS resultante. (b) Que porcentagem da energia cinética original da bala é transferida para a energia mecânica da oscilação?

**70** Um bloco de 55,0 g oscila em um MHS na extremidade de uma mola com $k = 1500$ N/m de acordo com a equação $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Quanto tempo o bloco leva para se mover da posição $+0{,}800x_m$ para a posição (a) $+0{,}600x_m$ e (b) $-0{,}800x_m$?

**71** O diafragma de um alto-falante está oscilando em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 440 Hz e um deslocamento máximo de 0,75 mm. Quais são (a) a freqüência angular, (b) a velocidade máxima e (c) o módulo da aceleração máxima?

**72** A ponta de um diapasão executa um MHS com uma freqüência de 1000 Hz e uma amplitude de 0,40 mm. Para esta ponta, qual é o módulo (a) da aceleração máxima, (b) da velocidade máxima, (c) da aceleração quando o deslocamento é 0,20 mm e (d) da velocidade quando o deslocamento é 0,20 mm?

**73** Um disco plano circular uniforme possui uma massa de 3,00 kg e um raio de 70,0 cm e está suspenso em um plano horizontal por um fio vertical preso ao centro. Se o disco sofre uma rotação de 2,50 rad em torno do fio, é necessário um torque de $0{,}0600\ \text{N} \cdot \text{m}$ para manter essa orientação. Calcule (a) o momento de inércia do disco em relação ao fio, (b) a constante de torção e (c) a freqüência angular desse pêndulo de torção quando é posto para oscilar.

**74** Um disco circular uniforme cujo raio $R$ é 12,6 cm está suspenso por um ponto da borda para formar um pêndulo físico. (a) Qual é o período? (b) A que distância do centro $r < R$ existe um ponto de suspensão para o qual o período é o mesmo?

**75** Qual é a freqüência de um pêndulo simples de 2,0 m de comprimento (a) em uma sala, (b) em um elevador acelerando para cima a $2{,}0\ \text{m/s}^2$ e (c) em queda livre?

**76** Uma partícula executa um MHS linear com uma freqüência de 0,25 Hz em torno do ponto $x = 0$. Em $t = 0$ ela tem um deslocamento $x = 0{,}37$ cm e velocidade nula. Determine os seguintes parâmetros do MHS: (a) período, (b) freqüência angular, (c) amplitude, (d) deslocamento $x(t)$, (e) velocidade $v(t)$, (f) velocidade máxima, (g) módulo da aceleração máxima, (h) deslocamento em $t = 3{,}0$ s e (i) velocidade em $t = 3{,}0$ s.

**77** Uma pedra de 50,0 g está oscilando na extremidade inferior de uma mola vertical. Se a maior velocidade da pedra é 15,0 cm/s e o período é 0,500 s, determine (a) a constante elástica da mola, (b) a amplitude do movimento e (c) a freqüência de oscilação.

**78** Um bloco de 2,00 kg está pendurado em uma mola. Quando Um corpo de 300 g é pendurado no bloco a mola sofre uma distensão adicional de 2,00 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) Determine o período do movimento se o corpo de 300 g é removido e o bloco é posto para oscilar.

**79** A extremidade de uma mola oscila com um período de 2,0 s quando um bloco com massa $m$ está ligado a ela. Quando a massa é aumentada de 2,0 kg o período do movimento passa a ser 3,0 s. Determine o valor de $m$.

**80** Um bloco de 0,10 kg oscila em linha reta em uma superfície horizontal sem atrito. O deslocamento em relação à origem é dado por

$$x = (10\ \text{cm}) \cos[(10\ \text{rad/s})t + \pi/2\ \text{rad}].$$

(a) Qual é a freqüência de oscilação? (b) Qual é a velocidade máxima velocidade do bloco? (c) Para que valor de $x$ a velocidade é máxima? (d) Qual é o módulo da aceleração máxima do bloco? (e) Para que valor de $x$ a aceleração é máxima? (f) Que força, aplicada ao bloco pela mola, produz uma oscilação como esta?

**81** Uma partícula de 3,0 kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e se move de acordo com a equação

$$x = (5{,}0\ \text{m}) \cos[(\pi/3\ \text{rad/s})t - \pi/4\ \text{rad}],$$

com $t$ em segundos. (a) Para que valor de $x$ a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total? (b) Quanto tempo a partícula leva para se mover até esta posição $x$ a partir da posição de equilíbrio?

**82** Uma mola de massa desprezível e constante elástica 19 N/m está pendurada verticalmente. Um corpo de massa 0,20 kg é preso na extremidade livre da mola e liberado. Suponha que a mola estava relaxada antes de o corpo ser liberado. Determine (a) a distância que o corpo atinge abaixo da posição inicial e (b) a freqüência e (c) a amplitude do MHS resultante.

**83** O êmbolo de uma locomotiva tem um curso (o dobro da amplitude) de 0,76 m. Se o êmbolo executa um movimento harmônico simples com uma freqüência angular de 180 rev/min, qual é sua velocidade máxima?

**84** Uma roda pode girar livremente em torno do seu eixo fixo. Uma mola é presa a um dos raios a uma distância $r$ do eixo, como mostra a Fig. 15-52. (a) Supondo que a roda é um anel de massa $m$ e raio $R$, qual é a freqüência angular $\omega$ das pequenas oscilações desse sistema em termos de $m$, $R$, $r$ e da constante elástica $k$? Qual é o valor de $\omega$ para (b) $r = R$ e (c) $r = 0$?

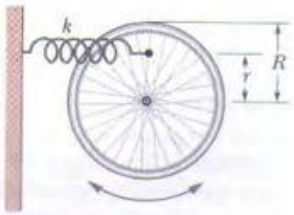


FIG. 15-52 Problema 84.

**85** A escala de uma balança de mola que mede de 0 a 15,0 kg tem 12,0 cm de comprimento. Um pacote suspenso na balança oscila verticalmente com uma freqüência de 2,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica? (b) Quanto pesa o pacote?

**86** Uma mola uniforme com $k = 8600$ N/m é cortada em dois pedaços, 1 e 2, cujos comprimentos no estado relaxado são $L_1 = 7{,}0$ cm e $L_2 = 10$ cm. Qual é o valor (a) de $k_1$ e (b) de $k_2$? Um bloco preso na mola original, como na Fig. 15-5, oscila com uma freqüência de 200 Hz. Qual é a freqüência de oscilação se o bloco for preso (c) no pedaço 1 e (d) no pedaço 2?

**87** Na Fig. 15-53 três vagonetes de minério de 10.000 kg são mantidos em repouso sobre os trilhos

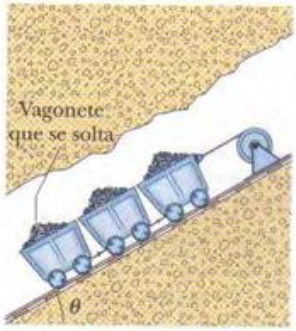


FIG. 15-53 Problema 87.

de uma mina por um cabo paralelo aos trilhos, que possuem uma inclinação $\theta = 30°$ em relação à horizontal. O cabo sofre um alongamento de 15 cm imediatamente antes de o engate entre os dois vagonetes de baixo se romper, liberando um deles. Supondo que o cabo obedece à lei de Hooke, determine (a) a freqüência e (b) a amplitude das oscilações dos dois vagonetes que restam.

**88** Um pêndulo simples com 20 cm de comprimento e 5,0 g de massa está suspenso em um carro de corrida que se move com velocidade constante de 70 m/s, descrevendo uma circunferência com 50 m de raio. Se o pêndulo sofre pequenas oscilações na direção radial em torno da posição de equilíbrio, qual é a freqüência dessas oscilações?

**89** Uma mola vertical sofre uma distensão de 9,6 cm quando um bloco de 1,3 kg é pendurado na sua extremidade. (a) Calcule a constante elástica. O bloco é deslocado de mais 5,0 cm para baixo e liberado a partir do repouso. Determine (b) o período, (c) a freqüência, (d) a amplitude e (e) a velocidade máxima do MHS resultante.

**90** Um bloco pesando 20 N oscila na extremidade de uma mola vertical para a qual $k = 100$ N/m; a outra extremidade da mola está presa a um teto. Em um certo instante a mola está esticada 0,30 m além do comprimento relaxado (o comprimento quando nenhum objeto está preso à mola) e o bloco possui velocidade nula. (a) Qual é a força resultante aplicada ao bloco nesse instante? Quais são (b) a amplitude e (c) o período do movimento harmônico simples? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

**91** Um bloco de 1,2 kg deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal com $k = 480$ N/m. Seja $x$ o deslocamento do bloco a partir da posição na qual a mola se encontra relaxada. Em $t = 0$ o bloco passa pelo ponto $x = 0$ com uma velocidade de 5,2 m/s no sentido positivo de $x$. Quais são (a) a freqüência e (b) a amplitude do movimento do bloco? (c) Escreva uma expressão para o deslocamento $x$ em função do tempo.

**92** Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,80 kg preso a uma mola ($k = 200$ N/m). O bloco desliza em uma superfície horizontal sem atrito em torno da posição de equilíbrio $x = 0$ com uma energia mecânica total de 4,0 J. (a) Qual é a amplitude das oscilações? (b) Quantas oscilações o bloco completa em 10 s? (c) Qual é a energia cinética máxima do bloco? (d) Qual é a velocidade do bloco em $x = 0{,}15$ m?

**93** Um engenheiro possui um objeto de 10 kg de forma irregular e precisa conhecer o momento de inércia do objeto em relação a um eixo que passa pelo centro de massa. O objeto é preso a um fio esticado cuja orientação é a mesma do eixo. O fio possui uma constante de torção $\kappa = 0{,}50\ \text{N} \cdot \text{m}$. Se este pêndulo de torção sofre 20 oscilações completas em 50 s, qual é o momento de inércia do objeto?

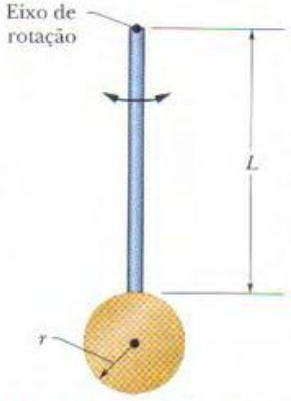


FIG. 15-54 Problema 94.

**94** O pêndulo de um relógio do vovô é formado por um fino disco de latão de raio $r = 15{,}00$ cm e massa 1,000 kg ligado a uma barra longa e fina de massa desprezível. O pêndulo oscila livremente em torno de um eixo perpendicular à barra que passa pela extremidade oposta à do disco, como mostra a Fig. 15-54. Se o pêndulo deve ter um período de 2,000 s para pequenas oscilações num local onde $g = 9{,}800\ \text{m/s}^2$, qual deve ser o comprimento $L$ da haste com precisão de décimos de milímetro?

**95** Um bloco que desliza em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal de constante elástica 600 N/m. O bloco executa um MHS em torno da posição de equilíbrio com um período de 0,40 s e uma amplitude de 0,20 m. Quando o bloco está passando pela posição de equilíbrio uma bola de massa de modelar de 0,50 kg é deixada cair verticalmente no bloco. Se a massa fica grudada no bloco, determine (a) o novo período do movimento e (b) a nova amplitude do movimento.

**96** Quando uma lata de 20 N é pendurada na extremidade inferior de uma mola vertical a mola sofre uma distensão de 20 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) A mesma mola é colocada horizontalmente em uma mesa sem atrito. Uma das extremidades é mantida fixa e a outra é presa a uma lata de 5,0 N. A lata é deslocada (esticando a mola) e liberada a partir do repouso. Qual é o período da oscilação produzida?

**97** Um bloco de 4,00 kg pendurado em uma mola produz um alongamento de 16,0 cm em relação à posição relaxada. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) O bloco é removido e um corpo de 0,500 kg é pendurado na mesma mola. Se a mola é distendida e liberada, qual é o período de oscilação?

**98** Um oscilador harmônico amortecido é formado por um bloco ($m = 2{,}00$ kg), uma mola ($k = 10{,}0$ N/m) e uma força de amortecimento ($F = -bv$). Inicialmente o bloco oscila com uma amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento a amplitude cai a três quartos do valor inicial após quatro oscilações completas. (a) Qual é o valor de $b$? (b) Qual é a energia "perdida" durante as quatro oscilações?

**99** Um brinquedo muito apreciado pelas crianças é o *balanço elástico*, um assento sustentado por cordas elásticas (Fig. 15-55). Suponha que existe apenas uma corda em cada lado, a despeito do arranjo mais realista mostrado na figura. Quando uma criança é colocada no assento ambos descem uma distância $d_s$ quando as cordas se distendem (trate-as como se fossem molas). Em seguida o assento é puxado para baixo de uma distância adicional $d_m$ e liberado, o que faz a criança oscilar verticalmente, como um bloco na extremidade de uma mola. Suponha que você seja um engenheiro de segurança da empresa que fabrica o brinquedo. Você não quer que o módulo da aceleração da criança ultrapasse $0{,}20g$ para que a criança não fique com torcicolo. Se $d_m = 10$ cm, que valor de $d_s$ corresponde a esse módulo da aceleração?

FIG. 15-55 Problema 99.

**100** Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função aceleração $a(t)$ aparece na Fig. 15-56 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ e $a_s = 4{,}0\ \text{m/s}^2$?

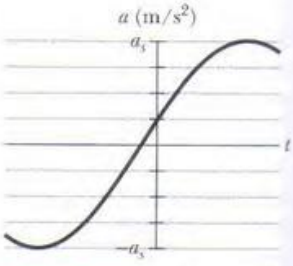


FIG. 15-56 Problema 100.

**101** Um pêndulo de torção é formado por um disco de metal com um fio soldado no centro. O fio é montado verticalmente e es-

ticado. A Fig. 15-57*a* mostra o módulo $\tau$ do torque necessário para fazer o disco girar em torno do centro (torcendo o fio) em função do ângulo de rotação $\theta$. A escala do eixo vertical é definida por $\tau_s = 4{,}0 \times 10^{-3}$ N · m. O disco é girado até $\theta = 0{,}200$ rad e depois liberado. A Fig. 15-57*b* mostra a oscilação resultante em termos da posição angular $\theta$ em função do tempo $t$. (a) Qual é o momento de inércia do disco em relação ao centro? (b) Qual é a velocidade angular máxima $d\theta/dt$ do disco? (*Atenção:* Não confunda a freqüência angular [constante] do MHS e a velocidade angular [variável] do disco, que normalmente são representadas pelo mesmo símbolo, $\omega$. *Sugestão:* A energia potencial $U$ do pêndulo de torção é igual a $\frac{1}{2}\kappa\theta^2$, uma expressão análoga à da energia potencial de uma mola, $U = \frac{1}{2}kx^2$.)

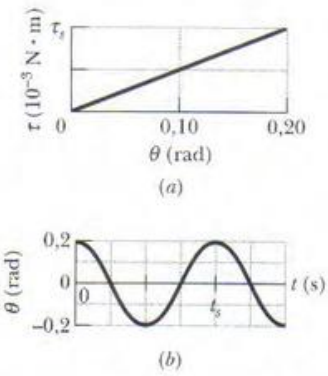



FIG. 15-57 Problema 101.

**102** Uma aranha fica sabendo se a teia capturou, digamos, uma mosca porque os movimentos da mosca fazem oscilar os fios da teia. A aranha pode avaliar até mesmo o tamanho da mosca pela freqüência das oscilações. Suponha que uma mosca oscile no *fio de captura* como um bloco preso a uma mola. Qual é a razão entre as freqüências de oscilação de uma mosca de massa $m$ e de uma mosca de massa $2{,}5m$?

**103** Determine a amplitude angular $\theta_m$ das oscilações de um pêndulo simples para a qual a diferença entre o torque restaurador necessário para o movimento harmônico simples e o torque restaurador verdadeiro seja igual a 1,0%. (Veja "Expansões Trigonométricas" no Apêndice E.)

**104** Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco preso a uma mola com $k = 200$ N/m. O bloco desliza em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$ e uma amplitude de 0,20 m. O gráfico da velocidade $v$ do bloco em função do tempo $t$ aparece na Fig. 15-58. Quais são (a) o período do MHS, (b) a massa do bloco, (c) o deslocamento do bloco em $t = 0$, (d) a aceleração do bloco em $t = 0{,}10$ s e (e) a energia cinética máxima do bloco?

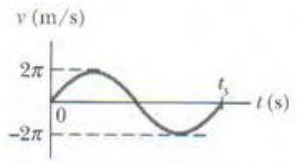



FIG. 15-58 Problema 104.

**105** Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,50 kg preso a uma mola. O bloco oscila em linha reta, de um lado para outro, em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$. Em $t = 0$, o bloco está em $x = 0$ e se move no sentido positivo de $x$. A Fig. 15-59 mostra o módulo da força $\vec{F}$ aplicada em função da posição do bloco. A escala vertical é definida por $F_s = 75{,}0$ N. Quais são (a) a amplitude do movimento, (b) o período do movimento, (c) o módulo da aceleração máxima e (d) a energia cinética máxima?

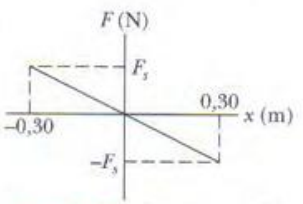



FIG. 15-59 Problema 105.

**106** Na Fig. 15-60 um cilindro maciço preso a uma mola horizontal (k = 3,00 N/m) rola sem deslizar em uma superfície horizontal. Se o sistema é liberado a partir do repouso quando a mola está distendida de 0,250 m, determine (a) a energia cinética de translação e (b) a energia cinética de rotação do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (c) Mostre que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples de período

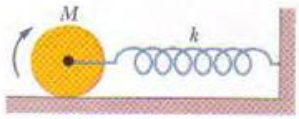



FIG. 15-60 Problema 106.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

onde M é a massa do cilindro. (Sugestão: Calcule a derivada em relação ao tempo da energia mecânica total.)

**107** Um bloco pesando 10,0 N está preso à extremidade inferior de uma mola vertical ($k = 200{,}0$ N/m). A outra extremidade está presa a um teto. O bloco oscila verticalmente e possui uma energia cinética de 2,00 J ao passar pelo ponto no qual a mola está relaxada. (a) Qual é o período de oscilação? (b) Use a lei de conservação da energia para determinar os maiores deslocamentos do bloco acima e abaixo do ponto no qual a mola fica relaxada. (Os dois valores não são necessariamente iguais.) (c) Qual é a amplitude de oscilação? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

**108** Um bloco de 2,0 kg executa um MHS preso a uma mola horizontal de constante elástica 200 N/m. A velocidade máxima do bloco enquanto desliza em uma superfície horizontal sem atrito é 3,0 m/s. Quais são (a) a amplitude do movimento do bloco, (b) o módulo da aceleração máxima e (c) o módulo da aceleração mínima? (d) Quanto tempo o bloco leva para completar 7,0 ciclos do seu movimento?

**109** As freqüências de vibração dos átomos nos sólidos em temperaturas normais são da ordem de 1013 Hz. Imagine que os átomos estão ligados uns aos outros através de molas. Suponha que um átomo de prata em um sólido vibre com essa freqüência e que todos os outros átomos estejam em repouso. Calcule a constante elástica efetiva. Um mol ($6{,}02 \times 10^{23}$ átomos) de prata tem uma massa de 108 g.

**110** Na Fig. 15-61 uma bola de demolição de 2500 kg balança na ponta de um guindaste. O comprimento do segmento de cabo que se move com a bola é 17 m. (a) Determine o período do balanço, supondo que o sistema pode ser tratado como um pêndulo simples. (b) O período depende da massa da bola?

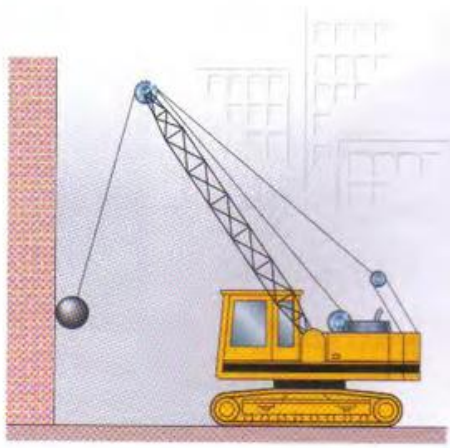


FIG. 15-61 Problema 110.

**111** O centro de oscilação de um pêndulo físico possui a seguinte propriedade interessante: se um impulso (horizontal e no plano de oscilação) é aplicado ao centro de oscilação, nenhuma oscilação é sentida no ponto de apoio. Os jogadores de beisebol (e os jogadores de muitos outros esportes) sabem que a menos que a bola se choque com o bastão nesse ponto (chamado de "ponto doce" pelos atletas), as oscilações produzidas pelo impacto serão transmitidas às mãos. Para demonstrar essa propriedade, suponha que a régua da Fig. 15-11*a* simule um bastão de beisebol. Suponha que uma força horizontal $\vec{F}$ (devido ao impacto da bola) age para a direita em $P$, o centro de oscilação. O batedor segura o bastão em $O$, o ponto de sustentação da régua. (a) Que aceleração a força $\vec{F}$ imprime ao ponto $O$? (b) Que aceleração angular é produzida por $\vec{F}$ em relação ao centro de massa da régua? (c) Como resultado da aceleração angular calculada no item (b), qual é a aceleração linear do ponto $O$? (d) Considerando os módulos e orientações das acelerações calculadas nos itens (a) e (c), convença-se de que o ponto $P$ é, de fato, um "ponto doce".

**112** Um bloco de 2,0 kg é preso a uma das extremidades de uma mola com uma constante elástica de 350 N/m e forçado a oscilar por uma força $F = (15\text{ N})\,\text{sen}(\omega_d t)$, onde $\omega_d = 35$ rad/s. A constante de amortecimento é $b = 15$ kg/s. Em $t = 0$ o bloco está em repouso com a mola no comprimento relaxado. (a) Use integração numérica para plotar o deslocamento do bloco durante o primeiro 1,0 s. Use o movimento perto do final do intervalo de 1,0 s para estimar a amplitude, o período e a freqüência angular. Repita os cálculos para (b) $\omega_d = \sqrt{k/m}$ e (c) $\omega_d = 20$ rad/s.

# Ondas — I

16

Sion Touhig/Getty Images News and Sport Services

Bruno Vincent/Reportage/Getty Images, Inc.

*Em 2001, uma passarela para pedestres sobre o rio Tâmisa foi inaugurada em Londres para ligar a galeria Tate de arte moderna às vizinhanças da catedral de St. Paul e comemorar a chegada do novo milênio. Entretanto, logo depois que a primeira onda de pedestres começou a caminhar sobre ela, a Ponte do Milênio, como é chamada, começou a oscilar de tal forma que muitos pedestres tiveram dificuldade para se manter de pé. Oscilações semelhantes podem acontecer em uma pista de dança com piso de madeira, especialmente se os participantes estiverem pulando.*

*O que provoca as oscilações, às vezes perigosas, de passarelas e pistas de dança?*

A resposta está neste capítulo.

## 16-1 O QUE É FÍSICA?

As ondas são um dos principais assuntos da física. Para se ter uma idéia da importância das ondas no mundo moderno basta considerar a indústria musical. Cada peça musical que escutamos, de uma roda de choro ao mais sofisticado concerto sinfônico, depende da produção de ondas pelos artistas e da capacidade da platéia de detectar essas ondas. Entre a produção e a detecção a informação contida nas ondas pode ser transmitida (como no caso de uma apresentação ao vivo pela Internet) ou gravada e reproduzida (através de CDs, DVDs ou outros meios atualmente em desenvolvimento nos centros de pesquisa). A importância econômica do controle de ondas musicais é enorme, e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas de controle pode ser muito generosa.

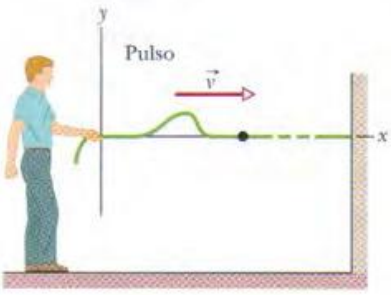
Neste capítulo vamos discutir as ondas que se propagam em uma corda esticada, como a de um violão. O próximo capítulo trata das ondas sonoras, como as produzidas por uma corda de violão. Antes, porém, vamos classificar as inúmeras ondas que estão presentes em nosso dia-a-dia em alguns tipos básicos.

## 16-2 | Tipos de Ondas

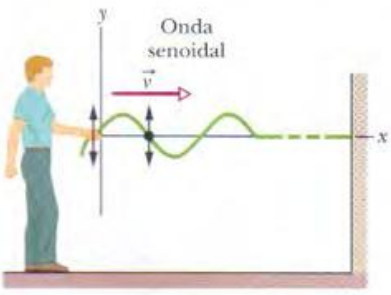
As ondas podem ser de três tipos principais:

1. ***Ondas mecânicas.*** Essas ondas são as mais familiares porque as encontramos constantemente. Entre elas estão as ondas do mar, as ondas sonoras e as ondas sísmicas. Todas essas ondas possuem duas características: são governadas pelas leis de Newton e existem apenas em um meio material, como a água, o ar ou as rochas.
2. ***Ondas eletromagnéticas.*** Essas ondas podem ser menos familiares, mas estão entre as mais usadas; exemplos importantes são a luz visível, a luz ultravioleta, as ondas de rádio e de televisão, as microondas, os raios X e as ondas de radar. Estas ondas não precisam de um meio material para existir. As ondas luminosas provenientes das estrelas, por exemplo, atravessam o vácuo do espaço para chegar até nós. Todas as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a mesma velocidade $c = 299\,792\,458$ m/s.
3. ***Ondas de matéria.*** Embora essas ondas sejam usadas nos laboratórios, provavelmente o leitor não está familiarizado com elas. Estão associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo a átomos e moléculas. Elas são chamadas de ondas de matéria porque normalmente pensamos nessas partículas como elementos básicos da matéria.

Muito do que discutimos neste capítulo se aplica a ondas de todos os tipos. Nos exemplos, porém, vamos usar apenas ondas mecânicas.




(*a*)




(*b*)

**FIG. 16-1** (*a*) Um pulso isolado é produzido em uma corda esticada. Um elemento típico da corda (assinalado com um ponto) se desloca para cima e depois para baixo quando o pulso passa por ele. Como o movimento do elemento é perpendicular à direção de propagação da onda, o pulso é uma *onda transversal*. (*b*) Uma onda senoidal é produzida na corda. Um elemento típico da corda se move para cima e para baixo com a passagem da onda. Esta também é uma onda transversal.

## 16-3 | Ondas Transversais e Longitudinais

Uma onda que se propaga em uma corda esticada é a mais simples das ondas mecânicas. Quando damos uma sacudidela na ponta de uma corda esticada uma onda com a forma de um *pulso* se propaga ao longo da corda, como na Fig. 16-1*a*. Este pulso e o seu movimento podem ocorrer porque a corda está sob tensão. Quando você puxa a extremidade da corda para cima ela puxa para cima a parte vizinha da corda através da tensão que existe entre as duas partes. Quando a parte vizinha se move para cima puxa para cima a parte seguinte da corda, e assim por diante. Enquanto isso, você puxou para baixo a extremidade da corda. Enquanto as outras partes da corda estão se deslocando para cima começam a ser puxadas de volta para baixo pelas partes vizinhas, que já se encontram em movimento descendente. O resultado geral é que a distorção da forma da corda (o pulso) se propaga ao longo da corda com uma certa velocidade $\vec{v}$.

Se você desloca a mão para cima e para baixo continuamente, em um movimento harmônico simples, uma onda contínua se propaga ao longo da corda com velocidade $\vec{v}$. Como o movimento da sua mão é uma função senoidal do tempo, a onda tem uma forma senoidal em qualquer instante, como na Fig. 16-1*b*, ou seja, a onda possui a forma da curva seno ou co-seno.

No momento, vamos considerar apenas o caso de uma corda "ideal", na qual não existem forças de atrito para reduzir a amplitude da onda enquanto ela se propaga. Além disso, vamos supor que a corda é tão comprida que não é preciso considerar o retorno da onda depois de atingir a outra extremidade.

Um modo de estudar a onda da Fig. 16-1 é examinar a **forma de onda**, ou seja, a forma assumida pela corda em um dado instante. Outro modo consiste em observar o movimento de um elemento da corda enquanto oscila para cima e para baixo por causa da passagem da onda. Usando o segundo método, constatamos que o deslocamento dos elementos da corda é sempre *perpendicular* à direção de propagação da onda, como mostra a Fig. 16-1*b*. Este movimento é chamado de **transversal**, e dizemos que a onda que se propaga em uma corda é uma **onda transversal**.

A Fig. 16-2 mostra como uma onda sonora pode ser produzida por um êmbolo em um tubo com ar. Se você desloca o êmbolo bruscamente para a direita e depois para a esquerda, envia um pulso sonoro ao longo do tubo. O movimento do êmbolo para a direita empurra as moléculas do ar para a direita, aumentando a pressão do ar nessa região. O aumento da pressão do ar empurra as moléculas vizinhas para a direita, e assim por diante. O movimento do êmbolo para a esquerda reduz a pressão do ar nessa região. A redução da pressão do ar puxa as moléculas vizinhas para a esquerda, e assim por diante. O movimento do ar e as variações da pressão do ar se propagam para a direita ao longo do tubo na forma de um pulso.

Se você desloca o êmbolo para a frente e para trás em um movimento harmônico simples, como na Fig. 16-2, uma onda senoidal se propaga ao longo do tubo. Como o movimento das moléculas de ar é paralelo à direção de propagação da onda, este movimento é chamado de **longitudinal**, e dizemos que a onda que se propaga no ar é uma **onda longitudinal**. Neste capítulo vamos estudar as ondas transversais, principalmente as ondas em cordas; no Capítulo 17 vamos estudar as ondas longitudinais, principalmente as ondas sonoras.

Tanto as ondas transversais como as ondas longitudinais são chamadas de **ondas progressivas** quando se propagam de um lugar a outro, como no caso das ondas na corda da Fig. 16-1 e no tubo da Fig. 16-2. Observe que é a onda que se propaga, e não o meio material (corda ou ar) no qual a onda se move.

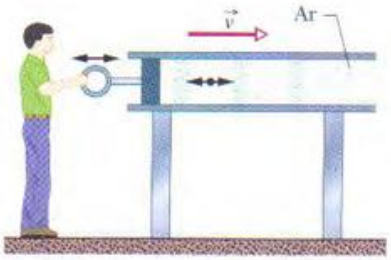
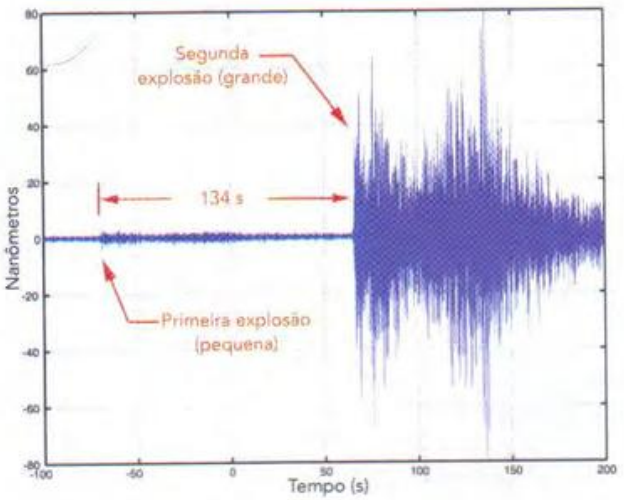



FIG. 16-2 Uma onda sonora é produzida, em um tubo cheio de ar, movendo o êmbolo para a frente e para trás. Como as oscilações de um elemento de ar (representado pelo ponto) são paralelas à direção de propagação da onda, ela é uma *onda longitudinal*.

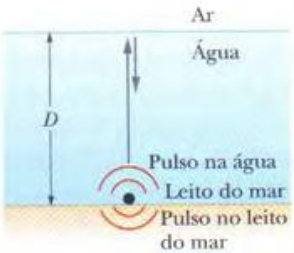
## Exemplo 16-1

As ondas sísmicas são ondas que se propagam tanto no interior como na superfície da Terra. As estações sismológicas são montadas principalmente para registrar as ondas sísmicas geradas por terremotos, mas registram também as ondas sísmicas geradas por qualquer grande liberação de energia nas proximidades da superfície da Terra, como a produzida por uma explosão. Quando ondas sísmicas passam por uma estação fazem a pena de um registrador oscilar, desenhando um gráfico correspondente. A Fig. 16-3*a* mostra um dos registros das ondas sísmicas produzidas pelo misterioso acidente ocorrido com o submarino russo *Kursk* em agosto de 2000. As primeiras oscilações da pena estão assinaladas por uma seta, e foram de pequena amplitude. Oscilações muito mais fortes começaram cerca de 134 s depois.

A partir de registros como esse, os analistas concluíram que as primeiras ondas sísmicas foram geradas por uma explosão a bordo, possivelmente de um torpedo que não chegou a ser lançado por causa de algum defeito no sistema de propulsão. A explosão provavelmente abriu uma fenda no casco, provocou um incêndio e fez o submarino afundar. As ondas sísmicas posteriores, muito mais fortes, foram geradas depois que o submarino afundou e foram possivelmente geradas quando o incêndio provocou a explosão simultânea de vários mísseis. Essas ondas mais fortes chegaram às estações sismológicas como pulsos separados por um intervalo de tempo $\Delta t$ de cerca de 0,11 s. Qual era a profundidade $D$ do local onde o submarino afundou?




(*a*)




(*b*)

FIG. 16-3 (*a*) Gráfico produzido por um sismógrafo quando as ondas de choque provenientes do *Kursk* passaram pelo aparelho. A amplitude está registrada verticalmente; o tempo aumenta para a direita. (*Cortesia de Jay Pulli/BBN Technologies*) (*b*) Com o submarino parado a uma profundidade $D$, a grande explosão produziu pulsos no fundo do mar e na água.

**IDÉIA-CHAVE** A velocidade de uma onda é igual à distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

***Cálculos:*** Vamos supor que a explosão mais forte ocorreu depois que o *Kursk* chegou ao fundo. A explosão produziu um pulso no leito do mar e um pulso na água, que se propagou para cima (Fig. 16-3*b*). O pulso que se propagou na água "ricocheteou" várias vezes entre a superfície da água e o fundo do mar. Cada vez que chegava ao fundo produzia outro pulso no leito do mar, e as estações sismológicas detectaram esses pulsos em seqüência. Assim, o intervalo de tempo $\Delta t$ entre a detecção de dois pulsos consecutivos pelas estações sismológicas é igual ao tempo que o pulso levou para se propagar na água do fundo até a superfície e ser refletido de volta ao fundo. De acordo com a Eq. 2-2 ($v_{méd} = \Delta x/\Delta t$), podemos relacionar a velocidade $v$ do pulso na água à distância de ida e volta $2D$ e ao tempo de ida e volta $\Delta t$:

$$v = \frac{2D}{\Delta t},$$

ou

$$D = \frac{v\Delta t}{2}. \qquad (16\text{-}1)$$

As ondas se propagam na água com uma velocidade da ordem de 1500 m/s. Substituindo este valor e fazendo $\Delta t$ = 0,11 s na Eq. 16-1, calculamos que de acordo com os dados sísmicos o Kursk estava a uma profundidade de aproximadamente

$$D = \frac{(1500\ \text{m/s})(0{,}11\ \text{s})}{2}$$

$$= 82{,}5\ \text{m} \approx 83\ \text{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

quando ocorreram as explosões principais.

Na verdade, os destroços do submarino foram encontrados a uma profundidade de 115 m.

## 16-4 | Comprimento de Onda e Freqüência

Para descrever perfeitamente uma onda em uma corda (e o movimento de qualquer elemento da corda), precisamos de uma função que forneça a forma da onda. Isso significa que necessitamos de uma relação da forma $y = h(x, t)$, onde $y$ é o deslocamento transversal de um elemento da corda e $h$ é uma função do tempo $t$ e da posição $x$ do elemento na corda. Toda forma senoidal como a da onda na Fig. 16-1*b* pode ser descrita tomando $h$ como uma função seno ou uma função coseno; ambas fornecem a mesma forma para a onda. Neste capítulo, vamos usar a função seno.

Imagine uma onda senoidal como a da Fig. 16-1*b* se propagando no sentido positivo de um eixo $x$. Quando a onda passa por elementos sucessivos (ou seja, por partes muito pequenas) da corda os elementos oscilam paralelamente ao eixo $y$. Em um certo instante $t$ o deslocamento $y$ do elemento da corda situado na posição $x$ é dado por

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (16\text{-}2)$$

Como esta equação está escrita em termos da posição $x$, ela pode ser usada para calcular os deslocamentos de todos os elementos da corda em função do tempo. Assim, pode nos dizer qual é a forma da onda em qualquer instante de tempo e como esta forma varia quando a onda se move ao longo da corda.

Os nomes das grandezas da Eq. 16-2 são mostrados e definidos na Fig. 16-4. Antes de discuti-los, porém, vamos examinar a Fig. 16-5, que mostra cinco "instantâneos" de uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo $x$. O movimento da onda está indicado pelo deslocamento para a direita da seta que aponta para um dos picos positivos da onda. De instantâneo para instantâneo a seta se move para a direita juntamente com a forma da onda, mas a corda se move *apenas* paralelamente ao eixo $y$. Para confirmar este fato vamos acompanhar o movimento do elemento vermelho da corda em $x = 0$. No primeiro instantâneo (Fig. 16-5*a*) esse elemento está com um deslocamento $y = 0$. No instantâneo seguinte ele está com seu deslocamento extremo para baixo, porque um *vale* (ou máximo negativo) da onda está passando por ele. Em seguida, sobe de novo para $y = 0$. No quarto instantâneo está em seu deslocamento extremo para cima porque um *pico* (ou máximo positivo) da onda está passando por ele. No quinto instantâneo está novamente em $y = 0$, tendo completado um ciclo de oscilação.

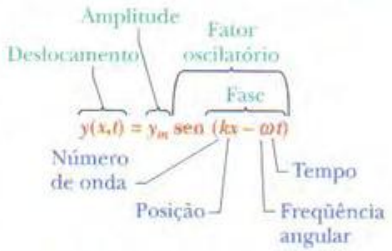



FIG. 16-4 Nomes das grandezas da Eq. 16-2, para uma onda senoidal transversal.

## Amplitude e Fase

A **amplitude** $y_m$ de uma onda como a Fig. 16-5 é o módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir da posição de equilíbrio quando a onda passa por eles. (O índice $m$ significa máximo.) Como $y_m$ é um módulo, é sempre uma grandeza positiva, mesmo que seja medido para baixo e não para cima, como na Fig. 16-5*a*.

A **fase** da onda é o *argumento* $kx - \omega t$ do seno da Eq. 16-2. Quando a onda passa por um elemento da corda em uma certa posição $x$ a fase varia linearmente com o tempo $t$. Isso significa que o seno também varia, oscilando entre $+1$ e $-1$. O valor extremo positivo $(+1)$ corresponde à passagem pelo elemento de pico da onda; nesse instante, o valor de $y$ na posição $x$ é $y_m$. O valor extremo negativo $(-1)$ corresponde à passagem pelo elemento de um vale da onda; nesse instante, o valor de $y$ na posição $x$ é $-y_m$. Assim, a função seno e a variação com o tempo da fase da onda correspondem à oscilação de um elemento da corda, e a amplitude da onda determina os extremos do deslocamento do elemento.

## Comprimento de Onda e Número de Onda

O **comprimento de onda** $\lambda$ de uma onda é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre repetições da forma de onda. Um comprimento de onda típico está indicado na Fig. 16-5*a*, que é um instantâneo da onda em $t = 0$. Nesse instante a Eq. 16-2 fornece, como descrição da forma da onda,

$$y(x, 0) = y_m \operatorname{sen} kx. \tag{16-3}$$

Por definição, o deslocamento $y$ é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda, ou seja, em $x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$. Assim, de acordo com a Eq. 16-3,

$$\begin{aligned} y_m \operatorname{sen} kx_1 &= y_m \operatorname{sen} k(x_1 + \lambda) \\ &= y_m \operatorname{sen} (kx_1 + k\lambda). \end{aligned} \tag{16-4}$$

Uma função seno começa a se repetir quando o seu ângulo (ou argumento) aumenta de $2\pi$ rad; assim, na Eq. 16-4 devemos ter $k\lambda = 2\pi$, ou

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{(número de onda)}. \tag{16-5}$$

O parâmetro $k$ é chamado de **número de onda**; sua unidade no SI é o radiano por metro, ou $m^{-1}$. (Observe que neste caso o símbolo $k$ *não* representa uma constante elástica, como em capítulos anteriores.)

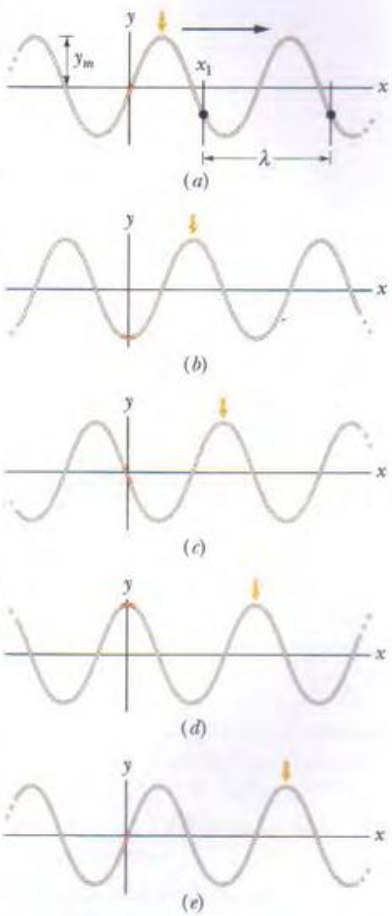



FIG. 16-5 Cinco "instantâneos" de uma onda em uma corda se propagando no sentido positivo de um eixo $x$. A amplitude $y_m$ está indicada. Um comprimento de onda $\lambda$ típico, medido a partir de uma posição arbitrária $x_1$, também está indicado.

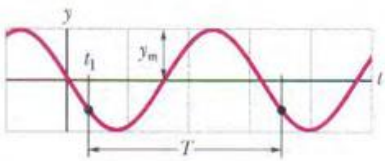



FIG. 16-6 Gráfico do deslocamento do elemento da corda situado em $x = 0$ em função do tempo, quando a onda senoidal da Fig. 16-5 passa pelo elemento. A amplitude $y_m$ está indicada. Um período $T$ típico, medido a partir de um tempo arbitrário $t_1$, também está indicado.

Observe que a onda na Fig. 16-5 se move para a direita de $\lambda/4$ de um instantâneo para o seguinte. Assim, no quinto instantâneo ela se moveu para a direita de $1\lambda$.

## Período, Freqüência Angular e Freqüência

A Fig. 16-6 mostra um gráfico do deslocamento $y$ da Eq. 16-2 em função do tempo $t$ em uma certa posição na corda, tomada como sendo $x = 0$. Observando a corda de perto veríamos que o elemento da corda que está nessa posição se move para cima e para baixo em um movimento harmônico simples dado pela Eq. 16-2 com $x = 0$:

$$y(0,t) = y_m \operatorname{sen}(-\omega t)$$
$$= -y_m \operatorname{sen} \omega t \quad (x = 0) \tag{16-6}$$

onde fizemos uso do fato de que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ para qualquer valor de $\alpha$. A Fig. 16-6 é um gráfico dessa equação; ele *não mostra* a forma da onda.

Definimos o **período** $T$ de oscilação de uma onda como o tempo que um elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa. Um período típico está indicado no gráfico da Fig. 16-6. Aplicando a Eq. 16-6 às extremidades desse intervalo de tempo e igualando os resultados, obtemos:

$$-y_m \operatorname{sen} \omega t_1 = -y_m \operatorname{sen} \omega(t_1 + T)$$
$$= -y_m \operatorname{sen}(\omega t_1 + \omega T). \tag{16-7}$$

Esta equação é satisfeita apenas se $\omega T = 2\pi$, ou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(freqüência angular)}. \tag{16-8}$$

O parâmetro $\omega$ é chamado de **freqüência angular** da onda; sua unidade no SI é o radiano por segundo.

Observe novamente os cinco instantâneos de uma onda progressiva da Fig. 16-5. O intervalo de tempo entre os instantâneos é $T/4$. Assim, no quinto instantâneo todos os elementos da corda realizaram uma oscilação completa.

A **freqüência** $f$ de uma onda é definida como $1/T$ e está relacionada à freqüência angular $\omega$ através da equação

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(freqüência)}. \tag{16-9}$$

Do mesmo modo que a freqüência do oscilador harmônico simples do Capítulo 15, a freqüência $f$ é o número de oscilações por unidade de tempo; nesse caso, o número de oscilações realizadas por um elemento da corda. Como no Capítulo 15, $f$ é medida em hertz ou seus múltiplos, como, por exemplo, o quilohertz.

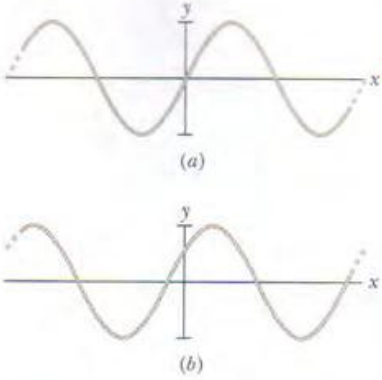
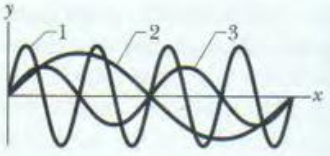



FIG. 16-7 Uma onda progressiva senoidal no instante $t = 0$ com uma constante de fase $\phi$ de (a) 0 e (b) $\pi/5$ rad.

✓ **TESTE 1** A figura é a superposição dos instantâneos de três ondas progressivas que se propagam em cordas diferentes. As fases das ondas são dadas por (a) $2x - 4t$, (b) $4x - 8t$ e (c) $8x - 16t$. Que fase corresponde a que onda na figura?




## Constante de Fase

Quando uma onda progressiva senoidal é expressa pela função de onda da Eq. 16-2, a onda nas proximidades de $x = 0$ se parece com a da Fig. 16-7*a* para $t = 0$. Note que, em $x = 0$ o deslocamento é $y = 0$ e a inclinação tem o valor máximo positivo. Podemos generalizar a Eq. 16-2 introduzindo uma **constante de fase** $\phi$ na função de onda:

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-10}$$

O valor de $\phi$ pode ser escolhido de tal forma que a função forneça outro deslocamento e inclinação em $x = 0$ para $t = 0$. Assim, por exemplo, a escolha de $\phi = \pi/5$ rad fornece o deslocamento e a inclinação mostrados na Fig. 16-7*b* para $t = 0$. A onda ainda é senoidal com os mesmos valores de $y_m$, $k$ e $\omega$, mas agora está deslocada em relação à onda da Fig. 16-7*a* (para a qual $\phi = 0$).

## 16-5 | A Velocidade de uma Onda Progressiva

A Fig. 16-8 mostra dois instantâneos da onda da Eq. 16-2, separados por um pequeno intervalo de tempo $\Delta t$. A onda está se propagando no sentido positivo de $x$ (para a direita na Fig. 16-8), com toda forma de onda se deslocando de uma distância $\Delta x$ nessa direção durante o intervalo $\Delta t$. A razão $\Delta x/\Delta t$ (ou, no limite diferencial, $dx/dt$) é a **velocidade** $v$ da onda. Como podemos calcular seu valor?

Quando a onda da Fig. 16-8 se move cada ponto da forma de onda, como o ponto $A$ assinalado em um dos picos, conserva seu deslocamento $y$. (Os pontos da corda não conservam seus deslocamentos, mas o mesmo não se aplica aos pontos da *forma de onda.*) Se o ponto $A$ conserva seu deslocamento quando se move a fase da Eq. 16-2, que determina esse deslocamento, deve permanecer constante:

$$kx - \omega t = \text{constante}. \tag{16-11}$$

Observe que, embora este argumento seja constante, tanto $x$ quanto $t$ estão variando. Na verdade, quando $t$ aumenta $x$ deve aumentar também, para que o argumento permaneça constante. Isso confirma o fato de que a forma de onda se move no sentido positivo de $x$.

Para determinar a velocidade $v$ da onda derivamos a Eq. 16-11 em relação ao tempo, obtendo

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \tag{16-12}$$

Usando a Eq. 16-5 ($k = 2\pi/\lambda$) e a Eq. 16-8 ($\omega = 2\pi/T$) podemos escrever a velocidade da onda na forma

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \text{(velocidade da onda)}. \tag{16-13}$$

A equação $v = \lambda/T$ nos diz que a velocidade da onda é igual a um comprimento de onda por período; a onda se desloca de uma distância igual a um comprimento de onda em um período de oscilação.

A Eq. 16-2 descreve uma onda que se propaga no sentido positivo de $x$. Podemos obter a equação de uma onda que se propaga no sentido oposto substituindo $t$ na Eq. 16-2 por $-t$. Isso corresponde à condição

$$kx + \omega t = \text{constante}, \tag{16-14}$$

que (compare com a Eq. 16-11) requer que $x$ *diminua* com o tempo. Assim, uma onda que se propaga no sentido negativo de $x$ é descrita pela equação

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{16-15}$$

Analisando a onda da Eq. 16-15, como fizemos para a onda da Eq. 16-2, descobrimos que sua velocidade é dada por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \tag{16-16}$$

O sinal negativo (compare com a Eq. 16-12) confirma que a onda está se propagando no sentido negativo de $x$ e justifica a troca do sinal da variável tempo.

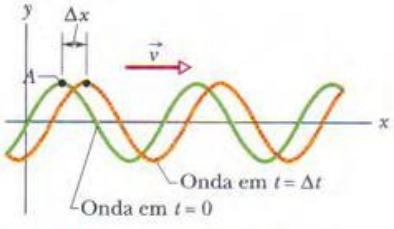



FIG. 16-8 Dois instantâneos da onda da Fig. 16-5, nos instantes $t = 0$ e $t = \Delta t$. Quando a onda se move para a direita com velocidade $\vec{v}$ a curva inteira se desloca de uma distância $\Delta x$ durante um intervalo de tempo $\Delta t$. O ponto $A$ "viaja" com a forma da onda, mas os elementos da corda se deslocam apenas para cima e para baixo.

Considere agora uma onda de forma arbitrária, dada por

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t), \tag{16-17}$$

onde $h$ representa *qualquer* função, sendo a função seno apenas uma das possibilidades. Nossa análise anterior mostra que todas as ondas nas quais as variáveis $x$ e $t$ aparecem em uma combinação da forma $kx \pm \omega t$ são ondas progressivas. Além disso, todas as ondas progressivas *devem ser* da forma da Eq. 16-17. Assim, $y(x,t) = \sqrt{ax+bt}$ representa uma possível (se bem que, fisicamente um pouco estranha) onda progressiva. A função $y(x,t) = \text{sen}(ax^2 - bt)$, por outro lado, *não representa* uma onda progressiva.

**TESTE 2** São dadas as equações de três ondas:
(1) $y(x,t) = 2\,\text{sen}(4x - 2t)$, (2) $y(x,t) = \text{sen}(3x - 4t)$, (3) $y(x,t) = 2\,\text{sen}\,(3x - 3t)$. Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade e (b) com a velocidade máxima na direção perpendicular à direção de propagação da onda (velocidade transversal), em ordem decrescente.

## Exemplo 16-2

Uma onda que se propaga em uma corda é descrita pela equação

$$y(x,t) = 0{,}00327\,\text{sen}\,(72{,}1x - 2{,}72t), \tag{16-18}$$

onde as constantes numéricas estão em unidades do SI (0,00327 m, 72,1 rad/m e 2,72 rad/s).

(a) Qual é a amplitude da onda?

**IDÉIA-CHAVE** A Eq. 16-18 é da mesma forma que a Eq. 16-2,

$$y = y_m\,\text{sen}\,(kx - \omega t), \tag{16-19}$$

e, portanto, temos uma onda senoidal. Comparando as duas equações, podemos determinar a amplitude.

***Cálculo:*** Vemos que

$$y_m = 0{,}00327\text{ m} = 3{,}27\text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais são o comprimento de onda, o período e a freqüência da onda?

***Cálculos:*** Comparando as Eqs. 16-18 e 16-19 vemos que o número de onda e a freqüência angular são

$$k = 72{,}1\text{ rad/m} \quad \text{e} \quad \omega = 2{,}72\text{ rad/s}.$$

A relação entre $\lambda$ e $k$ é dada pela Eq. 16-5:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\text{ rad}}{72{,}1\text{ rad/m}}$$

$$= 0{,}0871\text{ m} = 8{,}71\text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A relação entre $T$ e $\omega$ é dada pela Eq. 16-8:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\text{ rad}}{2{,}72\text{ rad/s}} = 2{,}31\text{ s}, \qquad \text{(Resposta)}$$

e, de acordo com a Eq. 16-9, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}31\text{ s}} = 0{,}433\text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade da onda?

***Cálculo:*** A velocidade da onda é dada pela Eq. 16-13:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2{,}72\text{ rad/s}}{72{,}1\text{ rad/m}} = 0{,}0377\text{ m/s}$$

$$= 3{,}77\text{ cm/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como a fase da Eq. 16-18 contém a variável posição $x$, a onda está se propagando ao longo do eixo $x$. Além disso, como a equação da onda está escrita na forma da Eq. 16-2, o sinal *negativo* na frente do termo $\omega t$ mostra que a onda está se propagando no sentido *positivo* do eixo $x$. (Observe que as grandezas calculadas nos itens (b) e (c) não dependem da amplitude da onda.)

(d) Qual é o deslocamento $y$ para $x = 22{,}5$ cm e $t = 18{,}9$ s?

***Cálculo:*** A Eq. 16-18 fornece o deslocamento em função da posição $x$ e do tempo $t$. Substituindo os valores dados na equação, temos:

$$y = 0{,}00327\,\text{sen}\,(72{,}1 \times 0{,}225 - 2{,}72 \times 18{,}9)$$
$$= (0{,}00327\text{ m})\,\text{sen}\,(-35{,}1855\text{ rad})$$
$$= (0{,}00327\text{ m})\,(0{,}588)$$
$$= 0{,}00192\text{ m} = 1{,}92\text{ mm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o deslocamento é positivo. (Não esqueça de mudar o modo da calculadora para radianos antes de calcular o seno.)

## Exemplo 16-3

No Exemplo 16-2*d* mostramos que em $t = 18{,}9$ s o deslocamento transversal $y$ do elemento da corda situado em $x = 0{,}255$ m provocado pela onda da Eq. 16-18 é 1,92 mm.

(a) Qual é a velocidade transversal $u$ desse elemento da corda nesse instante $t$? (Essa velocidade, associada à oscilação transversal de um elemento da corda, é uma velocidade na direção $y$ que varia com o tempo e não deve ser confundida com $v$, a velocidade constante com a qual a *forma da onda* se propaga na direção $x$.)

**IDÉIAS-CHAVE** A velocidade transversal $u$ é a taxa de variação com o tempo do deslocamento $y$ de um elemento da corda. Esse deslocamento é dado por

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (16\text{-}20)$$

Para um elemento em certa posição $x$ podemos calcular a taxa de variação de $y$ derivando a Eq. 16-20 em relação a $t$, mantendo $x$ constante. Uma derivada calculada enquanto uma (ou mais) das variáveis é tratada como constante é chamada de *derivada parcial* e é representada pelo símbolo $\partial/\partial x$, em vez de $d/dx$.

***Cálculos:*** Temos:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \qquad (16\text{-}21)$$

Substituindo os valores numéricos do Exemplo 16-2, obtemos

$$u = (-2{,}72 \text{ rad/s})(3{,}27 \text{ mm}) \cos(-35{,}1855 \text{ rad})$$
$$= 7{,}20 \text{ mm/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s o elemento da corda situado em $x = 22{,}5$ cm está se movendo no sentido positivo de $y$ com uma velocidade de 7,20 mm/s.

(b) Qual é a aceleração transversal $a_y$ do mesmo elemento nesse instante?

**IDÉIA-CHAVE** A aceleração transversal $a_y$ é a taxa com a qual a velocidade transversal do elemento está variando.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 16-21, tratando novamente $x$ como uma constante, mas permitindo que $t$ varie, obtemos

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Comparando este resultado com a Eq. 16-20 vemos que

$$a_y = -\omega^2 y.$$

A aceleração transversal de um elemento de uma corda é, portanto, proporcional ao deslocamento transversal com o sinal contrário. Isso está de acordo com fato de que o elemento está se movendo transversalmente em um movimento harmônico simples. Substituindo os valores numéricos, obtemos

$$a_y = -(2{,}72 \text{ rad/s})^2(1{,}92 \text{ mm})$$
$$= -14{,}2 \text{ mm/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s o elemento da corda em $x = 22{,}5$ cm está deslocado de 1,92 mm em relação à posição de equilíbrio no sentido positivo de $y$ e possui uma aceleração de módulo 14,2 mm/s² no sentido negativo de $y$.

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 1: Cálculo de Funções Trigonométricas para Fases Muito Grandes*** Às vezes, como nos Exemplos 16-2*d* e 16-3, um ângulo muito maior que $2\pi$ rad (ou 360°) aparece no problema e precisamos calcular o seno ou co-seno desse ângulo. Somar ou subtrair um múltiplo inteiro de $2\pi$ rad ou 360° a um ângulo não muda o valor de nenhuma função trigonométrica. Assim, no Exemplo 16-2*d* devemos calcular o seno de −35,1855 rad. Somando (6)($2\pi$ rad) a este ângulo, obtemos

$$-35{,}1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2{,}51361 \text{ rad},$$

que é um ângulo menor do que $2\pi$ rad com as mesmas funções trigonométricas que −35,1855 rad (Fig. 16-9). Por exemplo, o seno tanto de 2,51361 rad como de −35,1855 rad é 0,588.

As calculadoras reduzem esses ângulos automaticamente. *Atenção:* não arredonde ângulos grandes se pretende calcular o seno ou o co-seno. Ao calcular o seno de um ângulo muito grande, *jogamos fora a maior parte do ângulo e calculamos o seno do que sobrou.* Se, por exemplo, arredondarmos −35,1855 rad para −35 rad (uma variação de 0,5%, que normalmente constitui uma aproximação razoável), estaremos mudando o valor do seno do ângulo em 27%. *Além disso, ao converter um ângulo grande de graus para radianos assegure-se de que está usando um fator de* conversão exato (como 180° = $\pi$ rad) em vez de um fator aproximado (como 57,3° ≈ 1 rad).

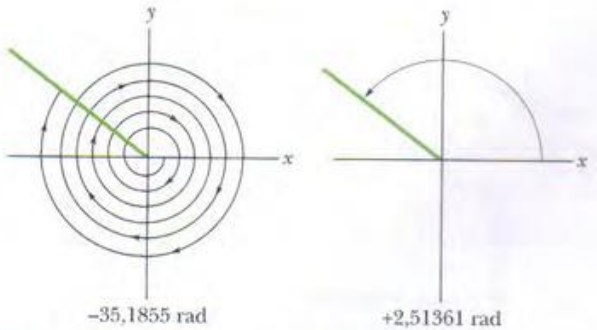



FIG. 16-9 Estes dois ângulos são diferentes, mas todas as suas funções trigonométricas são iguais.

## 16-6 | Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

A velocidade de uma onda está relacionada ao comprimento de onda e à freqüência através da Eq. 16-13, mas *é determinada pelas propriedades do meio*. Se uma onda se propaga em um meio como a água, o ar, o aço ou uma corda esticada, isso faz com que as partículas do meio oscilem quando ela passa. Para que isso aconteça o meio deve possuir massa (para que possa haver energia cinética) e elasticidade (para que possa haver energia potencial). Assim, as propriedades de massa e de elasticidade determinam a velocidade com a qual a onda pode se propagar no meio. Logo, é possível calcular a velocidade da onda em um meio partir dessas propriedades. Vamos fazer isso agora, de duas formas, para uma corda esticada.

### Análise Dimensional

Na análise dimensional examinamos as dimensões de todas as grandezas físicas que influenciam uma dada situação para determinar as grandezas resultantes. Neste caso examinamos a massa e a elasticidade para determinar a velocidade $v$, que tem a dimensão de comprimento dividido por tempo, ou $LT^{-1}$.

No caso da massa usamos a massa de um elemento da corda, que é a massa total $m$ da corda dividida pelo comprimento $l$. Chamamos essa razão de *massa específica linear* $\mu$ da corda. Assim, $\mu = m/l$, e sua dimensão é massa dividida por comprimento, $ML^{-1}$.

Não podemos fazer uma onda se propagar em uma corda a menos que a corda esteja sob tensão, o que significa que foi alongada e mantida alongada por forças aplicadas a suas duas extremidades. A tensão $\tau$ da corda é igual ao módulo comum dessas duas forças. Quando uma onda se propaga ao longo da corda ela desloca elementos da corda e provoca um alongamento adicional, com seções vizinhas da corda exercendo forças umas sobre as outras por causa da tensão. Assim, podemos associar a tensão da corda ao alongamento (elasticidade) da corda. A tensão e as forças de alongamento que ela produz possuem a dimensão de uma força, ou seja, $MLT^{-2}$ (de $F = ma$).

Precisamos combinar $\mu$ (dimensão $ML^{-1}$) e $\tau$ (dimensão $MLT^{-2}$) para obter $v$ (dimensão $LT^{-1}$). O estudo de várias combinações possíveis sugere que

$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{16-22}$$

onde $C$ é uma constante adimensional que não pode ser determinada através de análise dimensional. Em nosso segundo método para determinar a velocidade da onda vamos ver que a Eq. 16-22 está correta e que $C = 1$.

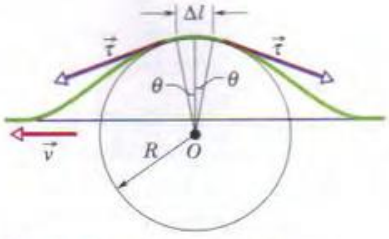



FIG. 16-10 Um pulso simétrico, visto a partir de um referencial no qual o pulso está estacionário e a corda parece se mover da direita para a esquerda com velocidade $v$. Podemos determinar a velocidade $v$ aplicando a segunda lei de Newton a um elemento da corda de comprimento $\Delta l$, situado no alto do pulso.

### Demonstração Usando a Segunda Lei de Newton

Em vez da onda senoidal da Fig. 16-1*b*, vamos considerar um único pulso simétrico como o da Fig. 16-10, propagando-se em uma corda da esquerda para a direita com velocidade $v$. Por conveniência, escolhemos um referencial no qual o pulso permanece estacionário, ou seja, nos movemos juntamente com o pulso, mantendo-o sob observação. Nesse referencial a corda parece passar por nós, movendo-se da direita para a esquerda na Fig. 16-10, com velocidade $v$.

Considere um pequeno elemento da corda de comprimento $\Delta l$ na região do pulso, um elemento que forma um arco de círculo de raio $R$ e subtende um ângulo $2\theta$ no centro desse círculo. Uma força $\vec{\tau}$ de um módulo igual à tensão da corda puxa tangencialmente este elemento nas duas extremidades. As componentes horizontais dessas forças se cancelam, mas as componentes verticais se somam para produzir uma força restauradora radial $\vec{F}$. Em módulo,

$$F = 2(\tau \operatorname{sen}\theta) \approx \tau(2\theta) = \tau\frac{\Delta l}{R} \qquad \text{(força)}, \tag{16-23}$$

onde aproximamos sen $\theta$ por $\theta$ para pequenos ângulos $\theta$ na Fig. 16-10. Com base nessa figura usamos também a relação $2\theta = \Delta l/R$. A massa do elemento é dada por

$$\Delta m = \mu \Delta l \qquad \text{(massa)}, \tag{16-24}$$

onde $\mu$ é a massa específica linear da corda.

No momento mostrado na Fig. 16-10 o elemento de corda $\Delta l$ está se movendo em um arco de círculo. Assim, ele possui uma aceleração em direção ao centro do círculo dada por

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(aceleração)}. \tag{16-25}$$

As Eqs. 16-23, 16-24 e 16-25 contêm os elementos da segunda lei de Newton. Combinando-os na forma

$$\text{força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

temos

$$\frac{\tau \Delta l}{R} = (\mu \Delta l)\frac{v^2}{R}.$$

Explicitando a velocidade $v$ nesta equação, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad \text{(velocidade)}, \tag{16-26}$$

em perfeito acordo com a Eq. 16-22 se a constante $C$, nesta equação, tiver valor unitário. A Eq. 16-26 fornece a velocidade do pulso da Fig. 16-10 e a velocidade de *qualquer* outra onda na mesma corda e sob a mesma tensão.

A Eq. 16-26 nos diz o seguinte:

A velocidade de uma onda em uma corda ideal esticada depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda, e não da freqüência da onda.

A *freqüência* da onda é fixada inteiramente pela força que a produz (por exemplo, a força aplicada pela pessoa da Fig. 16-1*b*). O *comprimento de onda* da onda é dado pela Eq. 16-13 na forma $\lambda = v/f$.

**TESTE 3** Você produz uma onda progressiva em uma certa corda fazendo oscilar uma das extremidades. Se você aumentar a freqüência das oscilações, (a) a velocidade e (b) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais? Se, em vez disso, você aumentar a tensão na corda, (c) a velocidade e (d) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais?

## Exemplo 16-4

Na Fig. 16-11 duas cordas foram amarradas uma na outra com um nó e esticadas entre dois suportes rígidos. As cordas têm massas específicas lineares $\mu_1 = 1{,}4 \times 10^{-4}$ kg/m e $\mu_2 = 2{,}8 \times 10^{-4}$ kg/m. Os comprimentos são $L_1 = 3{,}0$ m e $L_2 = 2{,}0$ m, e a corda 1 está submetida a uma tensão de 400 N. Dois pulsos são enviados simultaneamente em direção ao nó a partir dos suportes. Qual dos pulsos chega primeiro ao nó?

FIG. 16-11 Duas cordas, de comprimentos $L_1$ e $L_2$, emendadas com um nó e esticadas entre dois suportes rígidos.

**IDÉIAS-CHAVE**

1. O tempo $t$ que um pulso leva para percorrer uma distância $L$ é $t = L/v$, onde $v$ é a velocidade do pulso.
2. A velocidade de um pulso em uma corda esticada depende da tensão $\tau$ e da massa específica linear $\mu$ da corda, e é dada pela Eq. 16-26 ($v = \sqrt{\tau/\mu}$).
3. Como as duas cordas foram esticadas juntas, estão submetidas à mesma tensão $\tau$ (= 400 N).

***Cálculos:*** Juntando essas três idéias obtemos, para o tempo que o pulso da corda 1 leva para atingir o nó,

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = L_1\sqrt{\frac{\mu_1}{\tau}} = (3{,}0\text{ m})\sqrt{\frac{1{,}4\times10^{-4}\text{ kg/m}}{400\text{ N}}}$$

$$= 1{,}77\times10^{-3}\text{ s}.$$

Da mesma forma, os dados para o pulso da corda 2 nos fornecem

$$t_2 = L_2\sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = 1{,}67\times10^{-3}\text{ s}.$$

Assim, o pulso da corda 2 chega primeiro ao nó.

Vamos voltar à segunda idéia-chave. Como a massa específica linear da corda 2 é maior que a da corda 1, a velocidade do pulso na corda 2 é menor que na corda 1. Poderíamos ter antecipado a resposta a partir deste fato? Não, já que, de acordo com a primeira idéia-chave, a distância percorrida pelo pulso também influencia o resultado.

## 16-7 | Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Quando produzimos uma onda em uma corda esticada fornecemos energia para que a corda se mova. Quando a onda se afasta de nós transporta essa energia como energia cinética e como energia potencial elástica. Vamos examinar essas duas formas, uma de cada vez.

### Energia Cinética

Um elemento da corda de massa $dm$, oscilando transversalmente em um movimento harmônico simples enquanto a onda passa por ele, possui energia cinética associada a sua velocidade transversal $\vec{u}$. Quando o elemento está passando pela posição $y = 0$ (o elemento $b$ da Fig. 16-12), sua velocidade transversal (e, portanto, sua energia cinética) é máxima. Quando o elemento está na sua posição extrema $y = y_m$ (como o elemento $a$), sua velocidade transversal (e, portanto, sua energia cinética) é nula.

### Energia Potencial Elástica

Para produzir uma onda senoidal em uma corda inicialmente reta a onda deve necessariamente deformar a corda. Quando um elemento da corda de comprimento $dx$ oscila transversalmente seu comprimento aumenta e diminui periodicamente para assumir a forma da onda senoidal. Como no caso de uma mola, a energia potencial elástica está associada a essas variações de comprimento.

Quando o elemento da corda está na posição $y = y_m$ (elemento $a$ da Fig. 16-12), seu comprimento possui o valor de repouso $dx$ e, portanto, a energia potencial elástica é nula. Por outro lado, quando o elemento está passando pela posição $y = 0$ possui alongamento máximo e, portanto, energia potencial elástica máxima.

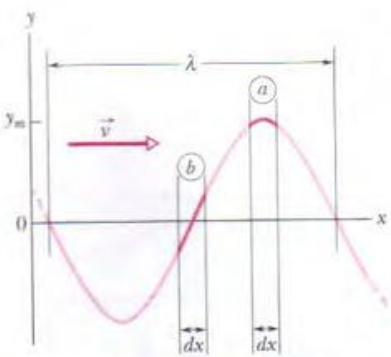



FIG. 16-12 Instantâneo de uma onda progressiva em uma corda no instante $t = 0$. O elemento $a$ da corda está sofrendo um deslocamento $y = y_m$ e o elemento $b$ está sofrendo um deslocamento $y = 0$. A energia cinética do elemento da corda em cada posição depende da velocidade transversal do elemento. A energia potencial depende de quanto o elemento da corda é alongado quando a onda passa por ele.

### Transporte de Energia

Os elementos da corda possuem, portanto, energia cinética máxima e energia potencial máxima em $y = 0$. No instantâneo da Fig. 16-12 as regiões da corda com deslocamento máximo não possuem energia e as regiões com deslocamento nulo possuem energia máxima. Quando a onda se propaga ao longo da corda as forças associadas à tensão da corda realizam trabalho continuamente para transferir energia das regiões com energia para as regiões sem energia.

Suponha que produzimos uma onda em uma corda esticada ao longo de um eixo $x$ horizontal tal que a Eq. 16-2 descreva o deslocamento da corda. Podemos produzir essa onda ao longo da corda fazendo uma de suas extremidade oscilar continuamente, como na Fig. 16-1*b*. Ao fazermos isso fornecemos energia para o movimento e o alongamento da corda; quando as partes da corda oscilam perpendicularmente ao eixo $x$ possuem energia cinética e energia potencial elástica. Quando a onda passa por partes da corda que estavam anteriormente em repouso a energia é transferida para essas partes. Assim, dizemos que a onda *transporta* energia ao longo da corda.

## A Taxa de Transmissão de Energia

A energia cinética $dK$ associada a um elemento da corda de massa $dm$ é dada por

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, u^2, \tag{16-27}$$

onde $u$ é a velocidade transversal do elemento da corda. Para determinar $u$ derivamos a Eq. 16-2 em relação ao tempo, mantendo $x$ constante:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \tag{16-28}$$

Usando essa relação e fazendo $dm = \mu\, dx$, a Eq. 16-27 se torna

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\, dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-29}$$

Dividindo a Eq. 16-29 por $dt$ obtemos a taxa com a qual a energia cinética passa por um elemento da corda e, portanto, a taxa com a qual a energia cinética é transportada pela onda. Como a razão $dx/dt$ que aparece do lado direito da Eq. 16-29 é a velocidade $v$ da onda, temos:

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-30}$$

A taxa *média* com a qual a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \left[\cos^2(kx - \omega t)\right]_{\text{méd}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\mu v\omega^2 y_m^2. \tag{16-31}$$

Aqui calculamos a média para um número inteiro de comprimentos de onda e usamos o fato de que o valor médio do quadrado de uma função co-seno para um número inteiro de períodos é 1/2.

A energia potencial elástica também é transportada pela onda, com a mesma taxa média dada pela Eq. 16-31. Não vamos apresentar a demonstração, mas apenas lembrar que em um sistema oscilatório, como um pêndulo ou um sistema bloco-mola, a energia cinética média e a energia potencial média são iguais.

A **potência média**, que é a taxa média com a qual as duas formas de energia são transmitidas pela onda, é, portanto,

$$P_{\text{méd}} = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} \tag{16-32}$$

ou, de acordo com a Eq. 16-31,

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \quad \text{(potência média)}. \tag{16-33}$$

Os fatores $\mu$ e $v$ nesta equação dependem do material e da tensão da corda. Os fatores $\omega$ e $y_m$ dependem do processo usado para produzir a onda. A proporcionalidade entre a potência média de uma onda e o quadrado da amplitude e também da freqüência angular é um resultado geral, válido para ondas de todos os tipos.

### Exemplo 16-5

Uma corda tem uma massa específica $\mu = 525$ g/m e uma tensão $\tau = 45$ N. Uma onda senoidal de freqüência $f = 120$ Hz e amplitude $y_m = 8{,}5$ mm é produzida na corda. Com que taxa média a onda transporta energia?

**IDÉIA-CHAVE** A taxa média de transporte de energia é a potência média $P_{\text{méd}}$, dada pela Eq. 16-33.

***Cálculos:*** Para usar a Eq. 16-33 precisamos conhecer a freqüência angular $\omega$ e a velocidade $v$ da onda. De acordo com a Eq. 16-9,

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(120\text{ Hz}) = 754\text{ rad/s}.$$

De acordo com a Eq. 16-26, temos:

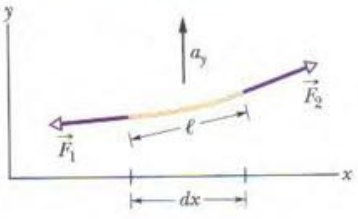
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{45\text{ N}}{0{,}525\text{ kg/m}}} = 9{,}26\text{ m/s}.$$

Nesse caso, a Eq. 16-33 nos dá

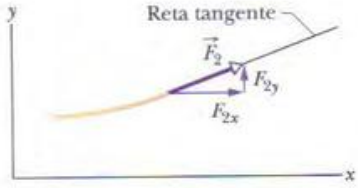
$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2$$

$$= (\tfrac{1}{2})(0{,}525\text{ kg/m})(9{,}26\text{ m/s})(754\text{ rad/s})^2(0{,}0085\text{ m})^2$$

$$\approx 100\text{ W}. \quad \text{(Resposta)}$$




(a)




(b)

FIG. 16-13 (*a*) Um elemento da corda quando uma onda senoidal transversal se propaga em uma corda esticada. As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agem nas extremidades esquerda e direita, produzindo uma aceleração $\vec{a}$ com uma componente vertical $a_y$. (*b*) A força na extremidade direita do elemento está dirigida ao longo de uma reta tangente ao lado direito do elemento.

## 16-8 | A Equação de Onda

Quando uma onda passa por um elemento de uma corda esticada o elemento se move perpendicularmente à direção de propagação da onda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento do elemento podemos obter uma equação diferencial geral, chamada *equação de onda*, que governa a propagação de ondas de qualquer tipo.

A Fig. 16-13*a* mostra um instantâneo de um elemento de corda de massa $dm$ e comprimento $\ell$ quando uma onda se propaga em uma corda de massa específica $\mu$ que está esticada ao longo de um eixo $x$ horizontal. Vamos supor que a amplitude da onda é tão pequena que o elemento sofre apenas uma leve inclinação em relação ao eixo $x$ quando a onda passa por ele. A força $\vec{F}_2$ que age sobre a extremidade direita do elemento possui um módulo igual à tensão $\tau$ na corda e aponta ligeiramente para cima. A força $\vec{F}_1$ que age sobre a extremidade esquerda do elemento também possui módulo igual à tensão $\tau$, mas aponta ligeiramente para baixo. Devido à curvatura do elemento a resultante das forças é diferente de zero e produz no elemento uma aceleração $a_y$ para cima. A aplicação da segunda lei de Newton às componentes $y$ ($F_{\text{res},y} = ma_y$) nos dá

$$F_{2y} - F_{1y} = dm\, a_y. \tag{16-34}$$

Vamos analisar esta equação por partes.

*Massa.* A massa $dm$ do elemento pode ser escrita em termos da massa específica $\mu$ da corda e do comprimento $\ell$ do elemento como $dm = \mu\ell$. Como a inclinação do elemento é pequena, $\ell \approx dx$ (Fig. 16-13*a*) e temos, aproximadamente,

$$dm = \mu\, dx. \tag{16-35}$$

*Aceleração.* A aceleração $a_y$ da Eq. 16-34 é a derivada segunda do deslocamento $y$ em relação ao tempo:

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-36}$$

*Forças.* A Fig. 16-13*b* mostra que $\vec{F}_2$ é tangente à corda na extremidade direita do elemento; assim, podemos relacionar as componentes da força à inclinação $S_2$ de extremidade direita da corda:

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = S_2. \tag{16-37}$$

Podemos também relacionar as componentes ao módulo $F_2$ ($= \tau$):

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

ou

$$\tau = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}. \tag{16-38}$$

Entretanto, como estamos supondo que a inclinação do elemento é pequena, $F_{2y} \ll F_{2x}$ e a Eq. 16-38 se torna

$$\tau = F_{2x}. \tag{16-39}$$

Substituindo na Eq. 16-37 e explicitando $F_{2y}$, temos:

$$F_{2y} = \tau S_2. \tag{16-40}$$

Uma análise semelhante para a extremidade esquerda do elemento da corda nos dá

$$F_{1y} = \tau S_1. \tag{16-41}$$

Podemos agora substituir as Eqs. 16-35, 16-36, 16-40 e 16-41 na Eq. 16-34 para obter

$$\tau S_2 - \tau S_1 = (\mu\, dx)\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-42}$$

Como o elemento de corda é curto, as inclinações $S_2$ e $S_1$ diferem apenas de um valor infinitesimal $dS$, onde $S$ é a inclinação em qualquer ponto:

$$S = \frac{dy}{dx}. \tag{16-43}$$

Substituindo $S_2 - S_1$ na Eq. 16-42 por $dS$ e usando a Eq. 16-43 para substituir $S$ por $dy/dx$, obtemos

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{16-44}$$

Na última passagem mudamos a notação para derivadas parciais porque no lado esquerdo da equação derivamos apenas em relação a $x$ e no lado direito derivamos apenas em relação a $t$. Finalmente, usando a Eq. 16-26 ($v = \sqrt{\tau/\mu}$), obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{(equação de onda).} \tag{16-45}$$

Esta é a equação diferencial geral que governa a propagação de ondas de todos os tipos.

## 16-9 | O Princípio da Superposição de Ondas

Freqüentemente acontece que duas ou mais ondas passam simultaneamente pela mesma região. Quando ouvimos um concerto ao vivo, por exemplo, as ondas sonoras dos vários instrumentos chegam simultaneamente aos nossos ouvidos. Os elétrons presentes nas antenas dos receptores de rádio e televisão são colocados em movimento pelo efeito combinado das ondas eletromagnéticas de muitas estações. A água de um lago ou de um porto pode ser agitada pela marola produzida por muitas embarcações.

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente na mesma corda esticada. Sejam $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda se propagasse sozinha. O deslocamento da corda quando as ondas se propagam ao mesmo tempo é então a soma algébrica

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \tag{16-46}$$

Esta soma de deslocamentos significa que

> Ondas superpostas se somam algebricamente para produzir uma **onda resultante** ou **onda total**.

Este é outro exemplo do **princípio de superposição**, segundo o qual, quando vários efeitos ocorrem simultaneamente o efeito total é a soma dos efeitos individuais.

A Fig. 16-14 mostra uma seqüência de instantâneos de dois pulsos que se propagam em sentidos opostos na mesma corda esticada. Quando os pulsos se superpõem o pulso resultante é a soma dos dois pulsos. Além disso, cada pulso passa pelo outro como se ele não existisse:

> Ondas superpostas não se afetam mutuamente.

UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

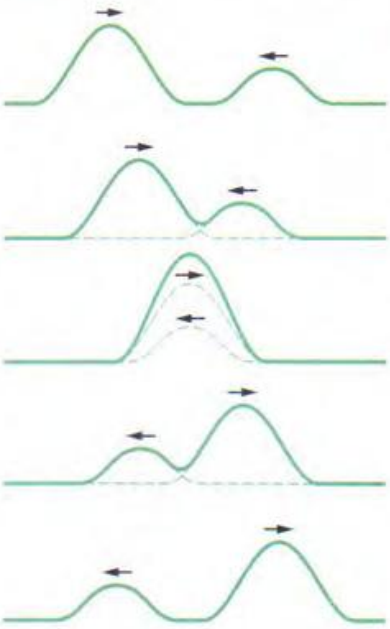


FIG. 16-14 Uma série de instantâneos que mostra dois pulsos se propagando em sentidos opostos em uma corda esticada. O princípio da superposição se aplica quando os pulsos passam um pelo outro.

## 16-10 | Interferência de Ondas

Suponha que produzimos duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e amplitude que se propagam no mesmo sentido em uma corda. O princípio da superposição pode ser usado. Que forma tem a onda resultante?

A forma da onda resultante depende da *fase relativa* das duas ondas. Se as ondas estão exatamente em fase (ou seja, se os picos e os vales de uma estão exatamente alinhados com os da outra), o deslocamento total a cada instante é o dobro do deslocamento que seria produzido por apenas uma das ondas. Se estão totalmente defasadas (ou seja, se os picos de uma estão exatamente alinhados com os vales da outra), elas se cancelam mutuamente e o deslocamento é zero; a corda permanece parada. O fenômeno de combinação de ondas recebe o nome de **interferência,** e dizemos que as ondas **interferem** entre si. (O termo se refere apenas aos deslocamentos; a propagação das ondas não é afetada.)

Suponha que uma das ondas que se propagam em uma corda é dada por

$$y_1(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16-47}$$

e que uma outra, deslocada em relação à primeira, é dada por

$$y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-48}$$

Essas ondas têm a mesma freqüência angular $\omega$ (e, portanto, a mesma freqüência $f$), o mesmo número de onda $k$ (e, portanto, o mesmo comprimento de onda $\lambda$) e a mesma amplitude $y_m$. Ambas se propagam no sentido positivo do eixo $x$, com a mesma velocidade, dada pela Eq. 16-26. Elas diferem apenas de um ângulo constante $\phi$, a constante de fase. Dizemos que essas ondas estão *defasadas* de $\phi$ ou que sua *diferença de fase* é $\phi$.

Segundo o princípio de superposição (Eq. 16-46), a onda resultante é a soma algébrica das duas ondas e tem um deslocamento

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \end{aligned} \tag{16-49}$$

De acordo com o Apêndice E, a soma dos senos de dois ângulos $\alpha$ e $\beta$ obedece à identidade

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \tag{16-50}$$

Aplicando esta relação à Eq. 16-49, obtemos

$$y'(x,t) = [2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \tag{16-51}$$

Como mostra a Fig. 16-15, a onda resultante também é uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de $x$. Ela é a única onda que se pode ver na corda (as ondas dadas pelas Eqs. 16-47 e 16-48 *não podem* ser vistas).

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e comprimento de onda se propagam no *mesmo* sentido em uma corda, elas interferem para produzir uma onda resultante senoidal que se propaga nesse sentido.

$$\overbrace{y'(x,t)}^{\text{Deslocamento}} = \underbrace{|2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi|}_{\substack{\text{Termo de} \\ \text{amplitude}}} \underbrace{\operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi)}_{\substack{\text{Termo} \\ \text{oscilatório}}}$$

FIG. 16-15 A onda resultante da Eq. 16-51, produzida pela interferência de duas ondas transversais senoidais, é também uma onda transversal senoidal, com um fator de amplitude e um fator oscilatório.

A onda resultante difere das ondas individuais em dois aspectos: (1) a constante de fase é $\phi/2$, e (2) a amplitude $y'_m$ é o módulo do fator entre colchetes na Eq. 16-51:

$$y'_m = |2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi| \quad \text{(amplitude)}. \tag{16-52}$$

Se $\phi = 0$ rad (ou 0°), as duas ondas estão exatamente em fase, como na Fig. 16-16*c*. Nesse caso, a Eq. 16-51 se reduz a

$$y'(x,t) = 2y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (\phi = 0). \tag{16-53}$$

Esta onda resultante está plotada na Fig. 16-16*d*. Observe, tanto na figura como na Eq. 16-53, que a amplitude da onda resultante é duas vezes maior que a amplitude

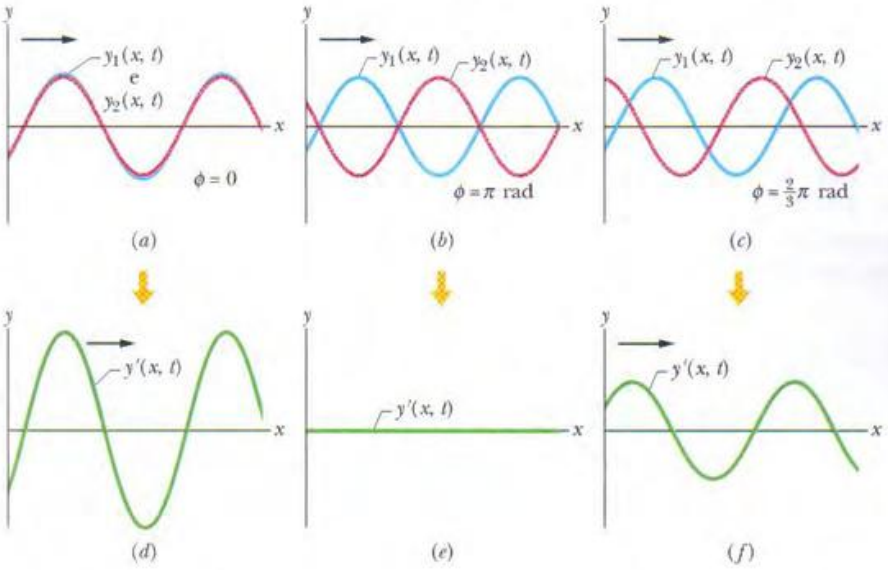



**FIG. 16-16** Duas ondas senoidais iguais, $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo $x$. Elas interferem para produzir uma onda resultante $y'(x, t)$, que é a onda observada na corda. A diferença de fase $\phi$ entre as duas ondas é (*a*) 0 rad ou 0°, (*b*) $\pi$ rad ou 180° e (*c*) $2\pi/3$ rad ou 120°. As ondas resultantes correspondentes são mostradas em (*d*), (*e*) e (*f*).

das ondas individuais. Esta é a maior amplitude que a onda resultante pode ter, já que o valor máximo do termo em co-seno das Eqs. 16-51 e 16-52, que é 1, acontece para $\phi = 0$. A interferência que produz a maior amplitude possível é chamada de *interferência totalmente construtiva*.

Se $\phi = \pi$ rad (ou 180°), as ondas que interferem estão totalmente defasadas, como na Fig. 16-16*b*. Nesse caso, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ e a amplitude da onda resultante, dada pela Eq. 16-52, é nula. Assim, para todos os valores de $x$ e $t$,

$$y'(x, t) = 0 \qquad (\phi = \pi \text{ rad}). \tag{16-54}$$

A onda resultante está plotada na Fig. 16-16*e*. Embora duas ondas estejam se propagando na corda não vemos a corda se mover. Este tipo de interferência é chamado de *interferência totalmente destrutiva*.

Como a forma de uma onda senoidal se repete a cada $2\pi$ rad, uma diferença de fase $\phi = 2\pi$ rad (ou 360°) corresponde a uma defasagem de uma onda em relação à outra equivalente a um comprimento de onda. Assim, as diferenças de fase podem ser descritas tanto em termos de ângulos como em termos de comprimentos de onda. Por exemplo: na Fig. 16-16*b* podemos dizer que as ondas estão defasadas de 0,50 comprimento de onda. A Tabela 16-1 mostra outros exemplos de diferenças de fase e as interferências que produzem. Note que quando uma interferência não é nem totalmente construtiva nem totalmente destrutiva é chamada de *interferência intermediária*. Nesse caso, a amplitude da onda resultante está entre 0 e $2y_m$. De acordo com a Tabela 16-1, por exemplo, se as ondas que interferem têm uma

**TABELA 16-1**

**Diferenças de Fase e Tipos de Interferência**[a]

| Diferença de Fase em | | | Amplitude da Onda | Tipo de Interferência |
|---|---|---|---|---|
| Graus | Radianos | Comprimentos de Onda | | |
| 0 | 0 | 0 | $2y_m$ | Totalmente construtiva |
| 120 | $\frac{2}{3}\pi$ | 0,33 | $y_m$ | Intermediária |
| 180 | $\pi$ | 0,50 | 0 | Totalmente destrutiva |
| 240 | $\frac{4}{3}\pi$ | 0,67 | $y_m$ | Intermediária |
| 360 | $2\pi$ | 1,00 | $2y_m$ | Totalmente construtiva |
| 865 | 15,1 | 2,40 | $0{,}60y_m$ | Intermediária |

[a] A diferença de fase é entre duas ondas de mesma freqüência e mesma amplitude $y_m$ que se propagam no mesmo sentido.

diferença de fase de 120° ($\phi = 2\pi/3$ rad = 0,33 comprimentos de onda), a onda resultante tem uma amplitude $y_m$, igual à amplitude de uma das ondas que interferem (veja Figs. 16-16*c* e *f*).

Duas ondas com o mesmo comprimento de onda estão em fase se sua diferença de fase é nula ou igual a um número inteiro de comprimentos de onda; a parte inteira de qualquer diferença de fase expressa *em comprimentos de onda* pode ser descartada. Assim, por exemplo, uma diferença de 0,40 comprimento de onda é equivalente a uma diferença de 2,40 comprimentos de onda, e o menor dos dois números pode ser usado nos cálculos.

✓ **TESTE 4** São dadas quatro diferenças de fase possíveis entre duas ondas iguais, expressas em comprimentos de onda: 0,20; 0,45; 0,60 e 0,80. Ordene as ondas de acordo com a amplitude da onda resultante, começando pela maior.

## Exemplo 16-6

Duas ondas senoidais iguais, propagando-se no mesmo sentido em uma corda, interferem entre si. A amplitude $y_m$ das ondas é 9,8 mm e a diferença de fase $\phi$ entre elas é 100°.

(a) Qual é a amplitude $y'_m$ da onda resultante e qual é o tipo de interferência?

**IDÉIA-CHAVE** Como se trata de ondas senoidais iguais que se propagam na *mesma direção*, elas interferem para produzir uma onda progressiva senoidal.

***Cálculos:*** Como as duas ondas são iguais, têm *a mesma amplitude*. Assim, a amplitude $y'_m$ da onda resultante é dada pela Eq. 16-52:

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi| = |(2)(9{,}8\text{ mm})\cos(100°/2)|$$
$$= 13\text{ mm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos dizer que a interferência é *intermediária* de duas formas. A diferença de fase está entre 0 e 180° e, portanto, a amplitude $y'_m$ está entre 0 e $2y_m$ (= 19,6 mm).

(b) Que diferença de fase, em radianos e em comprimentos de onda, faz com que a amplitude da onda resultante seja 4,9 mm?

***Cálculos:*** Neste caso, conhecemos $y'_m$ e precisamos determinar o valor de $\phi$. De acordo com a Eq. 16-52,

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi|,$$

e, portanto,

$$4{,}9\text{ mm} = (2)(9{,}8\text{ mm})\cos \tfrac{1}{2}\phi,$$

que nos dá (usando uma calculadora no modo de radianos)

$$\phi = 2\cos^{-1}\frac{4{,}9\text{ mm}}{(2)(9{,}8\text{ mm})}$$
$$= \pm 2{,}636\text{ rad} \approx \pm 2{,}6\text{ rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Existem duas soluções, porque podemos obter a mesma onda resultante supondo que a primeira onda está *adiantada* (à frente) ou *atrasada* (atrás) na segunda onda. A diferença correspondente em comprimentos de onda é

$$\frac{\phi}{2\pi\text{ rad/comprimento de onda}}$$
$$= \frac{\pm 2{,}636\text{ rad}}{2\pi\text{ rad/comprimento de onda}}$$
$$= \pm 0{,}42\text{ comprimento de onda}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## 16-11 | Fasores

Podemos representar uma onda em uma corda (ou qualquer outro tipo de onda) através de um **fasor**. Um fasor é um vetor de módulo igual à amplitude da onda, que gira em torno da origem com velocidade angular igual à freqüência angular $\omega$ da onda. Assim, por exemplo, a onda

$$y_1(x,t) = y_{m1}\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad (16\text{-}55)$$

é representada pelo fasor da Fig. 16-17*a*. O módulo do fasor é a amplitude $y_{m1}$ da onda. Quando o fasor gira em torno da origem com freqüência angular $\omega$ sua

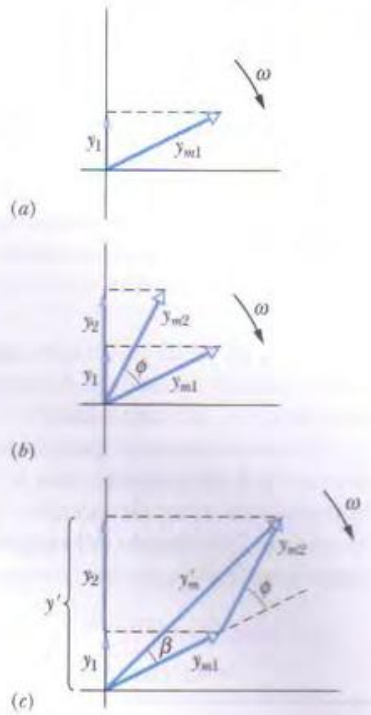



**FIG. 16-17** (*a*) Um fasor de módulo $y_{m1}$ girando em torno de uma origem com velocidade angular $\omega$ representa uma onda senoidal. A projeção $y_1$ do fasor no eixo vertical representa o deslocamento de um ponto pelo qual a onda passa. (*b*) Um segundo fasor, também de velocidade angular $\omega$, mas de módulo $y_{m2}$ e girando com um ângulo $\phi$ constante de diferença em relação ao primeiro fasor, representa uma segunda onda, com uma constante de fase $\phi$. (*c*) A onda resultante é representada pelo vetor soma dos dois fasores, $y'_m$.

ção $y_1$ no eixo vertical varia senoidalmente de um máximo de $y_{m1}$ a um mínimo de $-y_{m1}$ e de volta a $y_{m1}$. Essa variação corresponde à variação senoidal do deslocamento $y_1$ de qualquer ponto da corda quando a onda passa por esse ponto.

Quando duas ondas se propagam na mesma corda podemos representar as duas ondas e a onda resultante em um *diagrama fasorial*. Os fasores da Fig. 16-17*b* representam a onda da Eq. 16-55 e uma segunda onda dada por

$$y_2(x, t) = y_{m2} \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-56}$$

Esta segunda onda está defasada em relação à primeira onda de uma constante de fase $\phi$. Como os fasores giram com a mesma velocidade angular $\omega$, o ângulo entre os dois fasores é sempre $\phi$. Se $\phi$ é um número *positivo*, o fasor da onda 2 está *atrasado* em relação ao fasor da onda 1, como mostra a Fig. 16-17*b*. Se $\phi$ é um número *negativo*, o fasor da onda 2 está *adiantado* em relação ao fasor da onda 1.

Como as ondas $y_1$ e $y_2$ têm o mesmo número de onda $k$ e a mesma freqüência angular $\omega$, sabemos pelas Eqs. 16-51 e 16-52 que a resultante é da forma

$$y'(x, t) = y'_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \beta), \tag{16-57}$$

onde $y'_m$ é a amplitude da onda resultante e $\beta$ é a constante de fase. Para determinar os valores de $y'_m$ e $\beta$ temos que somar as duas ondas, como fizemos para obter a Eq. 16-51. Para fazer isso em um diagrama fasorial somamos vetorialmente os dois fasores em qualquer instante da rotação, como na Fig. 16-17*c*, onde o fasor $y_{m2}$ foi deslocado para a extremidade do fasor $y_{m1}$. O módulo da soma vetorial é igual à amplitude $y'_m$ da Eq. 16-57. O ângulo entre a soma vetorial e o fasor de $y_1$ é igual à constante de fase $\beta$ da Eq. 16-57.

Note que, ao contrário do que acontece com o método da Seção 16-10,

Podemos usar fasores para combinar ondas *mesmo que as amplitudes sejam diferentes.*

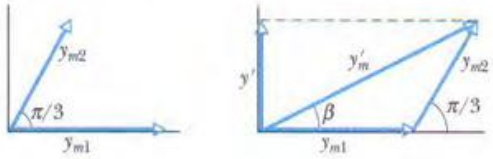
## Exemplo 16-7

Duas ondas senoidais $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ têm o mesmo comprimento de onda e se propagam no mesmo sentido em uma corda. As amplitudes são $y_{m1} = 4{,}0$ mm e $y_{m2} = 3{,}0$ mm, e as constantes de fase são 0 e $\pi/3$ rad, respectivamente. Quais são a amplitude $y'_m$ e a constante de fase $\beta$ da onda resultante? Escreva a onda resultante na forma da Eq. 16-57.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) As duas ondas têm algumas propriedades em comum: como se propagam na mesma corda, têm a mesma velocidade $v$, que, de acordo com a Eq. 16-26, depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda. Como o comprimento de onda $\lambda$ é o mesmo, elas devem ter o mesmo número de onda $k$ ($= 2\pi/\lambda$). Como o número de onda $k$ e a velocidade $v$ são iguais, elas devem ter a mesma freqüência angular $\omega$ ($= kv$).

(2) As ondas (vamos chamá-las de ondas 1 e 2) podem ser representadas por fasores girando com a mesma freqüência angular $\omega$ em torno da origem. Como a constante de fase da onda 2 é *maior* que a constante de fase da onda 1 em $\pi/3$, o fasor 2 está *atrasado* de $\pi/3$ em relação ao fasor 1 na rotação dos dois vetores no sentido horário, como mostra a Fig. 16-18*a*. A onda resultante da interferência das ondas 1 e 2 pode ser representada por um fasor que é a soma vetorial dos fasores 1 e 2.

***Cálculos:*** Para simplificar a soma vetorial desenhamos os fasores 1 e 2 na Fig. 16-18*a* no instante em que a direção do fasor 1 coincide com a do semi-eixo horizontal positivo. Como o fasor 2 está atrasado de $\pi/3$ rad, faz um ângulo positivo de $\pi/3$ rad com o semi-eixo horizontal positivo. Na Fig. 16-18*b* o fasor 2 foi deslocado para que sua origem coincida com a extremidade do fasor 1. Podemos desenhar




(*a*) (*b*)

FIG. 16-18 (*a*) Dois fasores de módulos $y_{m1}$ e $y_{m2}$ com diferença de fase $\pi/3$. (*b*) A soma vetorial desses fasores em qualquer instante fornece o módulo $y'_m$ do fasor da onda resultante.

o fasor $y'_m$ da onda resultante ligando a origem do fasor 1 à extremidade do fasor 2. A constante de fase $\beta$ é o ângulo que o fasor $y'_m$ faz com o fasor 1.

Para determinar os valores de $y'_m$ e $\beta$ podemos somar os fasores 1 e 2 diretamente, com o auxílio de uma calculadora (somando um vetor de módulo 4,0 e ângulo 0 com um vetor de módulo 3,0 e ângulo $\pi/3$ rad), ou somar separadamente as componentes. No caso das componentes horizontais, temos:

$$y'_{mh} = y_{m1}\cos 0 + y_{m2}\cos \pi/3$$
$$= 4{,}0\text{ mm} + (3{,}0\text{ mm})\cos \pi/3 = 5{,}50\text{ mm}.$$

No caso das componentes verticais, temos:

$$y'_{mv} = y_{m1}\,\text{sen}\,0 + y_{m2}\,\text{sen}\,\pi/3.$$
$$= 0 + (3{,}0\text{ mm})\,\text{sen}\,\pi/3 = 2{,}60\text{ mm}.$$

Assim, a onda resultante tem uma amplitude

$$y'_m = \sqrt{(5{,}50\text{ mm})^2 + (2{,}60\text{ mm})^2}$$
$$= 6{,}1\text{ mm} \qquad \text{(Resposta)}$$

e uma constante de fase

$$\beta = \tan^{-1}\frac{2{,}60\text{ mm}}{5{,}50\text{ mm}} = 0{,}44\text{ rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Fig. 16-18*b*, a constante de fase $\beta$ é um ângulo *positivo* em relação ao fasor 1. Assim, a onda resultante está *atrasada* em relação à onda 1 de um ângulo $\beta = 0{,}44$ rad. De acordo com a Eq. 16-57, podemos escrever a onda resultante na forma

$$y'(x,t) = (6{,}1\text{ mm})\,\text{sen}(kx - \omega t + 0{,}44\text{ rad}). \qquad \text{(Resposta)}$$

## 16-12 | Ondas Estacionárias

Na Seção 16-10 discutimos o caso de duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e mesma amplitude que se propagam *no mesmo sentido* em uma corda. O que acontece se elas se propagam em sentidos opostos? Também neste caso podemos obter a onda resultante aplicando o princípio da superposição.

A situação está ilustrada na Fig. 16-19. A figura mostra uma onda se propagando para a esquerda na Fig. 16-19*a* e a outra onda se propagando para a direita na Fig. 16-19*b*. A Fig. 16-19*c* mostra a soma das duas ondas, obtida aplicando graficamente o princípio de superposição. O que chama a atenção na onda resultante é o fato de que existem pontos na corda, chamados **nós**, que permanecem imóveis. Quatro desses nós estão assinalados com pontos na Fig. 16-19*c*. No ponto médio entre nós vizinhos estão **antinós**, pontos em que a amplitude da onda resultante é máxima. Ondas

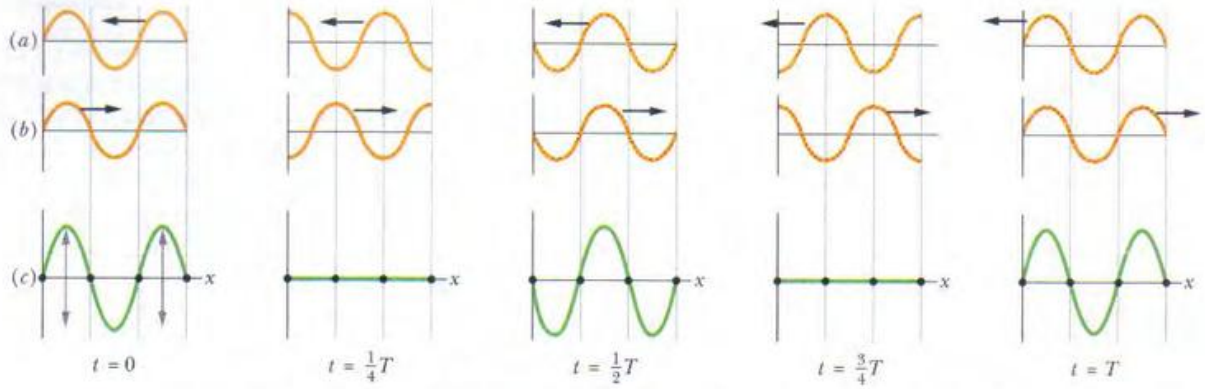



FIG. 16-19 (*a*) Cinco instantâneos de uma onda se propagando para a esquerda, em instantes $t$ indicados abaixo da parte (*c*) ($T$ é o período das oscilações). (*b*) Cinco instantâneos de uma onda igual à de (*a*), mas se propagando para a direita, nos mesmos instantes $t$. (*c*) Instantâneos correspondentes para a superposição das duas ondas na mesma corda. Nos instantes $t = 0$, $T/2$, e $T$ a interferência é totalmente construtiva, ou seja, os picos se alinham com picos e os vales com vales. Em $t = T/4$ e $3T/4$ a interferência é totalmente destrutiva, pois os picos se alinham com vales. Alguns pontos (os nós, indicados por pontos) permanecem imóveis; outros (os antinós) oscilam com amplitude máxima.

como a da Fig. 16-19*c* são chamadas de **ondas estacionárias**, porque a forma de onda não se move para a esquerda nem para a direita; as posições de máximos e mínimos não variam com o tempo.

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam em sentidos *opostos* em uma corda, a interferência mútua produz uma onda estacionária.

Para analisar uma onda estacionária, representamos as duas ondas pelas equações

$$y_1(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16-58}$$

e

$$y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{16-59}$$

De acordo com o princípio de superposição, a onda resultante é dada por

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t).$$

Aplicando a relação trigonométrica da Eq. 16-50, obtemos

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t, \tag{16-60}$$

que está plotada na Fig. 16-20. Esta equação não descreve uma onda progressiva porque não é da forma da Eq. 16-17; em vez disso, descreve uma onda estacionária.

Deslocamento

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t$$

Termo de amplitude — Termo oscilatório

**FIG. 16-20** A onda resultante da Eq. 16-60 é uma onda estacionária, produzida pela interferência de duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda que se propagam em sentidos opostos.

O fator $2y_m \operatorname{sen} kx$ entre colchetes na Eq. 16-60 pode ser visto como a amplitude da oscilação do elemento da corda localizado na posição $x$. Entretanto, como uma amplitude é sempre positiva e sen $kx$ pode ser negativo, tomamos o valor absoluto de $2y_m \operatorname{sen} kx$ como a amplitude em $x$.

Em uma onda senoidal progressiva a amplitude da onda é a mesma para todos os elementos da corda. Isso não é verdade para uma onda estacionária, na qual a amplitude *varia com a posição*. Na onda estacionária da Eq. 16-60, por exemplo, a amplitude é zero para valores de $kx$ tais que sen $kx = 0$. Esses valores são

$$kx = n\pi, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16-61}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ nesta equação e reagrupando os termos, obtemos

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(nós)}, \tag{16-62}$$

para as posições de amplitude zero (nós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Note que nós vizinhos estão separados de $\lambda/2$, metade do comprimento de onda.

A amplitude da onda estacionária da Eq. 16-60 tem um valor máximo de $2y_m$, que ocorre para valores de $kx$ tais que $|\operatorname{sen} kx| = 1$. Esses valores são

$$kx = \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi, \ldots$$
$$= (n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16-63}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ na Eq. 16-63 e reagrupando os termos, obtemos

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(antinós)}, \tag{16-64}$$

para as posições de máxima amplitude (antinós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Os antinós estão separados de $\lambda/2$ e estão situados no ponto médio de nós vizinhos.

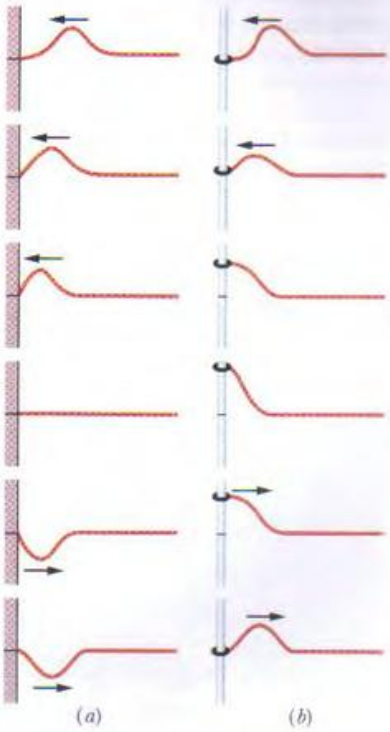



**FIG. 16-21** (*a*) Um pulso proveniente da direita é refletido na extremidade esquerda da corda, que está amarrada em uma parede. Note que o pulso refletido sofre uma inversão em relação ao pulso incidente. (*b*) Neste caso, a extremidade esquerda da corda está amarrada em um anel que pode deslizar sem atrito para cima e para baixo em uma barra, e o pulso não é invertido pela reflexão.

## Reflexões em uma Interface

Podemos excitar uma onda estacionária em uma corda fazendo com que uma onda progressiva seja refletida em uma das extremidades da corda e interfira consigo mesma. A onda (original) incidente e a onda refletida podem ser descritas pelas Eqs. 16-58 e 16-59, respectivamente, e se combinam para formar uma onda estacionária.

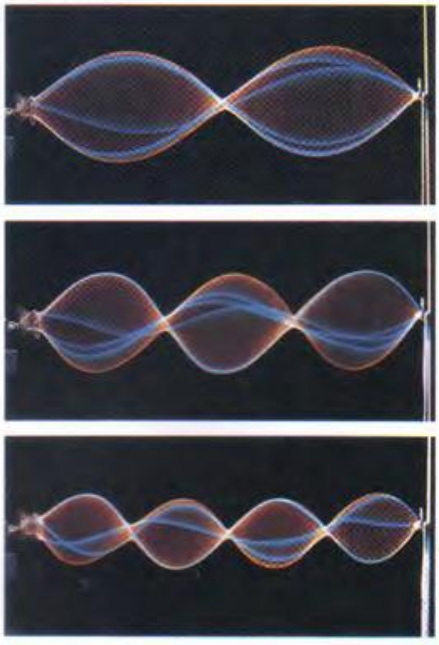


FIG. 16-22 Fotografias estroboscópicas revelam ondas estacionárias (imperfeitas) em uma corda excitada por um oscilador na extremidade esquerda. As ondas estacionárias se formam apenas para certas freqüências de oscilação. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

Na Fig. 16-21 usamos um pulso isolado para mostrar como acontecem essas reflexões. Na Fig. 16-21*a* a corda está fixa na extremidade esquerda. Quando um pulso chega a essa extremidade exerce uma força para cima sobre o suporte (a parede). De acordo com a terceira lei de Newton, o suporte exerce uma força oposta, de mesmo módulo, sobre a corda. Essa força produz um pulso que se propaga no sentido oposto ao do pulso incidente. Em uma reflexão "dura" como esta existe um nó no suporte, pois a corda está fixa. Isso significa que o pulso refletido e o pulso incidente devem ter sinais opostos para se cancelarem nesse ponto.

Na Fig. 16-21*b* a extremidade esquerda da corda está presa a um anel que pode deslizar sem atrito ao longo de uma barra. Quando o pulso incidente chega a esse ponto o anel se desloca para cima ao longo da barra. Ao se mover o anel puxa a corda, esticando-a e produzindo um pulso refletido com o mesmo sinal e mesma amplitude que o pulso incidente. Assim, em uma reflexão "macia" como essa os pulsos incidente e refletido se reforçam, criando um antinó na extremidade da corda; o deslocamento máximo do anel é duas vezes maior que a amplitude de um dos pulsos.

**TESTE 5** Duas ondas com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda interferem em três situações diferentes para produzir ondas resultantes descritas pelas seguintes equações:

(1) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x - 4t)$
(2) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x) \cos(4t)$
(3) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x + 4t)$.

Em que situação as duas ondas estão se propagando (a) no sentido positivo de $x$, (b) no sentido de negativo de $x$ e (c) em sentidos opostos?

## 16-13 | Ondas Estacionárias e Ressonância

Considere uma corda, por exemplo, uma corda de violão, que está esticada entre duas presilhas. Suponha que produzimos uma onda senoidal contínua de uma certa freqüência que se propaga, digamos, para a direita. Quando a onda chega à extremidade direita é refletida e começa a se propagar de volta para a esquerda. Essa onda que se propaga para a esquerda encontra a onda que ainda se propaga para a direita. Quando a onda que se propaga para a esquerda chega à extremidade esquerda é refletida mais uma vez, e a nova onda refletida começa a se propagar para a direita, encontrando as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita. Dessa forma, logo temos muitas ondas superpostas que interferem entre si.

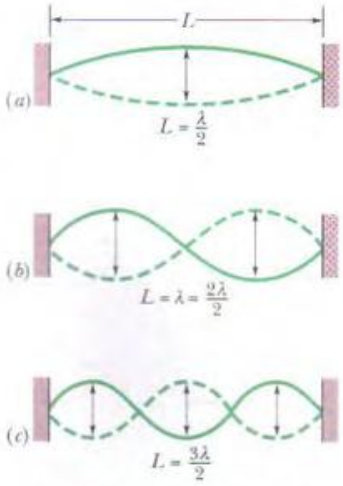



FIG. 16-23 Uma corda, esticada entre dois suportes, oscila com ondas estacionárias. (*a*) O padrão mais simples possível é o de *meio comprimento de onda*, mostrado na figura pela posição da corda nos pontos de máximo deslocamento (linhas contínua e tracejada). (*b*) O segundo padrão mais simples é o de um comprimento de onda. (*c*) O terceiro padrão mais simples é o de um e meio comprimento de onda.

Para certas freqüências a interferência produz uma onda estacionária (ou **modo de oscilação**) com nós e grandes antinós, como os da Fig. 16-22. Dizemos que uma onda estacionária desse tipo é gerada quando existe **ressonância**, e que a corda *ressoa* nessas freqüências, conhecidas como **freqüências de ressonância**. Se a corda é excitada em uma freqüência que não é uma das freqüências de ressonância não se forma uma onda estacionária. Nesse caso a interferência das ondas que se propagam para a esquerda com as que se propagam para a direita resulta em pequenas (talvez imperceptíveis) oscilações na corda.

Suponha que uma corda esteja fixada a duas presilhas separadas por uma distância $L$. Para encontrarmos expressões para as freqüências de ressonância da corda observamos que deve existir um nó em cada extremidade, pois as extremidades são fixas e não podem oscilar. A configuração mais simples que satisfaz essa condição é a da Fig. 16-23*a*, que mostra a corda nas posições extremas (uma representada por uma linha contínua e a outra por uma linha tracejada). Existe apenas um antinó, no centro da corda. Note que o comprimento $L$ da corda é igual a meio comprimento de onda. Assim, para essa configuração $\lambda/2 = L$. Essa condição nos diz que para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita produzam essa configuração por interferência devem ter um comprimento de onda $\lambda = 2L$.

Uma segunda configuração simples que satisfaz o requisito de que existam nós nas extremidades fixas aparece na Fig. 16-23*b*. Essa configuração tem três nós e dois antinós. Para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita a excitem precisam ter um comprimento de onda $\lambda = L$. Uma terceira configuração é a que aparece na Fig. 16-23*c*, com quatro nós e três antinós, e o comprimento de onda é $\lambda = 2L/3$. Poderíamos continuar essa progressão desenhando configurações cada vez mais complicadas. Em cada passo da progressão o padrão teria um nó e um antinó a mais que o passo anterior, e um meio comprimento de onda adicional seria acomodado na distância $L$.

Assim, uma onda estacionária pode ser excitada em uma corda de comprimento $L$ por uma onda cujo comprimento de onda satisfaz a condição

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16-65}$$

As freqüências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda podem ser calculadas usando a Eq. 16-13:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16-66}$$

Onde $v$ é a velocidade das ondas progressivas na corda.

A Eq. 16-66 nos diz que as freqüências de ressonância são múltiplos inteiros da menor freqüência de ressonância, $f = v/2L$, que corresponde a $n = 1$. O modo de oscilação com a menor freqüência é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. O *segundo harmônico* é o modo de oscilação com $n = 2$, o *terceiro harmônico* é o modo com $n = 3$, e assim por diante. As freqüências associadas a esses modos costumam ser chamadas de $f_1, f_2, f_3$, e assim por diante. O conjunto de todos os modos de oscilação possíveis é chamado de **série harmônica**, e $n$ é chamado de **número harmônico** do enésimo harmônico.

Para uma certa corda submetida a uma certa tensão cada freqüência de ressonância corresponde a um certo padrão de oscilação. Assim, se a freqüência está na faixa de sons audíveis é possível "ouvir" a forma da corda. A ressonância também pode ocorrer em duas dimensões (como na superfície do tímpano da Fig. 16-24) e em três dimensões (como nos balanços e torções induzidos pelo vento em um edifício).

**FIG. 16-24** Uma das muitas ondas estacionárias possíveis para a membrana de um tímpano, visualizada através de um pó escuro espalhado sobre a membrana. Quando a membrana é posta para vibrar em uma única freqüência por um oscilador mecânico situado no canto superior esquerdo da figura o pó se acumula nos nós, que são circunferências e linhas retas neste exemplo bidimensional. *(Cortesia de Thomas D. Rossing, Northern Illinois University)*

## Passarelas e Pistas de Dança

Logo que a Ponte do Milênio sobre o rio Tâmisa foi inaugurada o problema das oscilações não existia. As passadas dos pedestres produziam forças verticais e horizontais na ponte que tendiam a excitar o segundo harmônico da ponte (que se parece com o segundo harmônico de uma corda), mas os pedestres eram poucos e seus movimentos estavam fora de fase. Quando o número de pedestres ultrapassou um certo valor crítico, porém, as oscilações aumentaram e tornou-se difícil caminhar na ponte. Para manter o equilíbrio os pedestres começaram a sincronizar os passos com o balanço da ponte, o que agravou o problema e obrigou as autoridades a fecharem a ponte até que um sistema de amortecedores (veja o Exemplo 15-3) fosse instalado.

Oscilações do mesmo tipo podem acontecer quando os espectadores começam a pular ou balançar o corpo de forma sincronizada em um estádio de futebol ou em uma pista de dança. A pior situação talvez seja aquela em que existe uma pista de dança suspensa em um espetáculo de rock. Quando os espectadores começam a pular ao ritmo da música podem excitar uma ressonância do piso, cuja freqüência de ressonância costuma ser da ordem de 2 Hz. A amplitude das oscilações pode aumentar rapidamente à medida que mais e mais pessoas são forçadas a sincronizar seus movimentos, provocando o desabamento da estrutura. Para evitar essa possibilidade os códigos de construção modernos proíbem que as pistas de dança suspensas tenham freqüências de ressonância menores que 5 Hz.

✓ **TESTE 6** Na série de freqüências de ressonância a seguir, uma freqüência (menor que 400 Hz) está faltando: 150, 225, 300, 375 Hz. (a) Qual é a freqüência que falta? (b) Qual é a freqüência do sétimo harmônico?

## Exemplo 16-8 Aumente sua capacidade

A Fig. 16-25 mostra a oscilação ressonante de uma corda de massa $m = 2{,}500$ g e comprimento $L = 0{,}800$ m sob uma tensão $\tau = 325{,}0$ N. Qual é o comprimento de onda $\lambda$ das ondas transversais responsáveis pela onda estacionária mostrada na figura e qual é o número harmônico $n$? Qual é a freqüência $f$ das ondas transversais e das oscilações dos elementos da corda? Qual é o módulo máximo da velocidade $u_m$ do elemento da corda que oscila no ponto de coordenada $x = 0{,}180$ m (o eixo $x$ está indicado na figura)? Para que deslocamento do elemento a velocidade transversal é máxima?

FIG. 16-25 Oscilações ressonantes em uma corda sob tensão.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) As ondas transversais que produzem uma onda estacionária têm um comprimento de onda tal que o comprimento $L$ da corda é igual a um número inteiro $n$ de meios comprimentos de onda. (2) A freqüência dessas ondas e das oscilações dos elementos da corda é dada pela Eq. 16-66 ($f = nv/2L$). (3) O deslocamento de um elemento da corda em função da posição $x$ e do tempo $t$ é dado pela Eq. 16-60:

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}67)$$

***Comprimento de onda e número harmônico:*** Na Fig. 16-25 a linha cheia, que representa um instantâneo das oscilações, mostra que o comprimento $L = 0{,}800$ m acomoda dois comprimentos de onda das oscilações. Assim, temos:

$$2\lambda = L,$$

ou

$$\lambda = \frac{L}{2}. \qquad (16\text{-}68)$$

$$= \frac{0{,}800 \text{ m}}{2} = 0{,}400 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Contando o número de meios comprimentos de onda na Fig. 16-25, vemos que o número harmônico é

$$n = 4. \qquad \text{(Resposta)}$$

Chegaríamos à mesma conclusão comparando as Eqs. 16-68 e 16-65 ($\lambda = 2L/n$). Assim, a corda está oscilando no quarto harmônico.

***Freqüência:*** Podemos determinar a freqüência $f$ das ondas transversais a partir da Eq. 16-13 ($v = \lambda f$) se conhecermos a velocidade $v$ das ondas. A velocidade é dada pela Eq. 16-26, mas devemos substituir a massa específica linear desconhecida $\mu$ por $m/L$. O resultado é o seguinte:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{(325 \text{ N})(0{,}800 \text{ m})}{2{,}50 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 322{,}49 \text{ m/s}.$$

Explicitando $f$ na Eq. 16-13, temos:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{322{,}49 \text{ m/s}}{0{,}400 \text{ m}}$$

$$= 806{,}2 \text{ Hz} \approx 806 \text{Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que obtemos o mesmo resultado usando a Eq. 16-66:

$$f = n\frac{v}{2L} = 4\frac{322{,}49 \text{ m/s}}{2(0{,}800 \text{ m})}$$

$$= 806 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que 806 Hz não só é a freqüência das ondas responsáveis pela produção do quarto harmônico, mas também a freqüência da oscilação vertical dos elementos da corda da Fig. 16-25. É também a freqüência do som produzido pela corda.

***Velocidade transversal:*** O deslocamento $y'$ do elemento da corda situado na coordenada $x$ é dado pela Eq. 16-67 em função do tempo $t$. O fator $\cos \omega t$ é responsável pela variação com o tempo e, portanto, pelo "movimento" da onda estacionária. O fator $2y_m \operatorname{sen} kx$ estabelece a extensão do movimento. A maior extensão acontece nos antinós, onde $\operatorname{sen} kx$ é $+1$ ou $-1$ e a amplitude é $2y_m$. De acordo com a Fig. 16-25, $2y_m = 4{,}00$ mm e, portanto, $y_m = 2{,}00$ mm.

Queremos conhecer a velocidade transversal, ou seja, a velocidade de um elemento de corda na direção do eixo $y$. Para isso, derivamos a Eq. 16-67 em relação ao tempo:

$$u(x,t) = \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(2y_m \text{ sen } kx)\cos \omega t]$$

$$= [-2y_m \omega \text{ sen } kx] \text{ sen } \omega t. \quad (16\text{-}69)$$

Na Eq. 16-69 o fator sen $\omega t$ é responsável pela variação da velocidade com o tempo, e o fator $-2y_m\omega$ sen $kx$ estabelece a extensão dessa variação. A velocidade máxima é o valor absoluto dessa extensão:

$$u_m = |-2y_m \omega \text{ sen } kx|.$$

Para calcular esse valor para o elemento situado em $x = 0{,}180$ m observamos que $y_m = 2{,}00$ mm, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0{,}400 \text{ m})$ e $\omega = 2\pi f = 2\pi(806{,}2 \text{ Hz})$. Assim, a velocidade máxima do elemento situado em $x = 0{,}180$ m é

$$u_m = \left| -2(2{,}00 \times 10^{-3} \text{ m})(2\pi)(806{,}2 \text{ Hz}) \times \text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}400 \text{ m}}(0{,}180 \text{ m})\right)\right|$$

$$= 6{,}26 \text{ m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar para que deslocamento do elemento a velocidade transversal é máxima poderíamos investigar o comportamento da Eq. 16-69. Entretanto, como freqüentemente acontece podemos poupar muito trabalho pensando um pouquinho. Como o elemento está descrevendo um movimento harmônico simples, a velocidade é máxima no ponto central da oscilação, ou seja, no instante em que o deslocamento é zero.

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 2:*** *Harmônicos em uma Corda* Quando precisamos obter informações a respeito de um certo harmônico presente em uma corda esticada de comprimento $L$ desenhamos primeiro o harmônico (como na Fig. 16-23). Para representar, digamos, o quinto harmônico devemos desenhar cinco arcos entre as extremidades da corda. Isso significa que a corda é ocupada por cinco arcos de largura $\lambda/2$. Assim, $5(\lambda/2) = L$ e $\lambda = 2L/5$. Em seguida podemos usar a Eq. 16-13 ($f = v/\lambda$) para calcular a freqüência do harmônico.

Não se esqueça de que o comprimento de onda do harmônico depende apenas do comprimento $L$ da corda, mas a freqüência depende também da velocidade $v$ da onda, que é estabelecida pela tensão e pela massa específica linear da corda através da Eq. 16-26.

## REVISÃO E RESUMO

**Ondas Transversais e Longitudinais** As ondas mecânicas podem existir apenas em meios materiais, e são governadas pelas leis de Newton. As ondas mecânicas **transversais**, como as que existem em uma corda esticada, são ondas nas quais as partículas do meio oscilam perpendicularmente à direção de propagação da onda. As ondas em que as partículas do meio oscilam na direção de propagação da onda são chamadas de ondas **longitudinais**.

**Ondas Senoidais** Uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo $x$ pode ser representada pela função

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t), \quad (16\text{-}2)$$

onde $y_m$ é a **amplitude** da onda, $k$ é o **número de onda**, $\omega$ é a freqüência angular e $kx - \omega t$ é a **fase**. O **comprimento de onda** $\lambda$ está relacionado a $k$ através da equação

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (16\text{-}5)$$

O **período** $T$ e a **freqüência** $f$ da onda estão relacionados a $\omega$ através da equação

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \quad (16\text{-}9)$$

Finalmente, a **velocidade** $v$ da onda está relacionada a esses outros parâmetros através das equações

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (16\text{-}13)$$

**Equação de uma Onda Progressiva** Qualquer função da forma

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t) \quad (16\text{-}17)$$

pode representar uma **onda progressiva** com uma velocidade dada pela Eq. 16-13 e uma forma de onda dada pela forma matemática da função $h$. O sinal positivo mostra que a onda se propaga no sentido negativo do eixo $x$, e o sinal negativo mostra que a onda se propaga no sentido positivo.

**Velocidade de Onda em uma Corda Esticada** A velocidade de uma onda em uma corda esticada é determinada pelas propriedades da corda. A velocidade em uma corda com tensão $\tau$ e massa específica linear $\mu$ é dada por

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \quad (16\text{-}26)$$

**Potência** A **potência média**, ou taxa média, com a qual a energia é transmitida por uma onda senoidal em uma corda esticada é dada por

$$P_{méd} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2. \quad (16\text{-}33)$$

**Superposição de Ondas** Quando duas ou mais ondas se propagam no mesmo meio o deslocamento de qualquer partícula do meio é a soma dos deslocamentos que seriam provocados pelas ondas agindo separadamente.

**Interferência de Ondas** Duas ondas senoidais em uma mesma corda sofrem **interferência**, somando-se ou cancelando-se de acordo com o princípio da superposição. Se as duas ondas se propagam no mesmo sentido e têm a mesma amplitude $y_m$ e a

mesma freqüência angular $\omega$ (e, portanto, o mesmo comprimento de onda $\lambda$), mas têm uma **diferença de fase** $\phi$, o resultado é uma única onda com esta mesma freqüência:

$$y'(x,t) = [2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \qquad (16\text{-}51)$$

Se $\phi = 0$, as ondas têm fases iguais e a interferência é totalmente construtiva; se $\phi = \pi$ rad, as ondas têm fases opostas e a interferência é totalmente destrutiva.

**Fasores** Uma onda $y(x,t)$ pode ser representada por um **fasor**, um vetor de módulo igual à amplitude $y_m$ da onda que gira em torno da origem com uma velocidade angular igual à freqüência angular $\omega$ da onda. A projeção do fasor em um eixo vertical fornece o deslocamento $y$ de um ponto situado no trajeto da onda.

**Ondas Estacionárias** A interferência de duas ondas senoidais iguais que se propagam em sentidos opostos produz **ondas estacionárias**. No caso de uma corda com as extremidades fixas, a onda estacionária é dada por

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}60)$$

As ondas estacionárias possuem pontos em que o deslocamento é nulo, chamados **nós**, e pontos em que o deslocamento é máximo, chamados **antinós**.

**Ressonância** Ondas estacionárias podem ser produzidas em uma corda através da reflexão de ondas progressivas nas extremidades da corda. Se uma extremidade é fixa, deve ser a posição de um nó. Isso limita as freqüências possíveis para as ondas estacionárias em uma dada corda. Cada freqüência possível é uma **freqüência de ressonância**, e a onda estacionária correspondente é um **modo de oscilação**. Para uma corda esticada de comprimento $L$ com as extremidades fixas as freqüências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (16\text{-}66)$$

O modo de oscilação correspondente a $n = 1$ é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*; o modo correspondente a $n = 2$ é o *segundo harmônico*, e assim por diante.

## PERGUNTAS

**1** A Fig. 16-26*a* mostra um instantâneo de uma onda que se propaga no sentido positivo de $x$ em uma corda sob tensão. Quatro elementos da corda estão indicados por letras. Para cada um desses elementos determine se, no momento do instantâneo, o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso. (*Sugestão:* Imagine a onda passando pelos quatro elementos da corda como se estivesse assistindo a um vídeo do movimento da onda.)

A Fig. 16-26*b* mostra o deslocamento em função do tempo de um elemento da corda situado, digamos, em $x = 0$. Nos instantes indicados por letras o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso?

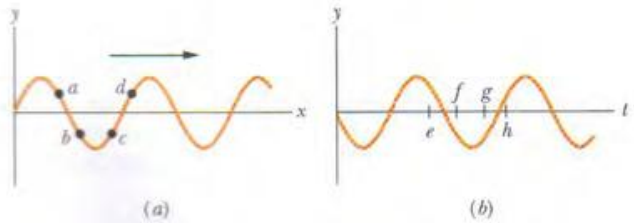



FIG. 16-26 Pergunta 1.

**2** A Fig. 16-27 mostra três ondas que são produzidas *separadamente* em uma corda que está esticada ao longo de um eixo $x$ e submetida a uma certa tensão. Ordene as ondas de acordo com (a) o comprimento de onda, (b) as velocidades e (c) a freqüência angular, em ordem decrescente.

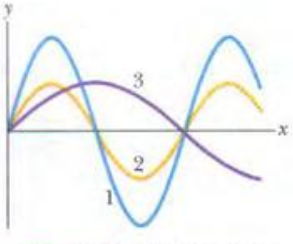



FIG. 16-27 Pergunta 2.

**3** As quatro ondas a seguir são produzidas em quatro cordas com a mesma massa específica linear ($x$ está em metros e $t$ em segundos). Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade, (b) com a tensão na corda, em ordem decrescente:

(1) $y_1 = (3\text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 3t)$, (3) $y_3 = (1\text{ mm}) \operatorname{sen}(4x - t)$,

(2) $y_2 = (6\text{ mm}) \operatorname{sen}(2x - t)$, (4) $y_4 = (2\text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 2t)$.

**4** Na Fig. 16-28 a onda 1 é formada por um pulso retangular com 4 unidades de altura e largura $d$ e um vale retangular com 2 unidades de profundidade e largura $d$. A onda se propaga para a direita ao longo de um eixo $x$. As opções 2, 3 e 4 são ondas semelhantes, com a mesma altura, profundidade e largura, que se propagam para a esquerda no mesmo eixo, passando pela onda 1. A onda 1, que se propaga para a direita, e uma das ondas que se propagam para a esquerda interferem ao passar uma pela outra. Com qual das ondas que se propagam para a esquerda a interferência produz, momentaneamente, (a) o vale mais profundo, (b) uma linha reta e (c) um pulso retangular com $2d$ de largura?

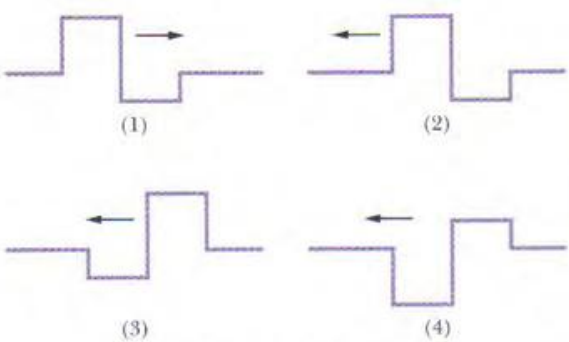



FIG. 16-28 Pergunta 4.

**5** Uma onda senoidal é produzida em uma corda sob tensão transportando energia a uma taxa média $P_{méd,1}$. Duas ondas, iguais à primeira, são em seguida produzidas na corda com uma diferença de fase $\phi$ de 0; 0,2, ou 0,5 comprimento de onda. (a) Apenas com cálculos mentais, ordene essas opções de $\phi$ de acordo com a taxa média com a qual as ondas transportam energia, em ordem decrescente. (b) Para a primeira opção de $\phi$, qual é a taxa média em termos de $P_{méd,1}$?

**6** As amplitudes e as diferenças de fase para quatro pares de ondas com o mesmo comprimento de onda são (a) 2 mm, 6 mm e $\pi$ rad; (b) 3 mm, 5 mm e $\pi$ rad; (c) 7 mm, 9 mm e $\pi$ rad; (d) 2 mm, 2 mm e 0 rad. Todos os pares se propagam no mesmo sentido na mesma corda. Sem executar cálculos, ordene os quatro pares de acordo com a amplitude da onda resultante em ordem decrescente. (*Sugestão:* Construa diagramas fasoriais.)

**7** Se você começa com duas ondas senoidais de mesma amplitude que se propagam em fase em uma corda e desloca a fase de uma delas de 5,4 comprimentos de onda, que tipo de interferência ocorre na corda?

**8** Se o sétimo harmônico é excitado em uma corda, (a) quantos nós estão presentes e (b) no ponto médio existe um nó, um antinó ou um estado intermediário? Se em seguida é excitado o sexto harmônico, (c) o comprimento de onda da ressonância é maior ou menor que o do sétimo harmônico e (d) a freqüência de ressonância é maior ou menor?

**9** A Fig. 16-29 mostra os diagramas fasoriais de três situações nas quais duas ondas se propagam na mesma corda. As seis ondas têm a mesma amplitude. Ordene as situações de acordo com a amplitude da onda resultante, em ordem decrescente.

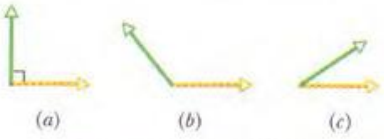


FIG. 16-29 Pergunta 9.

**10** (a) Se uma onda estacionária em uma corda é dada por

$$y'(t) = (3\text{ mm})\,\text{sen}(5x)\cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$? (b) Se a onda estacionária é dada por

$$y'(t) = (3\text{ mm})\,\text{sen}(5x + \pi/2)\cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$?

**11** Duas cordas $A$ e $B$ possuem o mesmo comprimento e a mesma massa específica linear, mas a corda $B$ está submetida a uma tensão maior que a corda $A$. A Fig. 16-30 mostra quatro situações, de (a) a (d), nas quais existem ondas estacionárias nas duas cordas. Em que situações existe a possibilidade de que as cordas $A$ e $B$ estejam oscilando com a mesma freqüência de ressonância?

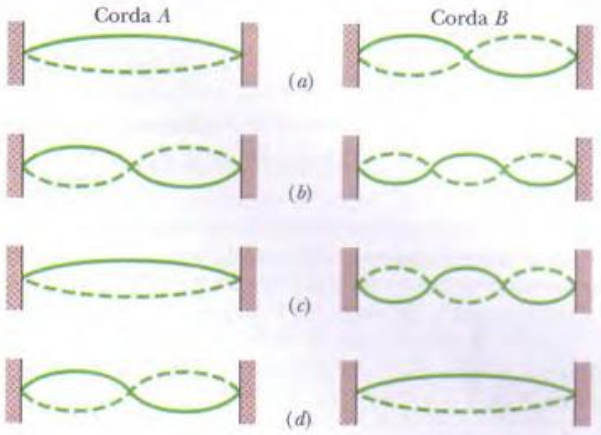


FIG. 16-30 Pergunta 11.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva

•**1** Uma onda possui uma freqüência angular de 110 rad/s e um comprimento de onda de 1,80 m. Calcule (a) o número de onda e (b) a velocidade da onda.

•**2** Um escorpião da areia pode detectar a presença de um besouro (sua presa) pelas ondas que o movimento do besouro produz na superfície da areia (Fig. 16-31). As ondas são de dois tipos: ondas transversais, que se propagam com uma velocidade $v_t = 50$ m/s, e ondas longitudinais, que se propagam com uma velocidade $v_l = 150$ m/s. Se um movimento brusco produz essas ondas o escorpião é capaz de determinar a que distância se encontra o besouro a partir da diferença $\Delta t$ entre os instantes em que as duas ondas chegam à perna que está mais próxima do besouro. Se $\Delta t = 4{,}0$ ms, a que distância está o besouro?

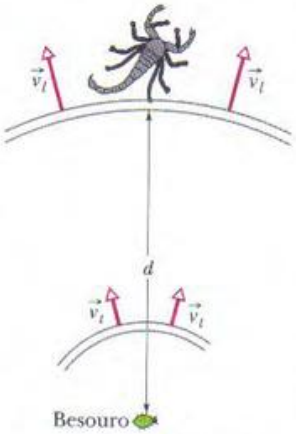


FIG. 16-31 Problema 2.

•**3** Uma onda senoidal se propaga em uma corda. O tempo necessário para que um certo ponto da corda se mova do deslocamento máximo até zero é 0,170 s. Quais são (a) o período e (b) a freqüência da onda? (c) O comprimento de onda é 1,40 m; qual é a velocidade da onda?

•**4** *Uma onda humana.* Uma *ola* é uma onda, criada pela torcida, que se propaga em estádios durante eventos esportivos (Fig. 16-32). Quando a onda chega a um grupo de espectadores eles ficam de pé com os braços levantados e depois tornam a se sentar. Em qualquer instante a largura $w$ da onda é a distância entre a borda dianteira (as pessoas que estão começando a se levantar) e a borda traseira (as pessoas que estão começando a se sentar). Suponha que uma *ola* percorre uma distância de 853 assentos de um estádio em 39 s e que os espectadores levam, em média, 1,8 s para responder à passagem da onda levantando-se e voltando a se sentar. Determine (a) a velocidade $v$ da onda (em assentos por segundo) e (b) a largura $w$ da onda (em número de assentos).

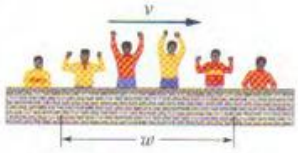


FIG. 16-32 Problema 4.

•**5** Se $y(x, t) = (6{,}0\text{ mm})\,\text{sen}(kx + (600\text{ rad/s})t + \phi)$ descreve uma onda que se propaga em uma corda, quanto tempo um ponto da corda leva para se mover entre os deslocamentos $y = +2{,}0$ mm e $y = -2{,}0$ mm?

••6 A Fig. 16-33 mostra a velocidade transversal $u$ em função do tempo $t$ para o ponto de uma corda situado em $x = 0$, quando uma onda passa por ele. A escala do eixo vertical é definida por $u_s = 4{,}0$ m/s. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de $\phi$? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para $\phi$ é o valor correto, substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para $\omega$ e plotando a função assim obtida.)

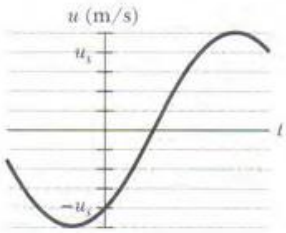


FIG. 16-33 Problema 6.

••7 Uma onda senoidal de 500 Hz se propaga em uma corda a 350 m/s. (a) Qual é a distância entre dois pontos da corda cuja diferença de fase é $\pi/3$ rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos de um ponto da corda que acontecem com um intervalo de 1,00 ms?

••8 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda muito longa é $y = 6{,}0 \operatorname{sen}(0{,}020\pi x + 4{,}0\pi t)$, onde $x$ e $y$ estão em centímetros e $t$ em segundos. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a freqüência, (d) a velocidade, (e) o sentido de propagação da onda e (f) a máxima velocidade transversal de uma partícula da corda. (g) Qual é o deslocamento transversal em $x = 3{,}5$ cm para $t = 0{,}26$ s?

••9 Uma onda senoidal transversal se propaga em uma corda no sentido positivo de um eixo $x$ com uma velocidade de 80 m/s. Em $t = 0$ uma partícula da corda situada em $x = 0$ tem um deslocamento transversal de 4,0 cm em relação à posição de equilíbrio, e não está se movendo. A velocidade transversal máxima da partícula situada em $x = 0$ é 16 m/s. (a) Qual é a freqüência da onda? (b) Qual é o comprimento de onda? Se a equação de onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (c) $y_m$, (d) $k$, (e) $\omega$, (f) $\phi$ e (g) o sinal que precede $\omega$.

••10 A função $y(x, t) = (15{,}0 \text{ cm}) \cos(\pi x - 15\pi t)$, com $x$ em metros e $t$ em segundos, descreve uma onda em uma corda esticada. Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda no instante em que o ponto possui um deslocamento $y = 12{,}0$ cm?

••11 Uma onda senoidal que se propaga em uma corda é mostrada duas vezes na Fig. 16-34, antes e depois que o pico $A$ se desloque de 6,0 cm no sentido positivo de um eixo $x$ em 4,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 6{,}0$ mm. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

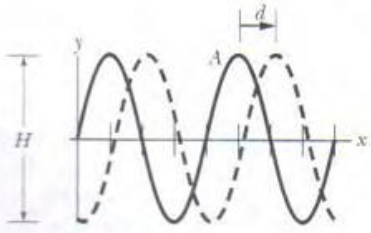


FIG. 16-34 Problema 11.

••12 Uma onda senoidal se propaga em uma corda sob tensão. A Fig. 16-35 mostra a inclinação da corda em função da posição no instante $t = 0$. A escala do eixo $x$ é definida por $x_s = 0{,}80$ m. Qual é a amplitude da onda?

FIG. 16-35 Problema 12.

••13 Uma onda transversal senoidal com 20 cm de comprimento de onda se propaga em uma corda no sentido positivo de um eixo $x$. O deslocamento $y$ da partícula na corda situada em $x = 0$ é dado na Fig. 16-36 em função do tempo $t$. A escala do eixo vertical é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A equação da onda deve ser da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$. (a) Em $t = 0$ o gráfico de $y$ em função de $x$ tem a forma de uma função seno positiva ou de uma função seno negativa? Determine (b) $y_m$, (c) $k$, (d) $\omega$, (e) $\phi$, (f) o sinal que precede $\omega$ e (g) a velocidade da onda. (h) Qual é a velocidade transversal da partícula em $x = 0$ para $t = 5{,}0$ s?

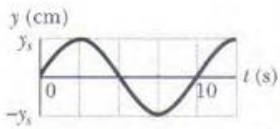


FIG. 16-36 Problema 13.

## seção 16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

•14 A tensão em um fio preso nas duas extremidades é duplicada sem que o comprimento do fio sofra uma variação apreciável. Qual é a razão entre a nova e a antiga velocidade das ondas transversais que se propagam no fio?

•15 Qual é a velocidade de uma onda transversal em uma corda de 2,00 m de comprimento e 60,0 g de massa sujeita a uma tensão de 500 N?

•16 A corda mais pesada e a corda mais leve de um certo violino têm uma massa específica linear de 3,0 e 0,29 g/m, respectivamente. Qual é a razão entre o diâmetro da corda mais leve e o da corda mais pesada, supondo que as cordas são feitas do mesmo material?

•17 Uma corda esticada tem uma massa específica linear de 5,00 g/cm e está sujeita a uma tensão de 10,0 N. Uma onda senoidal na corda tem uma amplitude de 0,12 mm, uma freqüência de 100 Hz e está se propagando no sentido negativo de um eixo $x$. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

•18 A velocidade de uma onda transversal em uma corda é 170 m/s quando a tensão da corda é 120 N. Qual deve ser o valor da tensão para que a velocidade da onda aumente para 180 m/s?

•19 A massa específica linear de uma corda é $1{,}6 \times 10^{-4}$ kg/m. Uma onda transversal na corda é descrita pela equação

$$y = (0{,}021 \text{ m}) \operatorname{sen}[(2{,}0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t].$$

Quais são (a) a velocidade da onda e (b) a tensão da corda?

•20 A equação de uma onda transversal em uma corda é

$$y = (2{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

A tensão da corda é 15 N. (a) Qual é a velocidade da onda? (b) Determine a massa específica linear da corda em gramas por metro.

••21 Uma onda transversal senoidal se propaga em uma corda no sentido negativo de um eixo $x$. A Fig. 16-37 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição no instante $t = 0$; a escala do eixo $y$ é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A tensão da corda é 3,6 N e a massa específica linear é 25 g/m. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a velocidade da onda e (d) o período da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda. Se a onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (f) $k$, (g) $\omega$, (h) $\phi$ e (i) o sinal que precede $\omega$.

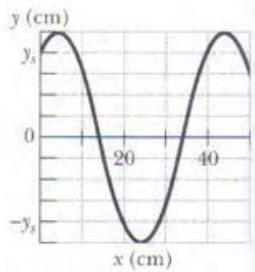


FIG. 16-37 Problema 21.

••22 Uma onda senoidal se propaga numa corda com uma velocidade de 40 cm/s. O deslocamento da corda em $x = 10$ cm

varia com o tempo de acordo com a equação $y = (5{,}0\text{ cm})\ \text{sen}\ [1{,}0 - (4{,}0\text{ s}^{-1})t]$. A massa específica linear da corda é 4,0 g/cm. Quais são (a) a freqüência e (b) o comprimento de onda da onda? Se a equação da onda é da forma $y(x,t) = y_m\ \text{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (c) $y_m$, (d) $k$, (e) $\omega$, e (f) o sinal que precede $\omega$. (g) Qual é a tensão da corda?

••23 Um fio de 100 g é mantido sob uma tensão de 250 N com uma extremidade em $x = 0$ e a outra em $x = 10{,}0$ m. No instante $t = 0$ o pulso 1 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 10{,}0$ m. No instante $t = 30{,}0$ ms o pulso 2 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 0$. Em que ponto $x$ os pulsos começam a se superpor?

•••24 Na Fig. 16-38*a*, a corda 1 tem uma massa específica linear 3,00 g/m e a corda 2 tem uma massa específica linear 5,00 g/m. As cordas estão submetidas à tensão produzida por um bloco suspenso de massa $M = 500$ g. Calcule a velocidade da onda (a) da corda 1 e (b) da corda 2. (*Sugestão:* Quando uma corda envolve metade de uma polia exerce sobre a polia uma força duas vezes maior que a tensão na corda.) Em seguida, o bloco é dividido em dois blocos (com $M_1 + M_2 = M$) e o sistema é montado como na Fig. 16-38*b*. Determine (c) $M_1$ e (d) $M_2$ para que as velocidades das ondas nas duas cordas sejam iguais.

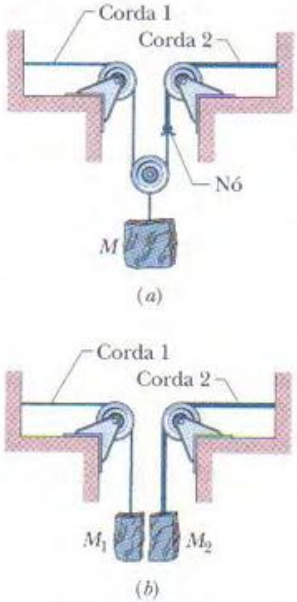


FIG. 16-38 Problema 24.

•••25 Uma corda uniforme de massa $m$ e comprimento $L$ está pendurada em um teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de $y$, a distância da extremidade inferior, e é dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para atravessar a corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$.

## seção 16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

•26 Uma corda na qual ondas podem se propagar tem 2,70 m de comprimento e 260 g de massa. A tensão da corda é 36,0 N. Qual deve ser a freqüência de ondas progressivas com uma amplitude de 7,70 mm para que a potência média seja 85,0 W?

••27 Uma onda senoidal é produzida em uma corda com uma massa específica linear de 2,0 g/m. Enquanto a onda se propaga a energia cinética dos elementos de massa ao longo da corda varia. A Fig. 16-39*a* mostra a taxa $dK/dt$ com a qual a energia cinética passa pelos elementos da corda em um certo instante, em função da distância $x$ ao longo da corda. A Fig. 16-37*b* é semelhante, exceto pelo fato de que mostra a taxa com a qual a energia cinética passa por um certo elemento de massa (situado em um certo ponto), em função do tempo $t$. Nos dois casos, a escala do eixo vertical é definida por $R_s = 10$ W. Qual é a amplitude da onda?

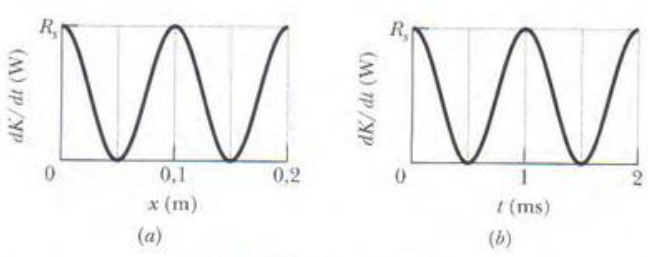


FIG. 16-39 Problema 27.

## seção 16-8 A Equação de Onda

•28 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x,t) = (3{,}00\text{ mm})\ \text{sen}[(4{,}00\text{ m}^{-1})x - (7{,}00\text{ s}^{-1})t].$$

••29 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x,t) = (2{,}00\text{ mm})[(20\text{ m}^{-1})x - (4{,}0\text{ s}^{-1})t]^{0{,}5}.$$

•••30 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada em termos de uma função genérica $h(x,t)$:

$$y(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,h[(30\text{ m}^{-1})x + (6{,}0\text{ s}^{-1})t].$$

## seção 16-10 Interferência de Ondas

•31 Duas ondas progressivas iguais, que se propagam no mesmo sentido, estão defasadas de $\pi/2$ rad. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum $y_m$ das duas ondas?

•32 Que diferença de fase entre duas ondas iguais, a não ser pela constante de fase, que se propagam no mesmo sentido em corda esticada, produz uma onda resultante de amplitude 1,5 vez a amplitude comum das duas ondas? Expresse a resposta (a) em graus, (b) em radianos e (c) em comprimentos de onda.

••33 Duas ondas senoidais com a mesma amplitude de 9,00 mm e o mesmo comprimento de onda se propagam em uma corda que está esticada ao longo de um eixo $x$. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-40, antes e depois que o vale $A$ se desloque de uma distância $d = 56{,}0$ cm em 8,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 8{,}0$ mm. Suponha que a equação de uma das ondas é da forma $y(x,t) = y_m\ \text{sen}(kx \pm \omega t + \phi_1)$, onde $\phi_1 = 0$ e é preciso determinar o sinal que precede $\omega$. Na equação da outra onda, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$, (d) $\phi_2$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

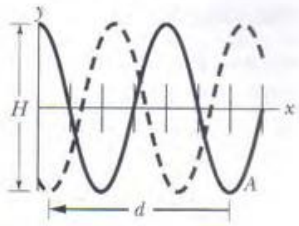


FIG. 16-40 Problema 33.

•••34 Uma onda senoidal de freqüência angular 1200 rad/s e amplitude 3,00 mm é produzida em uma corda de massa específica linear 2,00 g/m e 1200 N de tensão. (a) Qual é a taxa média com a qual a energia é transportada pela onda para a extremidade oposta da corda? (b) Se, ao mesmo tempo, uma onda igual se propaga em uma corda vizinha, de mesmas características, qual é a taxa média total com a qual a energia é transportada pelas ondas à extremidade oposta das duas cordas? Se, em vez disso, as duas ondas são produzidas ao mesmo tempo na *mesma* corda, qual é a taxa média total com a qual transportam energia quando a diferença de fase entre elas é (c) 0, (d) $0{,}4\pi$ rad e (e) $\pi$ rad?

## seção 16-11 Fasores

•35 Duas ondas senoidais de mesma freqüência se propagam no mesmo sentido em uma corda. Se $y_{m1} = 3{,}0$ cm, $y_{m2} = 4{,}0$ cm, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/2$ rad, qual é a amplitude da onda resultante?

••36 Duas ondas senoidais de mesma freqüência e no mesmo sentido são produzidas em uma corda esticada. Uma das ondas

tem uma amplitude de 5,0 mm e a outra uma amplitude de 8,0 mm. (a) Que diferença de fase $\phi_1$ entre as duas ondas resulta na menor amplitude da onda resultante? (b) Qual é essa amplitude mínima? (c) Que diferença de fase $\phi_2$ entre as duas ondas resulta na maior amplitude da onda resultante? (d) Qual é essa amplitude máxima? (e) Qual é a amplitude resultante se o ângulo de fase é $(\phi_1 - \phi_2)/2$?

**••37** Duas ondas senoidais de mesmo período, de amplitudes 5,0 e 7,0 mm, se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada; elas produzem uma onda resultante com uma amplitude de 9,0 mm. A constante de fase da onda de 5,0 mm é 0. Qual é a constante de fase da onda de 7,0 mm?

**••38** Quatro ondas são produzidas na mesma corda e no mesmo sentido:

$$y_1(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}7\pi)$$
$$y_3(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\,\pi t + \pi)$$
$$y_4(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 1{,}7\pi).$$

Qual é a amplitude da onda resultante?

**••39** Duas ondas se propagam na mesma corda:

$$y_1(x,t) = (4{,}60\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (5{,}60\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}80\pi\text{ rad}).$$

Quais são (a) a amplitude e (b) o ângulo de fase (em relação à onda 1) da onda resultante? (c) Se uma terceira onda de amplitude 5,00 mm também é produzida na corda com o mesmo sentido que as duas primeiras, qual deve ser o ângulo de fase para que a amplitude da nova onda resultante seja máxima?

## seção 16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

**•40** Uma corda com 125 cm de comprimento tem uma massa de 2,00 g e uma tensão de 7,00 N. (a) Qual é a velocidade de uma onda nesta corda? (b) Qual é a freqüência de ressonância mais baixa desta corda?

**•41** Quais são (a) a menor freqüência, (b) a segunda menor freqüência mais baixa e (c) a terceira menor freqüência das ondas estacionárias em um fio com 10,0 m de comprimento, 100 g de massa e uma tensão de 250 N?

**•42** A corda $A$ está esticada entre dois suportes separados por uma distância $L$. A corda $B$, com a mesma massa específica linear e a mesma tensão que a corda $A$, está esticada entre dois suportes separados por uma distância $4L$. Considere os primeiros oito harmônicos da corda $B$. Para quais destes oito harmônicos de $B$ a freqüência coincide com a freqüência (a) do primeiro harmônico de $A$, (b) do segundo harmônico de $A$ e (c) do terceiro harmônico de $A$?

**•43** Uma corda fixa nas duas extremidades tem 8,40 m de comprimento, uma massa de 0,120 kg e uma tensão de 96,0 N. (a) Qual é a velocidade das ondas na corda? (b) Qual é o maior comprimento de onda possível para uma onda estacionária na corda? (c) Determine a freqüência dessa onda.

**•44** Duas ondas senoidais com comprimentos de onda e amplitudes iguais se propagam em sentidos opostos em uma corda com uma velocidade de 10 cm/s. Se o intervalo de tempo entre os instantes nos quais a corda fica reta é 0,50 s, qual é o comprimento de onda das ondas?

**•45** Uma corda de violão de náilon tem uma massa específica linear de 7,20 g/m e está sujeita a uma tensão de 150 N. Os suportes fixos estão separados por uma distância $D = 90{,}0$ cm. A corda está oscilando da forma mostrada na Fig. 16-41. Calcule (a) a velocidade, (b) o comprimento de onda e (c) a freqüência das ondas progressivas cuja superposição produz a onda estacionária.

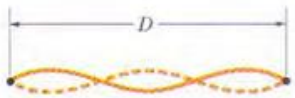



FIG. 16-41 Problema 45.

**•46** Uma corda submetida a uma tensão $\tau_i$ oscila no terceiro harmônico com uma freqüência $f_3$, e as ondas na corda têm um comprimento de onda $\lambda_3$. Se a tensão é aumentada para $\tau_f = 4\tau_i$ e a corda é novamente posta para oscilar no terceiro harmônico, qual é (a) a freqüência de oscilação em termos de $f_3$ e (b) o comprimento de onda das ondas em termos de $\lambda_3$?

**•47** Uma corda que está esticada entre suportes fixos separados por uma distância de 75,0 cm possui freqüências de ressonância de 420 e 315 Hz, com nenhuma outra freqüência de ressonância entre esses dois valores. Determine (a) a freqüência de ressonância mais baixa e (b) a velocidade da onda.

**•48** Se uma linha de transmissão em um clima frio fica coberta de gelo, o aumento do diâmetro leva à formação de vórtices no vento que passa. As variações de pressão associadas aos vórtices podem fazer a linha oscilar (*galopar*), principalmente se a freqüência das variações de pressão coincide com uma das freqüências de ressonância da linha. Em linhas compridas, as freqüências de ressonância estão tão próximas que praticamente qualquer velocidade do vento pode excitar um modo de ressonância com amplitude suficiente para derrubar as torres de sustentação ou *curto-circuitar* as linhas. Se uma linha de transmissão tem um comprimento de 347 m, uma massa específica linear de 3,35 kg/m e uma tensão de 65,2 MN, quais são (a) a freqüência do modo fundamental e (b) a diferença de freqüência entre modos sucessivos?

**•49** Uma das freqüências harmônicas de uma certa corda sob tensão é 325 Hz. A freqüência harmônica seguinte é 390 Hz. Qual é a freqüência harmônica que se segue à de 195 Hz?

**••50** Uma corda sujeita a uma tensão de 200 N e fixa nas duas extremidades oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0{,}10\text{ m})\,(\text{sen }\pi x/2)\,\text{sen }12\pi t,$$

onde $x = 0$ em uma das extremidades da corda, $x$ está em metros e $t$ está em segundos. Quais são (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária, qual é o período de oscilação?

**••51** Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y' = (0{,}50\text{ cm})\,\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3}\text{ cm}^{-1}\right)x\right]\cos[(40\pi\text{ s}^{-1})t].$$

Quais são (a) a amplitude e (b) a velocidade das duas ondas (iguais, exceto pelo sentido de propagação) cuja superposição produz esta oscilação? (c) Qual é a distância entre os nós? (d) Qual é a velocidade transversal de uma partícula da corda no ponto $x = 1{,}5$ cm para $t = 9/8$ s?

**••52** Uma onda estacionária em uma corda é descrita por

$$y(x,t) = 0{,}040\,(\text{sen }5\pi x)\,(\cos 40\pi t),$$

onde $x$ e $y$ estão em metros e $t$ em segundos. Para $x \geq 0$, qual é a localização do nó com (a) o menor, (b) o segundo menor e (c) o terceiro menor valor de $x$? (d) Qual é o período do movimento oscilatório de qualquer ponto (que não seja um nó)? Quais são (e) a velocidade e (f) as amplitudes das duas ondas progressivas

que interferem para produzir esta onda? Para $t \geq 0$, quais são (g) o primeiro, (h) o segundo e (i) o terceiro instante em que todos os pontos da corda possuem velocidade transversal nula?

**••53** Duas ondas são geradas em uma corda com 3,0 m de comprimento para produzir uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda com uma amplitude de 1,0 cm. A velocidade da onda é 100 m/s. Suponha que a equação de uma das ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação da outra onda, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

**••54** Uma certa onda estacionária transversal em uma corda longa possui um antinó em $x = 0$ e um nó vizinho em $x = 0{,}10$ m. O deslocamento $y(t)$ da partícula da corda situada em $x = 0$ é mostrado na Fig. 16-42, onde a escala do eixo $y$ é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. Para $t = 0{,}50$ s, qual é o deslocamento da partícula da corda situada (a) em $x = 0{,}20$ m e (b) em $x = 0{,}30$ m? Qual é a velocidade transversal da partícula situada em $x = 0{,}20$ (c) no instante $t = 0{,}50$ s e (d) no instante $t = 1{,}0$ s? (e) Plote a onda estacionária no instante $t = 0{,}50$ s no intervalo de $x = 0$ a $x = 0{,}40$ m.

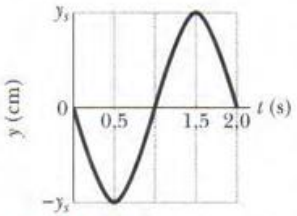


FIG. 16-42 Problema 54.

**••55** Um gerador em uma das extremidades de uma corda muito longa produz uma onda dada por

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos\frac{\pi}{2}[(2{,}00 \text{ m}^{-1})x + (8{,}00 \text{ s}^{-1})t],$$

e um gerador na outra extremidade produz a onda

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos\frac{\pi}{2}[(2{,}00 \text{ m}^{-1})x - (8{,}00 \text{ s}^{-1})t].$$

Calcule (a) a freqüência, (b) o comprimento de onda e (c) a velocidade de cada onda. Para $x \geq 0$, qual é a posição do nó com (d) o menor, (e) o segundo menor e (f) o terceiro menor valor de $x$? Para $x \geq 0$, qual é a posição do antinó com (g) o menor, (h) o segundo menor e (i) o terceiro menor valor de $x$?

**••56** Duas ondas senoidais com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda se propagam simultaneamente em uma corda esticada ao longo de um eixo $x$. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-43, uma vez com o antinó $A$ na posição de máximo deslocamento para cima e outra, 6,0 ms depois, com o antinó $A$ na posição de máximo deslocamento máximo para baixo. A distância entre as marcas do eixo $x$ é 10 cm; $H = 1{,}80$ cm. A equação de uma das duas ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação para a outra onda, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

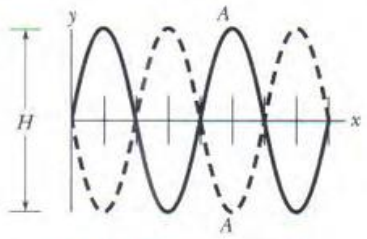


FIG. 16-43 Problema 56.

**••57** As duas ondas a seguir se propagam em sentidos opostos em uma corda horizontal, criando uma onda estacionária em um plano vertical:

$$y_1(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4{,}00\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(4{,}00\pi x + 400\pi t),$$

onde $x$ está em metros e $t$ em segundos. Um antinó está localizado no ponto $A$. No intervalo de tempo que este ponto leva para passar da posição de deslocamento máximo para cima para a posição de deslocamento máximo para baixo, qual é o deslocamento de cada onda ao longo da corda?

**••58** Na Fig. 16-44 uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto $P$ e apoiada em um suporte no ponto $Q$, é tensionada por um bloco de massa $m$. A distância entre $P$ e $Q$ é $L = 1{,}20$ m, a massa específica linear da corda é $\mu = 1{,}6$ g/m e a freqüência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto $P$ é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto $Q$. Qual deve ser o valor da massa $m$ para que o oscilador produza na corda o quarto harmônico? (b) Qual é o modo produzido na corda pelo oscilador para $m = 1{,}00$ kg?

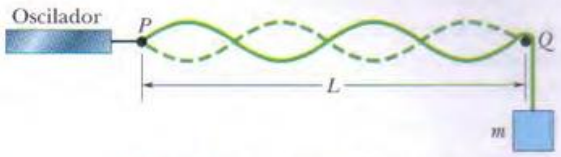


FIG. 16-44 Problemas 58 e 60.

**•••59** Na Fig. 16-45 um fio de alumínio, de comprimento $L_1 = 60{,}0$ cm, seção reta $1{,}00 \times 10^{-2}$ cm$^2$ e massa específica 2,60 g/cm$^3$, está soldado a um fio de aço de massa específica 7,80 g/cm$^3$ e mesma seção reta. O fio composto, tensionado por um bloco de massa $m = 10{,}0$ kg, está disposto de tal forma que a distância $L_2$ entre o ponto de solda e a polia é 86,6 cm. Ondas transversais são excitadas no fio por uma fonte externa de freqüência variável; um nó está situado na polia. (a) Determine a menor freqüência que produz uma onda estacionária tendo o ponto de solda como um dos nós. (b) Quantos nós são observados para esta freqüência?

FIG. 16-45 Problema 59.

**•••60** Na Fig. 16-44 uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto $P$ e apoiada em um suporte no ponto $Q$, é tensionada por um bloco de massa $m$. A distância entre $P$ e $Q$ é $L = 1{,}20$ m, e a freqüência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto $P$ é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto $Q$. Uma onda estacionária aparece quando a massa do bloco é 286,1 g ou 447,0 g, mas não aparece para nenhuma massa entre esses dois valores. Qual é a massa específica linear da corda?

### Problemas Adicionais

**61** Três ondas senoidais de mesma freqüência se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo $x$. Suas amplitudes são $y_1$, $y_1/2$ e $y_1/3$, e suas constantes de fase são 0, $\pi/2$ e $\pi$, respecti-

vamente. Quais são (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante? (c) Plote a onda resultante no instante $t = 0$ e discuta seu comportamento quando $t$ aumenta.

**62** A Fig. 16-46 mostra o deslocamento $y$ em função do tempo $t$ do ponto de uma corda situado em $x = 0$ quando uma onda passa por esse ponto. A escala do eixo $y$ é definida por $y_s = 6{,}0$ mm. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de $\phi$? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para $\phi$ é o valor correto substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para $\omega$ e plotando a função assim obtida.)

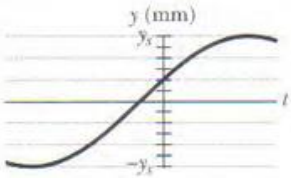


FIG. 16-46 Problema 62.

**63** Duas ondas senoidais iguais, a não ser pela fase, se propagam no mesmo sentido em uma corda produzindo uma onda resultante $y'(x, t) = (3{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}(20x - 4{,}0t + 0{,}820 \text{ rad})$, com $x$ em metros e $t$ em segundos. Determine (a) o comprimento de onda $\lambda$ das duas ondas, (b) a diferença de fase entre elas e (c) a amplitude $y_m$ das duas ondas.

**64** A Fig. 16-47 mostra a aceleração transversal $a_y$ em função do tempo $t$ do ponto $x = 0$ de uma corda, quando uma onda com a forma geral $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$ passa pelo ponto. A escala do eixo vertical é definida por $a_s = 400 \text{ m/s}^2$. Qual é o valor de $\phi$? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para $\phi$ é o valor correto substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para $\omega$ e plotando a função assim obtida.)

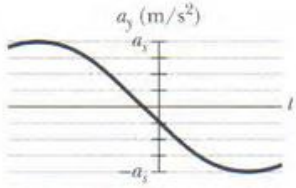


FIG. 16-47 Problema 64.

**65** No instante $t = 0$ e na posição $x = 0$ de uma corda uma onda senoidal progressiva com uma freqüência angular de 440 rad/s tem um deslocamento $y = +4{,}5$ mm e uma velocidade transversal $u = -0{,}75$ m/s. Se a onda tem a forma geral $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$, qual é a constante de fase $\phi$?

**66** Um pulso isolado, cuja forma de onda é dada por $h(x - 5t)$, com $x$ em centímetros e $t$ em segundos, é mostrado na Fig. 16-48 para $t = 0$. A escala do eixo vertical é definida por $h_s = 2$. Quais são (a) a velocidade e (b) o sentido de propagação do pulso? (c) Plote $h(x - 5t)$ em função de $x$ para $t = 2$ s. (d) Plote $h(x - 5t)$ em função de $t$ para $x = 10$ cm.

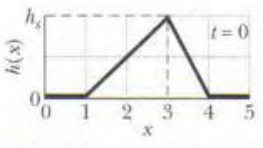


FIG. 16-48 Problema 66.

**67** Uma onda transversal senoidal é gerada em uma extremidade de uma longa corda horizontal por uma barra que se move para cima e para baixo ao longo de uma distância de 1,00 cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma massa específica linear de 120 g/m e é mantida sob uma tensão de 90,0 N. Determine o valor máximo (a) da velocidade transversal $u$ e (b) da componente transversal da tensão $\tau$.

(c) Mostre que esses dois valores máximos calculados ocorrem para os mesmos valores da fase da onda. Qual é o deslocamento transversal $y$ da corda nessas fases? (d) Qual é a taxa máxima de transferência de energia ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal $y$ quando essa transferência máxima ocorre? (f) Qual é a taxa mínima de transferência de energia ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal $y$ quando essa transferência mínima ocorre?

**68** Duas ondas senoidais de 120 Hz, com a mesma amplitude, se propagam no sentido positivo de um eixo $x$ em uma corda sob tensão. As ondas podem ser geradas em fase ou defasadas. A Fig. 16-49 mostra a amplitude $y'$ da onda resultante em função da distância de defasagem (distância entre as ondas no mesmo instante). A escala do eixo vertical é definida por $y'_s = 6{,}0$ mm. Se as equações das duas ondas são da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, quais são (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$?

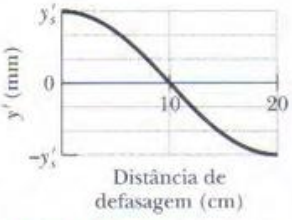


FIG. 16-49 Problema 68.

**69** Uma onda transversal senoidal de amplitude $y_m$ e comprimento de onda $\lambda$ se propaga em uma corda esticada. (a) Determine a razão entre a velocidade máxima de uma partícula (a velocidade com a qual uma partícula da corda se move na direção transversal à corda) e a velocidade da onda. (b) Essa razão depende do material do qual é feita a corda?

**70** Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido positivo de um eixo $x$ tem uma amplitude de 2,0 cm, um comprimento de onda de 10 cm e uma freqüência de 400 Hz. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) $y_m$, (b) $k$, (c) $\omega$ e (d) o sinal que precede $\omega$. Quais são (e) a velocidade transversal máxima de um ponto da corda e (f) a velocidade da onda?

**71** Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido negativo de um eixo $x$ tem uma amplitude de 1,00 cm, uma freqüência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) $y_m$, (b) $\omega$, (c) $k$ e (d) o sinal que precede $\omega$.

**72** Duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada. Para a onda 1, $y_m = 3{,}0$ mm e $\phi = 0$; para a onda 2, $y_m = 5{,}0$ mm e $\phi = 70°$. Quais são (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante?

**73** Uma onda tem uma velocidade de 240 m/s e um comprimento de onda de 3,2 m. Quais são (a) a freqüência e (b) o período da onda?

**74** A menor freqüência de ressonância de uma certa corda de violino é a da nota lá de concerto (440 Hz). Qual é a freqüência (a) do segundo e (b) do terceiro harmônico da corda?

**75** Uma corda de 120 cm de comprimento está esticada entre dois suportes fixos. Quais são (a) o maior, (b) o segundo maior e (c) o terceiro maior comprimento de onda das ondas que se propagam na corda para produzir ondas estacionárias? (d) Esboce essas ondas estacionárias.

**76** A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = 0{,}15 \operatorname{sen}(0{,}79x - 13t),$$

onde $x$ e $y$ estão em metros e $t$ está em segundos. (a) Qual é o deslocamento $y$ em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s? Uma segunda onda é combinada com a primeira para produzir ondas estacionárias

na corda. Se a equação da segunda onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (b) $y_m$, (c) $k$, (d) $\omega$ e (e) o sinal que precede $\omega$. (f) Qual é o deslocamento da onda estacionária resultante em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s?

**77** Um fio de 1,50 m de comprimento tem uma massa de 8,70 g e está sob uma tensão de 120 N. O fio é fixado rigidamente nas duas extremidades e posto para oscilar. (a) Qual é a velocidade das ondas no fio? Qual é o comprimento de onda das ondas que produzem ondas estacionárias com (b) meio comprimento de onda e (c) um comprimento de onda? Qual é a freqüência das ondas que produzem ondas estacionárias com (d) meio comprimento de onda e (e) um comprimento de onda?

**78** Energia é transmitida a uma taxa $P_1$ por uma onda de freqüência $f_1$ em uma corda sob uma tensão $\tau_1$. Qual é a nova taxa de transmissão de energia $P_2$, em termos de $P_1$, (a) se a tensão é aumentada para $\tau_2 = 4\tau_1$ e (b) se, em vez disso, a freqüência é reduzida para $f_2 = f_1/2$?

**79** A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = (2{,}0\text{ mm})\operatorname{sen}[(20\text{ m}^{-1})x - (600\text{ s}^{-1})t].$$

Determine (a) a amplitude, (b) a freqüência, (c) a velocidade (incluindo o sinal) e (d) o comprimento de onda da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda.

**80** As oscilações de um diapasão de 600 Hz produzem ondas estacionárias em uma corda presa nas duas extremidades. A velocidade das ondas na corda é 400 m/s. A onda estacionária tem dois comprimentos de onda e uma amplitude de 2,0 mm. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Escreva uma expressão para o deslocamento da corda em função da posição e do tempo.

**81** Em um experimento com ondas estacionárias, uma corda de 90 cm de comprimento está presa a um dos braços de um diapasão excitado eletricamente, que oscila perpendicularmente à corda com uma freqüência de 60 Hz. A massa da corda é 0,044 kg. A que tensão a corda deve ser submetida (há pesos amarrados na outra extremidade) para oscilar com dois comprimentos de onda?

**82** *Colete à prova de balas.* Quando um projétil veloz, como uma bala ou um fragmento de bomba, atinge um colete moderno à prova de balas o tecido do colete detém o projétil e impede a perfuração dispersando rapidamente a energia por uma grande área. Essa dispersão é realizada por pulsos longitudinais e transversais que se afastam *radialmente* do ponto de impacto, onde o projétil produz uma depressão em forma de cone no tecido. O pulso longitudinal, que se propaga ao longo das fibras do tecido com velocidade $v_l$, faz com que as fibras se afinem e se distendam, com uma transferência radial de massa na direção do ponto de impacto. Uma dessas fibras radiais aparece na Fig. 16-50*a*. Parte da energia do projétil é dissipada nessa deformação das fibras. O pulso transversal, que se propaga com uma velocidade menor $v_t$, está associado à depressão. À medida que o projétil penetra no tecido o raio da depressão aumenta, fazendo com que o material do colete se mova na mesma direção que o projétil (perpendicularmente à direção e propagação do pulso transversal). O resto da energia do projétil é dissipado nesse movimento. Toda a energia que não está envolvida na deformação permanente das fibras é convertida em energia térmica.

A Fig. 16-50*b* mostra um gráfico da velocidade $v$ em função do tempo $t$ para uma bala com uma massa de 10,2 g disparada por um revólver .38 *Special* em um colete à prova de balas. As escalas dos eixos vertical e horizontal são definidas por $v_s = 300$ m/s e $t_s = 40{,}0$ μs. Suponha que $v_l = 2000$ m/s e que o meio ângulo $\theta$ da depressão causada pela bala é 60°. No final da colisão, qual é o raio (a) da região deformada e (b) da depressão (supondo que a pessoa que usava o colete permaneceu imóvel)?

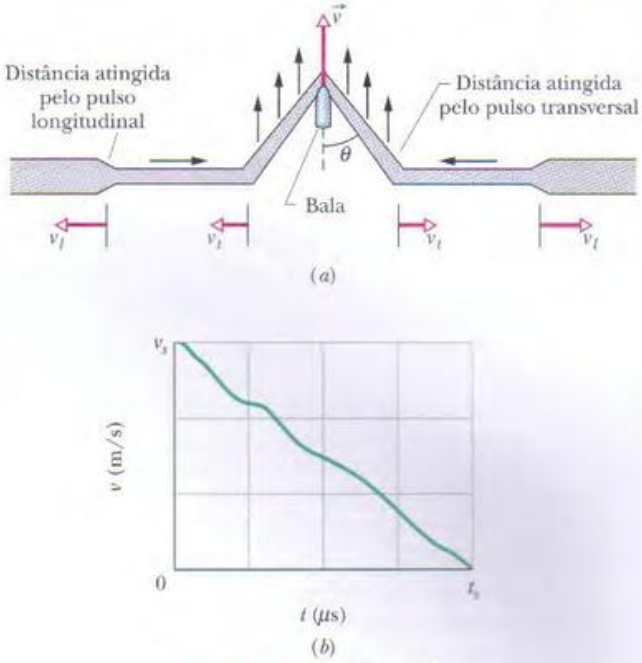



**FIG. 16-50** Problema 82.

**83** Qual é a onda transversal mais rápida que pode ser produzida em um fio de aço? Por razões de segurança, a tensão máxima à qual um fio de aço deve ser submetido é $7{,}00 \times 10^8$ N/m$^2$. A massa específica do aço é 7800 kg/m$^3$. (b) A resposta depende do diâmetro do fio?

**84** (a) Escreva uma equação que descreva uma onda transversal senoidal se propagando em uma corda no sentido positivo de um eixo $y$ com um número de onda de 60 cm$^{-1}$, um período de 0,20 s e uma amplitude de 3,0 mm. Tome a direção transversal como a direção $z$. (b) Qual é a velocidade transversal máxima de um ponto da corda?

**85** Uma onda em uma corda é descrita por

$$y(x, t) = 15{,}0\operatorname{sen}(\pi x/8 - 4\pi t),$$

onde $x$ e $y$ estão em centímetros e $t$ está em segundos. (a) Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (b) Qual é a máxima velocidade transversal em qualquer ponto na corda? (c) Qual é o módulo da aceleração transversal em um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (d) Qual é o módulo da aceleração transversal máxima em qualquer ponto da corda?

**86** Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0{,}050\cos(\pi x - 4\pi t)$$
$$y_2 = 0{,}050\cos(\pi x + 4\pi t),$$

onde $x$, $y_1$ e $y_2$ estão em metros e $t$ está em segundos. (a) Qual é o menor valor positivo de $x$ que corresponde a um nó? Começando em $t = 0$, qual é o valor do (b) primeiro, (c) segundo e (d) terceiro instantes em que a partícula situada em $x = 0$ tem velocidade nula?

**87** Em uma experiência de laboratório, uma corda horizontal de 1,2 kg é fixada nas duas extremidades ($x = 0$ e $x = 2{,}0$ m) e colocada para oscilar para cima e para baixo no modo fundamental, com uma freqüência de 5,0 Hz. No instante $t = 0$ o ponto situado em $x = 1{,}0$ m tem deslocamento nulo e se move para cima no sentido positivo de um eixo $y$ com uma velocidade transversal de 5,0 m/s. Quais são (a) a amplitude do movimento nesse ponto e (b) a tensão da corda? (c) Escreva a equação da onda estacionária para o modo fundamental.

**88** Uma certa onda transversal senoidal com um comprimento de onda de 20 cm está se propagando no sentido positivo de um eixo $x$. A Fig. 16-51 mostra a velocidade transversal da partícula situada em $x = 0$ em função do tempo; a escala do eixo vertical é definida por $u_s = 5{,}0$ cm/s. Quais são (a) a velocidade, (b) a amplitude e (c) a freqüência da onda? (d) Plote a onda entre $x = 0$ e $x = 20$ cm para o instante $t = 2{,}0$ s.

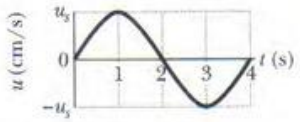


FIG. 16-51 Problema 88.

**89** A borracha usada em algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de deformações. Uma tira desse material tem um comprimento $\ell$ no estado relaxado e uma massa $m$. Quando uma força $F$ é aplicada, a tira sofre um estiramento $\Delta\ell$. (a) Qual é a velocidade (em termos de $m$, $\Delta\ell$ e da constante elástica $k$) das ondas transversais nesta tira de borracha sob tensão? (b) Use a resposta do item (a) para mostrar que o tempo necessário para que um pulso transversal atravesse a tira de borracha é proporcional a $1/\sqrt{\Delta\ell}$ se $\Delta\ell \ll \ell$ e é constante se $\Delta\ell \gg \ell$.

**90** Duas ondas,

$$y_1 = (2{,}50\text{ mm})\,\text{sen}[(25{,}1\text{ rad/m})x - (440\text{ rad/s})t]$$

e

$$y_2 = (1{,}50\text{ mm})\,\text{sen}[(25{,}1\text{ rad/m})x + (440\text{ rad/s})t],$$

se propagam em uma corda esticada. (a) Plote a onda resultante em função de $t$ para $x = 0$, $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$ e $\lambda/2$, onde $\lambda$ é o comprimento de onda. Os gráficos devem se estender de $t = 0$ até pouco mais de um período. (b) A onda resultante é a superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva. Em que sentido se propaga a onda progressiva? (c) Como devem ser mudadas as ondas originais para que a onda resultante seja uma superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva com as mesmas amplitudes que antes, mas com a onda progressiva se propagando no sentido oposto? Use os gráficos do item (a) para determinar o local em que a amplitude das oscilações é (d) máxima e (e) mínima. (f) Qual é a relação entre a amplitude máxima das oscilações e a amplitude das ondas originais? (g) Qual é a relação entre a amplitude mínima das oscilações e as amplitudes das ondas originais?

**91** Duas ondas são descritas por

$$y_1 = 0{,}30\,\text{sen}[\pi(5x - 200)t]$$

e

$$y_2 = 0{,}30\,\text{sen}[\pi(5x - 200t) + \pi/3],$$

onde $y_1$, $y_2$ e $x$ estão em metros e $t$ está em segundos. Quando as duas ondas são combinadas é produzida uma onda progressiva. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade e (c) o comprimento de onda da onda progressiva.

**92** A velocidade no vácuo das ondas eletromagnéticas (como as ondas de luz visível, as ondas de rádio e os raios x) é $3{,}0 \times 10^8$ m/s. (a) Os comprimentos de onda da luz visível vão de aproximadamente 400 nm no violeta a 700 nm no vermelho. Qual é o intervalo de freqüências dessas ondas? (b) O intervalo de freqüências das ondas curtas de rádio (como as ondas de rádio FM e de VHF da televisão) é de 1,5 a 300 MHz. Qual é o intervalo de comprimentos de onda correspondente? (c) Os comprimentos de onda dos raios X vão de aproximadamente 5,0 nm a $1{,}0 \times 10^{-2}$ nm. Qual é o intervalo de freqüências dos raios X?

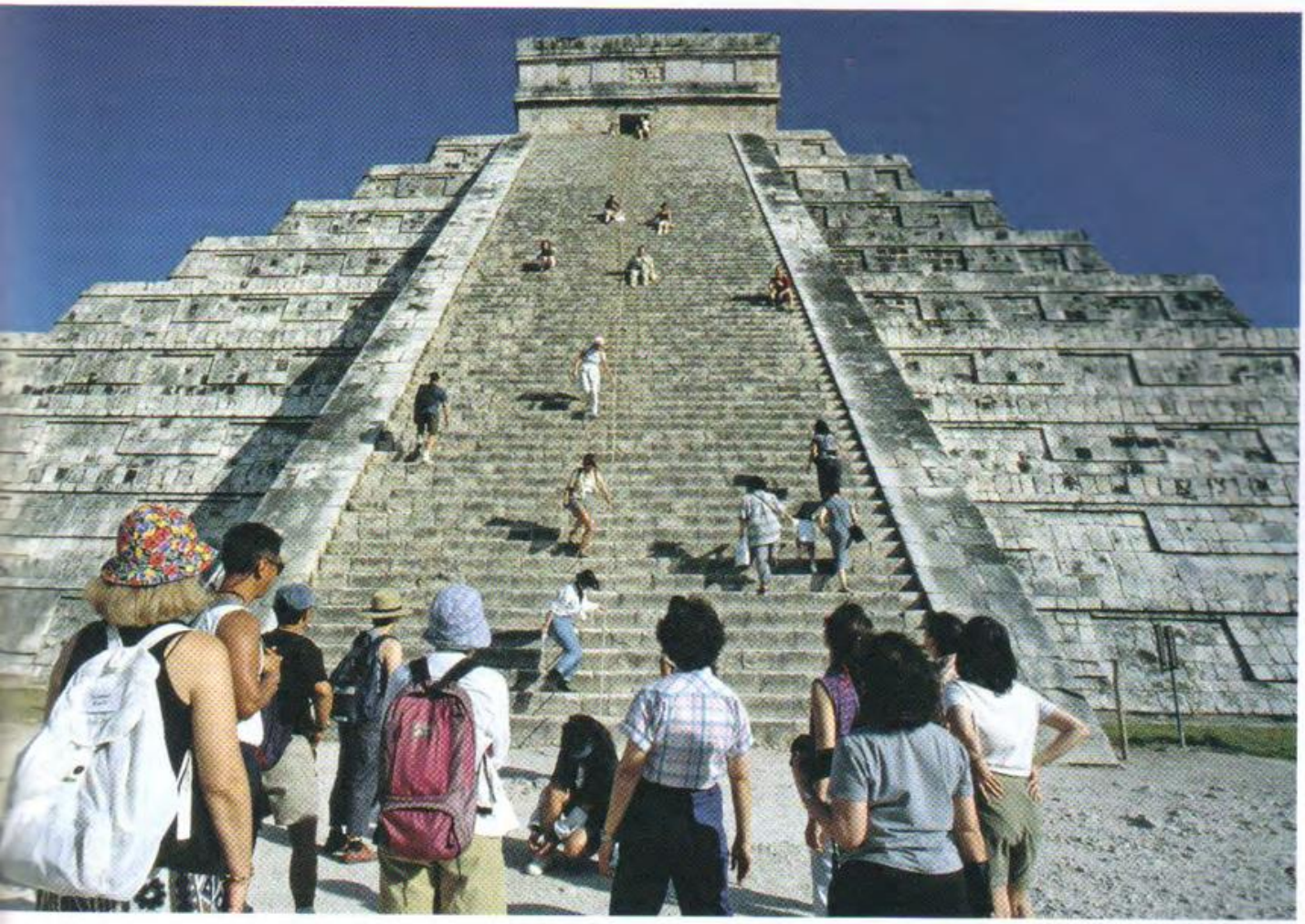
**93** Uma onda progressiva em uma corda é descrita por

$$y = 2{,}0\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40} + \frac{x}{80}\right)\right],$$

onde $x$ e $y$ estão em centímetros e $t$ em segundos. (a) Para $t = 0$, plote $y$ em função de $x$ para $0 \le x \le 160$ cm. (b) Repita o item (a) para $t = 0{,}05$ s e para $t = 0{,}10$ s. A partir desses gráficos, determine (c) a velocidade da onda e (d) o sentido de propagação da onda.

# Ondas — II

17



Andoni Canela/Age Fotostock America, Inc.

*Os ecos podem ser encantadores em ambientes bucólicos e desagradáveis nos auditórios, mas costumam ser fiéis à fonte sonora. O eco de um bater de palmas, por exemplo, é quase sempre o som de um bater de palmas. Perto da escadaria da foto, porém, que pertence a uma pirâmide situada nas ruínas maias de Chichen Itza, no México, o eco de um bater de palmas é uma nota musical cuja freqüência diminui com o tempo.*

## *O que produz um eco musical nas escadas de uma pirâmide dos maias?*

A resposta está neste capítulo.

**FIG. 17-1** Esta tartaruga-cabeçuda está sendo examinada com ultra-som (que possui uma freqüência acima de nossa faixa de audição); uma imagem do interior do animal está sendo mostrada em um monitor à direita da foto. *(Mauro Fermariello/SPL/Photo Researchers)*

## 17-1 O QUE É FÍSICA?

A física das ondas sonoras está presente nos artigos científicos de muitas especialidades. Vamos dar apenas alguns exemplos. Os fisiologistas querem saber como a fala é produzida, como corrigir os defeitos de dicção, como reduzir a perda da audição e até mesmo por que uma pessoa ronca. Os engenheiros acústicos procuram melhorar a acústica das catedrais e salas de concertos, reduzir o nível de ruído perto de rodovias e obras públicas e reproduzir sons em sistemas de alto-falantes com o máximo de fidelidade. Os engenheiros aeronáuticos estudam as ondas de choque produzidas pelos caças supersônicos e o ruído dos jatos comerciais nas proximidades dos aeroportos. Os engenheiros biomédicos procuram descobrir o que os ruídos produzidos pelo coração e pelos pulmões significam em termos da saúde do paciente. Os paleontólogos tentam associar os ossos dos dinossauros ao modo como emitiam sons. Os engenheiros militares tentam descobrir se é possível localizar um atirador de tocaia pelo som dos seus disparos e, do lado mais ameno, os biólogos estudam o ronronar dos gatos.

Para começar nossa discussão da física do som, devemos responder à pergunta: "O que *são* as ondas sonoras?"

## 17-2 | Ondas Sonoras

Como vimos no Capítulo 16, as ondas mecânicas são ondas que necessitam de um meio material para se propagar. Existem dois tipos de ondas mecânicas: as *ondas transversais*, nas quais as oscilações são perpendiculares à direção de propagação, e as *ondas longitudinais*, em que as oscilações acontecem na direção de propagação da onda.

Neste livro, uma **onda sonora** é definida genericamente como qualquer onda longitudinal. As equipes de prospecção usam essas ondas para sondar a crosta terrestre em busca de petróleo. Os navios possuem equipamentos de localização através do som (sonar) para detectar obstáculos submersos. Os submarinos usam ondas sonoras para emboscar outros submarinos ouvindo os ruídos produzidos pelo sistema de propulsão. A Fig. 17-1 mostra como ondas sonoras podem ser usadas para visualizar os tecidos moles dos seres vivos. Neste capítulo, vamos nos concentrar nas ondas sonoras que se propagam no ar e podem ser ouvidas pelas pessoas.

A Fig. 17-2 ilustra várias idéias que serão usadas em nossas discussões. O ponto *S* representa uma pequena fonte sonora, chamada *fonte pontual*, que emite ondas sonoras em todas as direções. As *frentes de onda* e os *raios* indicam a direção de propagação e o espalhamento das ondas sonoras. **Frentes de onda** são superfícies nas quais as oscilações produzidas pelas ondas sonoras têm o mesmo valor; essas superfícies são representadas por circunferências completas ou parciais em um desenho bidimensional de uma fonte pontual. **Raios** são retas perpendiculares às frentes de onda que indicam a direção de propagação das frentes de onda. As setas duplas sobrepostas aos raios da Fig. 17-2 indicam que as oscilações longitudinais do ar são paralelas aos raios.

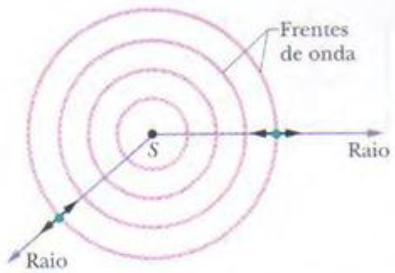



**FIG. 17-2** Uma onda sonora se propaga a partir de uma fonte pontual *S* em um meio tridimensional. As frentes de onda formam esferas com centro em *S*; os raios são perpendiculares às frentes de onda. As setas de duas cabeças mostram que os elementos do meio oscilam paralelamente aos raios.

Nas proximidades de uma fonte pontual como a da Fig. 17-2 as frentes de onda são esféricas e se espalham nas três dimensões; ondas desse tipo são chamadas de *ondas esféricas*. À medida que as frentes de onda se expandem e seu raio aumenta sua curvatura diminui. Muito longe da fonte as frentes de onda são aproximadamente planas (ou retas, em desenhos bidimensionais); ondas desse tipo são chamadas de *ondas planas*.

## 17-3 | A Velocidade do Som

A velocidade de qualquer onda mecânica, transversal ou longitudinal, depende tanto das propriedades inerciais do meio (para armazenar energia cinética) como das propriedades elásticas (para armazenar energia potencial). Assim, podemos ge-

neralizar a Eq. 16-26, que fornece a velocidade de uma onda transversal em uma corda, escrevendo

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}, \tag{17-1}$$

onde (para ondas transversais) $\tau$ é a tensão da corda e $\mu$ é a massa específica linear da corda. Se o meio de propagação é o ar e a onda é longitudinal, podemos supor que a propriedade inercial, correspondente a $\mu$, é a massa específica $\rho$ do ar. O que corresponde à propriedade elástica?

Em uma corda esticada, a energia potencial está associada à deformação periódica dos elementos da corda quando a onda passa por eles. Quando uma onda sonora se propaga no ar a energia potencial está associada à compressão e à expansão de pequenos elementos de volume do ar. A propriedade que determina o quanto um elemento de um meio muda de volume quando é submetido a uma pressão (força por unidade de área) é o **módulo de elasticidade volumétrico** $B$, definido (pela Eq. 12-25) como

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} \quad \text{(definição de módulo de elasticidade volumétrico).} \tag{17-2}$$

Aqui $\Delta V/V$ é a variação relativa de volume produzida por uma variação de pressão $\Delta p$. Como vimos na Seção 14-3, a unidade de pressão no SI é o newton por metro quadrado, que recebe um nome especial, o *pascal* (Pa). De acordo com a Eq. 17-2, a unidade de $B$ também é o pascal. Os sinais de $\Delta p$ e $\Delta V$ são sempre opostos: Quando aumentamos a pressão sobre um elemento (ou seja, $\Delta p$ é positivo), o volume diminui ($\Delta V$ é negativo). Incluímos um sinal negativo na Eq. 17-2 para que $B$ seja um número positivo. Substituindo $\tau$ por $B$ e $\mu$ por $\rho$ na Eq. 17-1, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(velocidade do som)} \tag{17-3}$$

como a velocidade do som em um meio de módulo de elasticidade volumétrico $B$ e massa específica $\rho$. A Tabela 17-1 mostra a velocidade do som em vários meios.

A massa específica da água é quase 1000 vezes maior que a do ar. Se esse fosse o único fator importante, esperaríamos, de acordo com a Eq. 17-3, que a velocidade do som na água fosse muito menor que a velocidade do som no ar. Entretanto, a Tabela 17-1 mostra o contrário. Concluímos (novamente a partir da Eq. 17-3) que o módulo de elasticidade volumétrico da água é mais de 1000 vezes maior que o do ar. Este é, realmente, o caso. A água é muito mais incompressível do que o ar, o que (veja a Eq. 17-2) é outra forma de dizer que seu módulo de elasticidade volumétrico é muito maior.

**TABELA 17-1**

**A Velocidade do Som**[a]

| Meio | Velocidade (m/s) |
|---|---|
| *Gases* | |
| Ar (0°C) | 331 |
| Ar (20°C) | 343 |
| Hélio | 965 |
| Hidrogênio | 1284 |
| *Líquidos* | |
| Água (0°C) | 1402 |
| Água (20°C) | 1482 |
| Água salgada[b] | 1522 |
| *Sólidos* | |
| Aço | 5941 |
| Alumínio | 6420 |
| Granito | 6000 |

[a] A 0°C e 1 atm de pressão, a menos que haja uma indicação em contrário.
[b] A 20°C e com 3,5% de salinidade.

## Demonstração Formal da Eq. 17-3

Vamos agora demonstrar a Eq. 17-3 aplicando diretamente as leis de Newton. Considere um pulso isolado de compressão do ar que se propaga da direita para a esquerda, com velocidade $v$, em um tubo como o da Fig. 16-2. Vamos escolher um referencial que se move com a mesma velocidade que o pulso. A Fig. 17-3*a* mostra a situação do ponto de vista deste referencial. O pulso permanece estacionário e o ar passa por ele com velocidade $v$, movendo-se da esquerda para a direita.

Seja $p$ a pressão do ar não perturbado e $p + \Delta p$ a pressão na região do pulso, onde $\Delta p$ é positivo devido à compressão. Considere um elemento de ar com espessura $\Delta x$ e seção reta $A$, movendo-se em direção ao pulso com velocidade $v$. Quando esse elemento de ar penetra no pulso a borda dianteira encontra uma região de maior pressão, que reduz a velocidade do elemento para $v + \Delta v$, onde $\Delta v$ é um número negativo. Essa redução de velocidade termina quando a borda traseira do elemento penetra no pulso, o que exige um intervalo de tempo dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \tag{17-4}$$

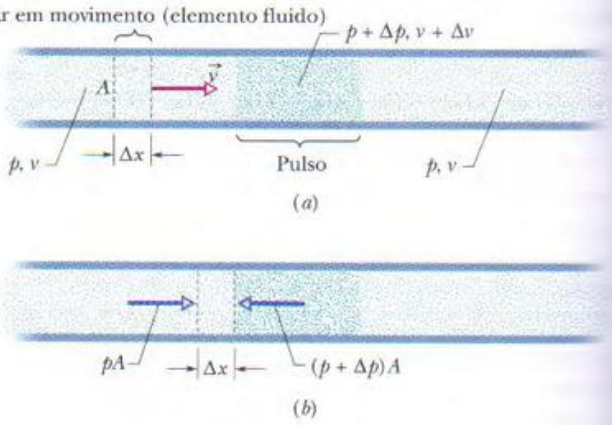



**FIG. 17-3** Um pulso de compressão se propaga da direita para a esquerda em um tubo longo cheio de ar. O referencial da figura foi escolhido de tal forma que o pulso permanece em repouso e o ar se move da esquerda para a direita. (*a*) Um elemento de ar de largura $\Delta x$ se move em direção ao pulso com velocidade $v$. (*b*) A borda dianteira do elemento penetra no pulso. São mostradas as forças (associadas à pressão do ar) que agem sobre as bordas dianteira e traseira.

Vamos aplicar a segunda lei de Newton ao elemento. Durante o intervalo de tempo $\Delta t$, a força média exercida sobre a borda traseira do elemento é $pA$, dirigida para a direita, e a força média exercida sobre a face dianteira é $(p + \Delta p)A$, dirigida para a esquerda (Fig. 17-3*b*). Assim, a força resultante média exercida sobre o elemento durante o intervalo $\Delta t$ é

$$F = pA - (p + \Delta p)A$$
$$= -\Delta p\, A \qquad \text{(força resultante)}. \tag{17-5}$$

O sinal negativo indica que a força resultante que age sobre o elemento de ar aponta para a esquerda na Fig. 17-3*b*. O volume do elemento é $A\Delta x$; e assim, com a ajuda da Eq. 17-4, podemos escrever a massa como

$$\Delta m = \rho\, \Delta V = \rho A\, \Delta x = \rho A v\, \Delta t \qquad \text{(massa)}. \tag{17-6}$$

A aceleração média do elemento durante o intervalo $\Delta t$ é

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(aceleração)}. \tag{17-7}$$

Assim, de acordo com a segunda lei de Newton ($F = ma$) e as Eqs. 17-5, 17-6 e 17-7, temos:

$$-\Delta p\, A = (\rho A v\, \Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

que pode ser escrita na forma

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v / v}. \tag{17-8}$$

O ar que ocupa um volume $V\ (= Av\Delta t)$ fora do pulso sofre uma redução de volume $\Delta V\ (= A\Delta v\Delta t)$ ao penetrar no pulso. Assim,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\, \Delta v\, \Delta t}{A v\, \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \tag{17-9}$$

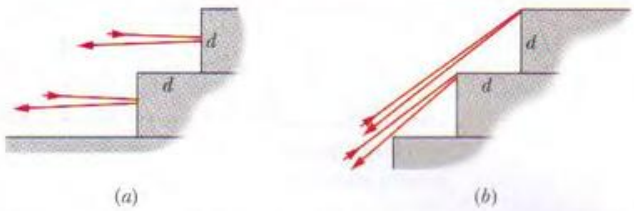
Substituindo a Eq. 17-9 e a Eq. 17-2 na Eq. 17-8, temos:

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v / v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} = B.$$

Explicitando $v$, obtemos a Eq. 17-3 para a velocidade do ar para a direita na Fig. 17-3 e, portanto, a velocidade do pulso para a esquerda.

**Exemplo 17-1**

Quando um pulso sonoro, como o som de um bater de palmas, é produzido perto da escadaria da pirâmide dos maias que aparece na fotografia de abertura deste capítulo as ondas sonoras são refletidas pelos degraus, primeiro pelos mais próximos (mais baixos) (Fig. 17-4*a*) e depois pelos mais afastados (mais altos) (Fig. 17-4*b*). Os degraus têm $d = 0{,}263$ m de largura e altura e a velocidade do som é 343 m/s. A trajetória das ondas sonoras até os degraus mais baixos pode ser tomada como sendo aproximadamente horizontal. A trajetória até os degraus mais altos faz um ângulo de aproximadamente 45° com a horizontal. Com que freqüência $f_{base}$ os ecos produzidos pela reflexão dos pulsos nos degraus próximos da base da pirâmide chegam ao ouvinte? Com que freqüência $f_{alto}$ os ecos produzidos pela reflexão dos pulsos nos degraus próximos do alto da pirâmide chegam ao ouvinte, um pouco mais tarde?




(*a*) (*b*)

FIG. 17-4 As ondas sonoras são refletidas (*a*) nos degraus mais baixos e (*b*) nos degraus mais altos.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A freqüência $f$ com a qual os pulsos voltam ao ouvinte é o inverso do intervalo de tempo $\Delta t$ entre pulsos sucessivos. (2) O intervalo de tempo $\Delta t$ necessário para que o som percorra uma certa distância $L$ está relacionado à velocidade do som através da equação $v = L/\Delta t$.

***Cálculos:*** Perto da base da pirâmide (Fig. 17-4*a*) a onda sonora refletida por um degrau percorre uma distância $L = 2d$ maior que a onda sonora refletida pelo degrau imediatamente abaixo. (A onda sonora precisa atravessar duas vezes a largura de um degrau.) Assim, as chegadas dos ecos dos pulsos ao ouvinte estão separadas por um intervalo de tempo

$$\Delta t_{base} = \frac{L}{v} = \frac{2d}{v} \qquad (17\text{-}10)$$

$$= \frac{2(0{,}263\text{ m})}{343\text{ m/s}} = 1{,}533\times10^{-3}\text{ s}.$$

A freqüência $f_{base}$ com a qual os pulsos chegam ao ouvinte é

$$f_{base} = \frac{1}{\Delta t_{base}} \qquad (17\text{-}11)$$

$$= \frac{1}{1{,}533\times10^{-3}\text{ s}} = 652\text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O intervalo de tempo $\Delta t_{base}$ é curto demais para que o ouvinte perceba os pulsos separadamente. Em vez disso, o cérebro interpreta o som como uma onda senoidal de freqüência $f_{base}$ e o ouvinte tem a impressão de que está ouvindo uma nota musical de freqüência 652 Hz.

Perto do alto da pirâmide (Fig. 17-4*b*) o percurso inclinado das ondas sonoras faz com que a onda sonora refletida por um degrau percorra uma distância $L = 2\sqrt{2}d$ maior que a onda sonora refletida pelo degrau imediatamente abaixo. (A onda sonora precisa atravessar duas vezes a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais à largura de um degrau.) Assim, nesse caso o intervalo de tempo entre a chegada dos pulsos é dado por

$$\Delta t_{alto} = \frac{L}{v} = \frac{2\sqrt{2}d}{v} \qquad (17\text{-}12)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(0{,}263\text{ m})}{343\text{ m/s}} = 2{,}168\times10^{-3}\text{ s}.$$

e a freqüência percebida pelo ouvinte é

$$f_{alto} = \frac{1}{\Delta t_{alto}}$$

$$= \frac{1}{2{,}168\times10^{-3}\text{ s}} = 461\text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, um bater de palmas perto da escadaria produz um eco que começa com uma freqüência de 652 Hz e termina com uma freqüência de 461 Hz. Este tipo de eco musical está presente em muitas escadas e também em cercas de jardim.

## 17-4 | Ondas Sonoras Progressivas

Vamos agora examinar os deslocamentos e variações de pressão associados a uma onda sonora senoidal que se propaga no ar. A Fig. 17-5*a* mostra uma onda se propagando para a direita em um tubo longo cheio de ar. Como vimos no Capítulo 16, uma onda desse tipo pode ser produzida movendo-se senoidalmente um êmbolo na extremidade esquerda do tubo (como na Fig. 16-2). O movimento do êmbolo para a direita desloca o elemento de ar mais próximo e comprime esse ar; o movimento do êmbolo para a esquerda permite que o elemento de ar se desloque de volta para a esquerda e que a pressão diminua. Como cada elemento de ar afeta o elemento que

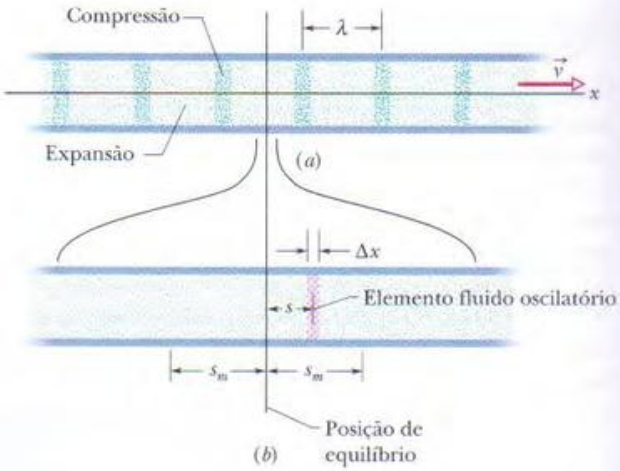



FIG. 17-5 (*a*) Uma onda sonora que se propaga com velocidade $v$ em um tubo longo cheio de ar é composta por uma série de expansões e compressões periódicas do ar que se deslocam ao longo do tubo. A onda é mostrada em um instante arbitrário. (*b*) Uma vista horizontal ampliada de uma pequena parte do tubo. Quando a onda passa, um elemento de ar de espessura $\Delta x$ oscila para a esquerda e para a direita em movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. No instante mostrado em (*b*) o elemento se encontra deslocado de uma distância $s$ para a direita da posição de equilíbrio. O deslocamento máximo, para a direita ou para a esquerda, é $s_m$.

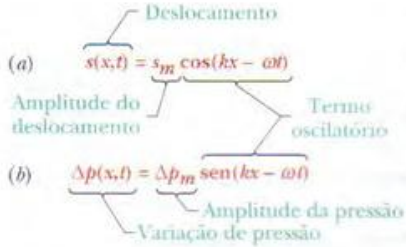



FIG. 17-6 (*a*) A função deslocamento e (*b*) a função variação de pressão de uma onda sonora progressiva são um produto de dois fatores: uma amplitude e um termo oscilatório.

está ao lado, os movimentos do ar para a direita e para a esquerda e as variações de pressão se propagam ao longo do tubo como uma onda sonora.

Considere o elemento de ar de espessura $\Delta x$ da Fig. 17-5*b*. Quando a onda atravessa essa parte do tubo o elemento de ar oscila para a esquerda e para a direita em movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. Assim, as oscilações dos elementos de ar produzidas pela onda sonora progressiva são semelhantes às oscilações dos elementos de uma corda produzidas por uma onda transversal, exceto pelo fato de que a oscilação dos elementos de ar é *longitudinal*, e não *transversal*. Como os elementos da corda oscilam paralelamente ao eixo $y$, escrevemos os deslocamentos na forma $y(x, t)$. Por analogia, como os elementos de ar oscilam paralelamente ao eixo $x$, poderíamos escrever os deslocamentos na forma $x(x, t)$; entretanto, para evitar confusão da função $x$ com a variável $x$ vamos usar a notação $s(x, t)$.

Para mostrar que os deslocamentos $s(x, t)$ são funções senoidais de $x$ e de $t$, é possível usar uma função seno ou uma função co-seno. Neste capítulo vamos usar uma função co-seno, escrevendo

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t). \tag{17-13}$$

A Fig. 17-6*a* identifica as várias partes desta equação. O fator $s_m$ é a amplitude do deslocamento, ou seja, o deslocamento máximo do elemento de ar em qualquer sentido a partir da posição de equilíbrio (veja a Fig. 17-5*b*). O número de onda $k$, a freqüência angular $\omega$, a freqüência $f$, o comprimento de onda $\lambda$, a velocidade $v$ e o período $T$ de uma onda sonora (longitudinal) são definidos do mesmo modo e obedecem às mesmas relações que para uma onda transversal, exceto pelo fato de que agora $\lambda$ é a distância (na direção de propagação) para a qual o padrão de compressões e expansões associado à onda começa a se repetir (veja a Fig. 17-5*a*). (Estamos supondo que $s_m$ é muito menor do que $\lambda$.)

Quando a onda se propaga, a pressão do ar em qualquer posição $x$ da Fig. 17-5*a* varia senoidalmente, como será demonstrado a seguir. Para descrever essa variação, escrevemos

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{17-14}$$

A Fig. 17-6*b* identifica as várias partes desta equação. Um valor negativo de $\Delta p$ na Eq. 17-14 corresponde a uma expansão do ar; um valor positivo, a uma compressão. O fator $\Delta p_m$ é a **amplitude da pressão**, ou seja, o máximo aumento ou diminuição de pressão associado à onda; $\Delta p_m$ é normalmente muito menor que a pressão $p$ na ausência da onda. Como vamos demonstrar, a amplitude da pressão $\Delta p_m$ está relacionada à amplitude do deslocamento $s_m$ da Eq. 17-13 através da equação

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \tag{17-15}$$

A Fig. 17-7 mostra os gráficos das Eqs. 17-13 e 17-14 no instante $t = 0$; com o passar do tempo, as duas curvas se movem para a direita ao longo dos eixos horizontais. Note que o deslocamento e a variação de pressão estão defasados de $\pi/2$ rad (90°). Assim, por exemplo, a variação de pressão $\Delta p$ em qualquer ponto da onda é nula no instante em que o deslocamento é máximo.

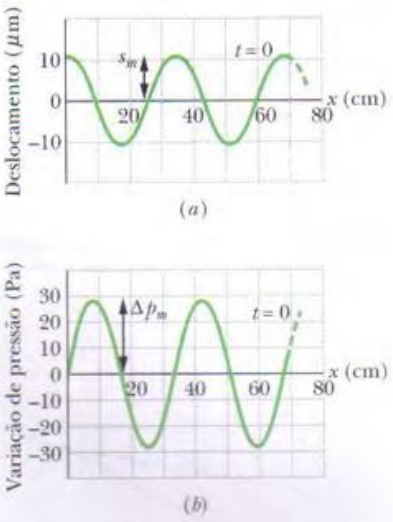



FIG. 17-7 (*a*) Um gráfico da função deslocamento (Eq. 17-13) para $t = 0$. (*b*) Um gráfico semelhante da função variação de pressão (Eq. 17-14). Os dois gráficos são para uma onda sonora de 1000 Hz cuja amplitude de pressão está no limiar da dor; veja o Exemplo 17-2.

**TESTE 1** Quando o elemento de ar oscilante da Fig. 17-5*b* está passando pelo ponto de deslocamento nulo (ponto de equilíbrio), a pressão do elemento está começando a aumentar ou começando a diminuir?

## Demonstração das Eqs. 17-14 e 17-15

A Fig. 17-5*b* mostra um elemento de ar oscilante de seção reta $A$ e espessura $\Delta x$, com o centro deslocado de sua posição de equilíbrio de uma distância $s$. De acordo com a Eq. 17-2, podemos escrever, para a variação de pressão do elemento deslocado,

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}. \tag{17-16}$$

A grandeza $V$ da Eq. 17-16 é o volume do elemento, dado por

$$V = A\,\Delta x. \tag{17-17}$$

A grandeza $\Delta V$ da Eq. 17-16 é a variação de volume que ocorre quando o elemento é deslocado. Essa variação de volume acontece porque os deslocamentos das duas extremidades do elemento não são exatamente iguais, diferindo de um valor $\Delta s$. Assim, podemos escrever a variação de volume como

$$\Delta V = A\,\Delta s. \tag{17-18}$$

Substituindo as Eqs. 17-17 e 17-18 na Eq. 17-16 e passando ao limite diferencial, obtemos

$$\Delta p = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} = -B\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{17-19}$$

O símbolo $\partial$ mostra que a derivada da Eq. 17-19 é uma *derivada parcial*, que nos diz como $s$ varia com $x$ quando o tempo $t$ é mantido constante. De acordo com a Eq. 17-13, tratando $t$ como uma constante temos, portanto,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[s_m \cos(kx - \omega t)] = -ks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Substituindo este resultado para a derivada parcial na Eq. 17-19, obtemos

$$\Delta p = Bks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Fazendo $\Delta p_m = Bks_m$, obtemos a Eq. 17-14, que queríamos demonstrar.

Usando a Eq. 17-3, podemos agora escrever

$$\Delta p_m = (Bk)s_m = (v^2\rho k)s_m.$$

A Eq. 17-15, que também queríamos demonstrar, é obtida usando a Eq. 16-13 para substituir $k$ por $\omega/v$.

## Exemplo 17-2

A amplitude máxima de pressão $\Delta p_m$ que o ouvido humano pode suportar em sons muito altos é da ordem de 28 Pa (muito menor, portanto, que a pressão normal do ar, aproximadamente $10^5$ Pa). Qual é a amplitude do deslocamento $s_m$ correspondente, supondo que a massa específica do ar é $\rho = 1{,}21$ kg/m$^3$, a freqüência do som é 1000 Hz e a velocidade do som é 343 m/s?

**IDÉIA-CHAVE** A amplitude do deslocamento $s_m$ de uma onda sonora está relacionada à amplitude da pressão $\Delta p_m$ da onda através da Eq. 17-15.

***Cálculos:*** Explicitando $s_m$ na Eq. 17-15, obtemos

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{v\rho\omega} = \frac{\Delta p_m}{v\rho(2\pi f)}.$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$s_m = \frac{28Pa}{(343\ \text{m/s})(1{,}21\ \text{kg/m}^3)(2\pi)(1000\ \text{Hz})}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-5}\ \text{m} = 11\ \mu\text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde a um sétimo da espessura desta página. Obviamente, mesmo para o som mais alto que o ouvido é capaz de tolerar a amplitude do deslocamento é muito pequena.

A amplitude da pressão $\Delta p_m$ para o som *mais fraco* de 1000 Hz que o ouvido humano pode detectar é $2{,}8 \times 10^{-5}$ Pa. Procedendo como antes, obtemos $s_m = 1{,}1 \times 10^{-11}$ m ou 11 pm, que corresponde a um décimo do raio de um átomo típico. O ouvido é, realmente, um detector muito sensível de ondas sonoras.

## 17-5 | Interferência

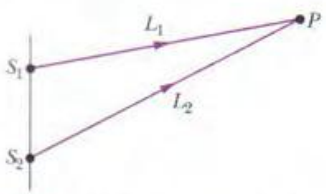



FIG. 17-8 Duas fontes pontuais, $S_1$ e $S_2$, emitem ondas sonoras esféricas em fase. Os raios mostram que as ondas passam por um ponto comum $P$.

Como as ondas transversais, as ondas sonoras podem sofrer interferência. Vamos considerar, em particular, a interferência entre duas ondas sonoras iguais que se propagam no mesmo sentido. A Fig. 17-8 mostra como é possível produzir essa interferência: duas fontes pontuais $S_1$ e $S_2$ emitem ondas sonoras que estão em fase e têm o mesmo comprimento de onda $\lambda$. Em casos como esse dizemos que as fontes estão em fase, ou seja, as ondas deixam as fontes com o mesmo deslocamento de fase. Estamos interessados nas ondas que passam pelo ponto $P$ da Fig. 17-8. Supomos que a distância até o ponto $P$ é muito maior que a distância entre as fontes, de modo que podemos supor que as ondas são aproximadamente paralelas ao chegarem ao ponto $P$.

Se as ondas percorressem distâncias iguais para chegar ao ponto $P$, estariam em fase nesse ponto. Como no caso das ondas transversais, isso significa que elas sofreriam interferência totalmente construtiva. Entretanto, na Fig. 17-8 o caminho $L_2$ percorrido pela onda gerada pela fonte $S_2$ é maior do que o caminho $L_1$ percorrido pela onda gerada pela fonte $S_1$. A diferença de percurso significa que as ondas podem não estar em fase no ponto $P$. Em outras palavras, a diferença de fase $\phi$ no ponto $P$ depende da **diferença de percurso** $\Delta L = |L_2 - L_1|$.

Para relacionar a diferença de fase $\phi$ à diferença de percurso $\Delta L$ lembramos (da Seção 16-4) que uma diferença de fase de $2\pi$ rad corresponde a um comprimento de onda. Assim, podemos escrever a relação

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}, \qquad (17\text{-}20)$$

que nos dá

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi. \qquad (17\text{-}21)$$

A interferência totalmente construtiva acontece se $\phi$ é zero, $2\pi$ ou qualquer múltiplo inteiro de $2\pi$. Podemos escrever essa condição na forma

$$\phi = m(2\pi), \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente construtiva).} \qquad (17\text{-}22)$$

De acordo com a Eq. 17-21, isso acontece quando a razão $\Delta L/\lambda$ é

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente construtiva).} \qquad (17\text{-}23)$$

Assim, por exemplo, se a diferença de percurso $\Delta L = |L_2 - L_1|$ da Fig. 17-8 é igual a $2\lambda$, $\Delta L/\lambda = 2$ e as ondas sofrem interferência totalmente construtiva no ponto $P$. A interferência é totalmente construtiva porque a onda proveniente de $S_2$ está deslocada em fase de $2\lambda$ em relação à onda proveniente de $S_1$, o que coloca as duas ondas *exatamente em fase* no ponto $P$.

A interferência totalmente destrutiva acontece se $\phi$ é um múltiplo ímpar de $\pi$, condição que podemos escrever como

$$\phi = (2m + 1)\pi, \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente destrutiva).} \qquad (17\text{-}24)$$

De acordo com a Eq. 17-21, isso acontece quando a razão $\Delta L/\lambda$ é

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ldots \qquad \text{(interferência totalmente destrutiva).} \qquad (17\text{-}25)$$

Assim, por exemplo, se a diferença de percurso $\Delta L = |L_2 - L_1|$ da Fig. 17-8 é igual a $2{,}5\lambda$, $\Delta L/\lambda = 2{,}5$ e as ondas sofrem interferência totalmente destrutiva no ponto $P$. A interferência é totalmente destrutiva porque a onda proveniente de $S_2$ está deslocada em fase de $2{,}5\lambda$ em relação à onda proveniente de $S_1$, o que coloca as duas ondas *com fases opostas* no ponto $P$.

Naturalmente, duas ondas podem produzir uma interferência intermediária. Se $\Delta L/\lambda = 1{,}2$, por exemplo, a interferência nem é totalmente construtiva nem totalmente destrutiva, mas está mais próximo de ser interferência totalmente construtiva ($\Delta L/\lambda = 1{,}0$) do que interferência totalmente destrutiva ($\Delta L/\lambda = 1{,}5$).

## Exemplo 17-3 Aumente sua capacidade

Na Fig. 17-9*a*, duas fontes pontuais $S_1$ e $S_2$, que estão em fase e separadas por uma distância $D = 1{,}5\lambda$, emitem ondas sonoras iguais de comprimento de onda $\lambda$.

(a) Qual é a diferença de percurso das ondas de $S_1$ e $S_2$ no ponto $P_1$, que está sobre a mediatriz do segmento de reta que liga as duas fontes, a uma distância das fontes maior que $D$? Que tipo de interferência ocorre em $P_1$?

***Raciocínio:*** Como as duas ondas percorrem distâncias iguais para chegar a $P_1$, a diferença de percurso é

$$\Delta L = 0. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 17-23, isso significa que as ondas sofrem interferência totalmente construtiva em $P_1$.

(b) Quais são a diferença de percurso e o tipo de interferência no ponto $P_2$ na Fig. 17-9*a*?

***Raciocínio:*** A onda produzida por $S_1$ percorre uma distância adicional $D$ ($= 1{,}5\lambda$) para chegar a $P_2$. Assim, a diferença de percurso é

$$\Delta L = 1{,}5\lambda. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 17-25, isso significa que as ondas estão com fases opostas em $P_2$ e interferem de forma totalmente destrutiva nesse ponto.

(c) A Fig. 17-9*b* mostra uma circunferência de raio muito maior que $D$ cujo centro está no ponto médio entre $S_1$ e $S_2$. Qual é o número de pontos $N$ dessa circunferência nos quais a interferência é totalmente construtiva?

***Raciocínio:*** Imagine que, partindo do ponto $a$, nos deslocamos no sentido horário ao longo da circunferência até o ponto $d$. Nesse percurso a diferença de percurso $\Delta L$ aumenta continuamente. Como foi visto no item (a), a diferença de percurso no ponto $a$ é $\Delta L = 1{,}5\lambda$. Como foi visto no item (b), $\Delta L = 1{,}5\lambda$ no ponto $d$. Assim, deve existir um ponto entre $a$ e $d$ ao longo da circunferência no qual $\Delta L = \lambda$, como mostra a Fig. 17-9*b*. De acordo com a Eq. 17-23, uma interferência totalmente construtiva ocorre nesse ponto. Além disso, não existe outro ponto ao longo do percurso de $a$ a $d$ no qual ocorre interferência totalmente construtiva, já que 1 é o único número inteiro entre 0 e 1,5.

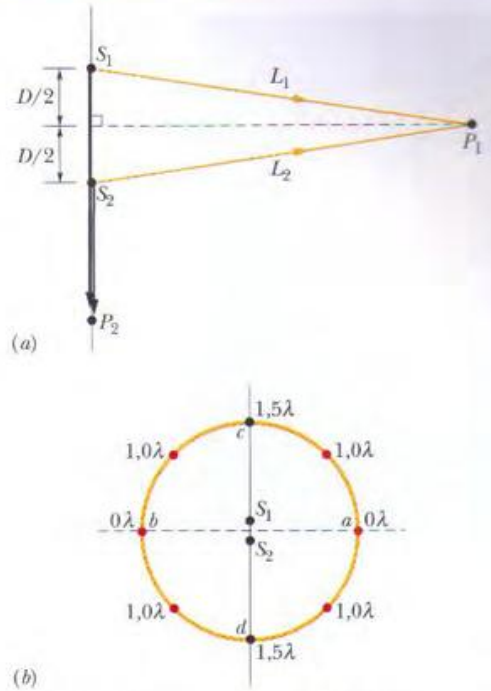



FIG. 17-9 (*a*) Duas fontes pontuais $S_1$ e $S_2$, separadas por uma distância $D$, emitem ondas sonoras esféricas em fase. As ondas percorrem distâncias iguais para chegar ao ponto $P_1$. O ponto $P_2$ está sobre a linha reta que passa por $S_1$ e $S_2$. (*b*) A diferença de percurso (em termos do comprimento de onda) entre as ondas produzidas por $S_1$ e $S_2$, em oito pontos sobre uma grande circunferência que envolve as fontes.

Podemos agora usar a simetria para localizar os outros pontos de interferência totalmente construtiva no resto da circunferência. A simetria em relação à reta $cd$ nos dá o ponto $b$, no qual $\Delta L = 0\lambda$. Existem mais três pontos para os quais $\Delta L = \lambda$. No total, temos

$$N = 6. \qquad \text{(Resposta)}$$

## 17-6 | Intensidade e Nível Sonoro

Se você já tentou dormir enquanto alguém ouvia música a todo volume, sabe muito bem que existe algo no som além da freqüência, comprimento de onda e velocidade. Há também a intensidade. A **intensidade** $I$ de uma onda sonora em uma superfície é a taxa média por unidade de área com a qual a energia contida na onda atravessa a superfície ou é absorvida pela superfície. Matematicamente, temos:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{17-26}$$

onde $P$ é a taxa de variação com o tempo da transferência de energia (potência) da onda sonora e $A$ é a área da superfície que intercepta o som. Como vamos mostrar daqui a pouco, a intensidade $I$ está relacionada à amplitude do deslocamento $s_m$ da onda sonora através da equação

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2. \tag{17-27}$$

O som pode fazer um copo de vidro oscilar. Se o som produzir uma onda estacionária e se a intensidade do som for elevada, o vidro pode quebrar. *(Ben Rose/The Image Bank/Getty Images)*

### Variação da Intensidade com a Distância

Em geral, a intensidade do som varia com a distância de uma fonte real de uma forma bastante complexa. Algumas fontes reais, como os alto-falantes, podem emitir o som apenas em certas direções, e o ambiente normalmente produz ecos (ondas sonoras refletidas) que se superpõem às ondas sonoras originais. Em algumas situações, porém, podemos ignorar os ecos e supor que a fonte sonora é uma fonte pontual e *isotrópica*, ou seja, que emite o som com a mesma intensidade em todas as direções. As frentes de onda que existem em torno de uma fonte pontual isotrópica $S$ em um dado instante são mostradas na Fig. 17-10.

Vamos supor que a energia mecânica das ondas sonoras é conservada enquanto elas se espalham a partir de uma fonte pontual isotrópica. Vamos também construir uma esfera imaginária de raio $r$ com o centro na fonte, como mostra na Fig. 17-10. Toda a energia emitida pela fonte passa pela superfície da esfera. Assim, a taxa com a qual a energia das ondas sonoras atravessa a superfície é igual à taxa com a qual a energia é emitida pela fonte (ou seja, a potência $P_s$ da fonte). De acordo com a Eq. 17-26, a intensidade $I$ da onda sonora na superfície da esfera é dada por

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}, \tag{17-28}$$

onde $4\pi r^2$ é a área da esfera. A Eq. 17-28 nos diz que a intensidade do som emitido por uma fonte pontual isotrópica diminui com o quadrado da distância $r$ da fonte.

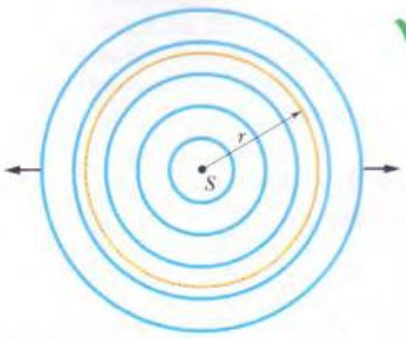
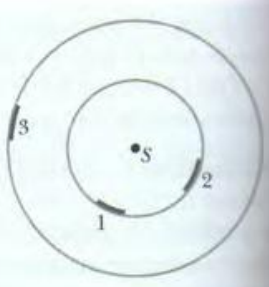



FIG. 17-10 Uma fonte pontual $S$ emite ondas sonoras com a mesma intensidade em todas as direções. As ondas atravessam uma esfera imaginária de raio $r$ com centro em $S$.

✓ **TESTE 2** A figura mostra três pequenas áreas 1, 2 e 3 na superfície de duas esferas imaginárias, cujo centro está em uma fonte sonora pontual isotrópica $S$. As taxas com a quais a energia das ondas sonoras atravessa as três áreas são iguais. Ordene as áreas de acordo (a) com a intensidade do som na área e (b) com a área, em ordem decrescente.




### A Escala de Decibéis

Como vimos no Exemplo 17-2, a amplitude do deslocamento no interior do ouvido humano varia cerca de $10^{-5}$ m, para o som mais alto tolerável, a cerca de $10^{-11}$ m, para o som mais fraco detectável – uma razão de $10^6$. Como, de acordo com a Eq.

17-27, a intensidade de um som varia com o *quadrado* da amplitude, a razão entre as intensidades nesses dois limites do sistema auditivo humano é $10^{12}$. Isso significa que os seres humanos podem ouvir em uma enorme faixa de intensidades.

Para lidar com um intervalo tão grande de valores, recorremos aos logaritmos. Considere a relação

$$y = \log x,$$

onde $x$ e $y$ são variáveis. Uma propriedade desta equação é que se $x$ é *multiplicado* por 10, $y$ aumenta de 1 unidade. Para mostrar que isso é verdade, escrevemos

$$y' = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Da mesma forma, quando multiplicamos $x$ por $10^{12}$ $y$ aumenta apenas de 12 unidades.

Assim, em vez de falarmos da intensidade $I$ de uma onda sonora, é muito mais conveniente falarmos do **nível sonoro** $\beta$, definido como

$$\beta = (10\,\text{dB}) \log \frac{I}{I_0}. \tag{17-29}$$

onde dB é a abreviação de **decibel**, a unidade de nível sonoro, um nome escolhido em homenagem a Alexander Graham Bell*. $I_0$ na Eq. 17-29 é uma intensidade de referência ($= 10^{-12}$ W/m$^2$), cujo valor foi escolhido porque está próximo do limite inferior da faixa de audição humana. Para $I = I_0$, a Eq. 17-29 fornece $\beta = 10 \log 1 = 0$, de modo que a intensidade de referência corresponde a zero decibel. O valor de $\beta$ aumenta em 10 dB toda vez que a intensidade sonora aumenta de uma ordem de grandeza (um fator de 10). Assim, $\beta = 40$ corresponde a uma intensidade $10^4$ maior que a intensidade de referência. A Tabela 17-2 mostra os níveis sonoros em alguns ambientes.

**TABELA 17-2**

**Alguns Níveis Sonoros (dB)**

| | |
|---|---|
| Limiar de audição | 0 |
| Farfalhar de folhas | 10 |
| Conversa | 60 |
| Show de rock | 110 |
| Limiar da dor | 120 |
| Turbina a jato | 130 |

## Demonstração da Eq. 17-27

Considere, na Fig. 17-5*a*, uma fatia fina de ar de espessura $dx$, área $A$ e massa $dm$, oscilando para a frente e para trás enquanto a onda sonora da Eq. 17-13 passa por ela. A energia cinética $dK$ da fatia de ar é

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, v_s^2, \tag{17-30}$$

onde $v_s$ não é a velocidade da onda, mas a velocidade de oscilação do elemento de ar, obtida da Eq. 17-13 como

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Usando esta relação e fazendo $dm = \rho A\, dx$, podemos escrever a Eq. 17-30 na forma

$$dK = \tfrac{1}{2}(\rho A\, dx)(-\omega s_m)^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{17-31}$$

Dividindo a Eq. 17-31 por $dt$, obtemos a taxa com a qual a energia cinética se desloca com a onda. Como vimos no Capítulo 16 para ondas transversais, $dx/dt$ é a velocidade $v$ da onda, de modo que

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{17-32}$$

A taxa *média* com a qual a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 \left[\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\right]_{\text{méd}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\rho A v \omega^2 s_m^2. \tag{17-33}$$

*Na verdade, a unidade de volume sonoro é o bel (B), e o decibel é um submúltiplo (1 dB = 0,1 B), mas o decibel é muito mais usado na prática que o bel. (N.T.)

Para obter essa equação, usamos o fato de que o valor médio do quadrado de uma função seno (ou co-seno) para uma oscilação completa é 1/2.

Supomos que a energia *potencial* é transportada pela onda com a mesma taxa média. A intensidade $I$ da onda, que é a taxa média por unidade de área com a qual a energia nas duas formas é transmitida pela onda, é, portanto, de acordo com a Eq. 17-33,

$$I = \frac{2(dK/dt)_{méd}}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2,$$

que é a Eq. 17-27, a equação que queríamos demonstrar.

## Exemplo 17-4

Uma centelha elétrica tem a forma de um segmento de reta de comprimento $L = 10$ m e emite um pulso sonoro que se propaga radialmente. (Dizemos que a centelha é uma *fonte linear* de som.) A potência da emissão é $P_s = 1{,}6 \times 10^4$ W.

(a) Qual é a intensidade $I$ do som a uma distância $r = 12$ m da centelha?

**IDÉIAS-CHAVE** (a) Vamos construir um cilindro imaginário de raio $r = 12$ m e comprimento $L = 10$ m (aberto nas duas extremidades) em torno da centelha, como mostra a Fig. 17-11. A intensidade $I$ na superfície do cilíndrico é dada pela razão $P/A$, onde $P$ é a taxa com a qual a energia sonora atravessa a superfície e $A$ é a área da superfície. (2) Supomos que o princípio da conservação da energia se aplica à energia sonora. Isso significa que a taxa $P$ com a qual a energia passa pela superfície do cilindro é igual à taxa $P_s$ com a qual a energia é emitida pela fonte.

***Cálculos:*** Juntando essas idéias e notando que a área da superfície cilíndrica é $A = 2\pi rL$, temos

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P_s}{2\pi rL}. \qquad (17\text{-}34)$$

Isso nos diz que a intensidade do som produzido por uma fonte sonora linear diminui com a distância $r$ (e não com o quadrado da distância $r$, como no caso de fonte pontual). Substituindo os valores conhecidos, obtemos

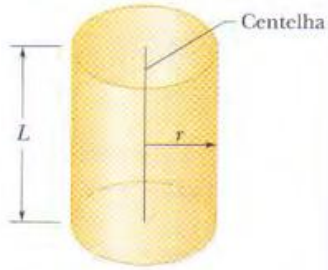



**FIG. 17-11** Uma centelha na forma de um segmento de reta de comprimento $L$ emite ondas sonoras radiais. As ondas atravessam um cilindro imaginário $r$ e comprimento $L$ cujo eixo coincide com a centelha.

$$I = \frac{1{,}6 \times 10^4 \text{ W}}{2\pi(12 \text{ m})(10 \text{ m})}$$

$$= 21{,}2 \text{ W/m}^2 \approx 21 \text{ W/m}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Com que taxa $P_d$ a energia sonora é interceptada por um detector acústico de área $A_d = 2{,}0$ cm$^2$, apontado para a centelha e situado a uma distância $r = 12$ m da centelha?

***Cálculos:*** Sabemos que a intensidade do som no detector é a razão entre a taxa de transferência de energia $P_d$ nesse local e a área $A_d$ do detector:

$$I = \frac{P_d}{A_d}. \qquad (17\text{-}35)$$

Podemos imaginar que o detector está na superfície cilíndrica do item (a). Nesse caso, a intensidade sonora no detector é igual à intensidade $I$ (= 21,2 W/m$^2$) na superfície cilíndrica. Explicitando $P_d$ na Eq. 17-35, temos:

$$P_d = (21{,}2 \text{ W/m}^2)(2{,}0 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 4{,}2 \text{ mW}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 17-5

Muitos músicos veteranos de rock sofrem de perda aguda da audição por causa dos altos níveis sonoros a que são submetidos durante anos tocando música perto de alto-falantes ou ouvindo música em fones de ouvido. Alguns, como Ted Nugent, perderam totalmente a audição em um ouvido. Outros, como Peter Townshend, do The Who, ouvem sons inexistentes (tinido). Recentemente vários músicos de rock, como Lars Ulrich, da banda Metallica (Fig. 17-12), começaram a usar proteções especiais nos ouvidos durante as apresentações. Se um protetor de ouvido diminui o nível sonoro em 20 dB, qual é a razão entre a intensidade final $I_f$ e a intensidade inicial $I_i$?

**IDÉIA-CHAVE** Tanto para a onda final como a para a inicial o nível sonoro $\beta$ está relacionado à intensidade através da definição de nível sonoro na Eq. 17-29.

***Cálculos:*** Para a onda final, temos:

$$\beta_f = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_f}{I_0},$$

e para a onda inicial, temos:

$$\beta_i = (10\,\text{dB}) \log \frac{I_i}{I_0}.$$

A diferença entre os níveis sonoros é

$$\beta_f - \beta_i = (10\,\text{dB}) \left( \log \frac{I_f}{I_0} - \log \frac{I_i}{I_0} \right). \qquad (17\text{-}36)$$

Usando a identidade

$$\log \frac{a}{b} - \log \frac{c}{d} = \log \frac{ad}{bc},$$

podemos escrever a Eq. 17-36 na forma

$$\beta_f - \beta_i = (10\,\text{dB}) \log \frac{I_f}{I_i}. \qquad (17\text{-}37)$$

Reagrupando os termos e substituindo a redução do nível sonoro $\beta_f - \beta_i$ por $-20$ dB, obtemos

$$\log \frac{I_f}{I_i} = \frac{\beta_f - \beta_i}{10\,\text{dB}} = \frac{-20\,\text{dB}}{10\,\text{dB}} = -2{,}0.$$

Em seguida, tomamos o antilogaritmo de ambos os membros desta equação. (Embora o antilogaritmo de $-2{,}0$, que é $10^{-2,0}$, possa ser calculado mentalmente, você pode utilizar uma calculadora digitando 10^-2,0 ou usando a tecla $10^x$.) O resultado é o seguinte:

**FIG. 17-12** Lars Ulrich, da banda Metallica, é um dos que apóiam a organização HEAR (Hearing Education and Awareness for Rockers), que alerta para os danos que altos níveis sonoros podem causar à audição. *(Tim Mosenfelder/ Getty Images News and Sport Services)*

$$\frac{I_f}{I_i} = \log^{-1}(-2{,}0) = 0{,}010. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o protetor de ouvido reduz a intensidade das ondas sonoras para 0,010 da intensidade inicial, o que corresponde a uma redução de duas ordens de grandeza.

## 17-7 | Fontes de Sons Musicais

Os sons musicais podem ser produzidos pelas oscilações de cordas (violão, piano, violino), membranas (tímpano, tambor), colunas de ar (flauta, oboé, tubos de órgão e o *digeridu* da Fig. 17-13), blocos de madeira ou barras de aço (marimba, xilofone) e muitos outros corpos. Na maioria dos instrumentos as oscilações envolvem mais de uma peça.

Como vimos no Capítulo 16, é possível produzir ondas estacionárias em uma corda mantida fixa nas duas extremidades porque as ondas que se propagam na corda são refletidas em cada extremidade. Para certos valores do comprimento de onda, a combinação das ondas que se propagam em sentidos opostos produz uma onda estacionária (ou modo de oscilação). Os comprimentos de onda para os quais isso acontece correspondem às *freqüências de ressonância* da corda. A vantagem de produzir ondas estacionárias é que, nessas condições, a corda passa a oscilar com grande amplitude, movimentando periodicamente o ar ao redor e produzindo assim uma onda sonora audível com a mesma freqüência que as oscilações da corda. Essa forma de produção de som é de óbvia importância para, digamos, um violonista.

Podemos usar um método semelhante para produzir ondas sonoras estacionárias em um tubo cheio de ar. Quando as ondas se propagam no interior de um tubo são refletidas nas extremidades. (A reflexão ocorre mesmo que uma extremidade esteja aberta, embora, nesse caso, a reflexão não seja tão completa.) Para certos comprimentos de onda das ondas sonoras, a superposição das ondas que se propagam no tubo em sentidos opostos produz uma onda estacionária. Os comprimentos de onda para os quais isso acontece correspondem às *freqüências de ressonância* do tubo. A vantagem de produzir ondas estacionárias é que, nessas condições, o ar no interior do tubo passa a oscilar com grande amplitude, movimentando periodicamente o ar ao redor e produzindo assim uma onda sonora audível com a mesma freqüência que

**FIG. 17-13** A coluna de ar no interior de um *digeridu* (um "tubo") oscila quando o instrumento é tocado. *(Alamy Images)*

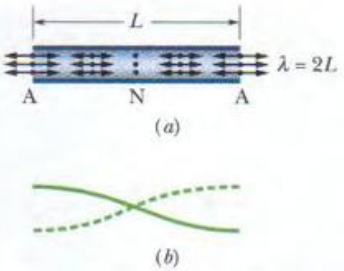



**FIG. 17-14** (*a*) O padrão de deslocamento mais simples para uma onda sonora (longitudinal) estacionária em um tubo com as duas extremidades abertas possui um antinó (A) em cada extremidade e um nó (N) no ponto médio do tubo. (Os deslocamentos longitudinais, representados pelas setas duplas, estão muito exagerados.) (*b*) O padrão correspondente para uma onda elástica (transversal) estacionária em uma corda.

as oscilações do ar no tubo. Essa forma de produção de som é de óbvia importância para, digamos, um organista.

Muitos outros aspectos das ondas sonoras estacionárias são semelhantes aos de ondas em cordas: a extremidade fechada de um tubo é como a extremidade fixa de uma corda, pois tem que haver um nó (deslocamento nulo) nesse local, e a extremidade aberta de um tubo é como a extremidade de uma corda presa a um anel que se move livremente, como na Fig. 16-21*b*, pois deve existir um antinó nesse local. (Na verdade, o antinó associado à extremidade aberta de um tubo está localizado ligeiramente para fora da extremidade, mas isso é irrelevante para nossa discussão.)

A Fig. 17-14*a* mostra a onda estacionária mais simples que pode ser produzida em um tubo com as duas extremidades abertas. Existe um antinó em cada extremidade e um nó no ponto médio do tubo. Um modo mais simples de representar essa onda sonora longitudinal estacionária é mostrado na Fig. 17-14*b*, na qual ela foi desenhada como se fosse uma onda estacionária em uma corda (neste caso, a coordenada perpendicular à direção de propagação da onda representa a variação de pressão em cada ponto, em vez do deslocamento da corda).

A onda estacionária da Fig. 17-14*a* é chamada de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. Para produzi-lo as ondas sonoras em um tubo de comprimento $L$ devem ter um comprimento de onda tal que $\lambda = 2L$. A Fig. 17-15*a* mostra várias outras ondas sonoras estacionárias que podem ser produzidas em um tubo com as duas extremidades abertas. No caso do *segundo harmônico*, o comprimento das ondas sonoras é $\lambda = L$, no caso do *terceiro harmônico* é $\lambda = 2L/3$, e assim por diante.

No caso geral, as freqüências de ressonância de um tubo de comprimento $L$ com as duas extremidades abertas correspondem a comprimentos de onda dados por

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17-38}$$

onde $n$ é o *número harmônico*. Chamando de $v$ a velocidade do som, podemos escrever as freqüências de ressonância de um tubo aberto nas duas extremidades como

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(tubo, duas extremidades abertas).} \tag{17-39}$$

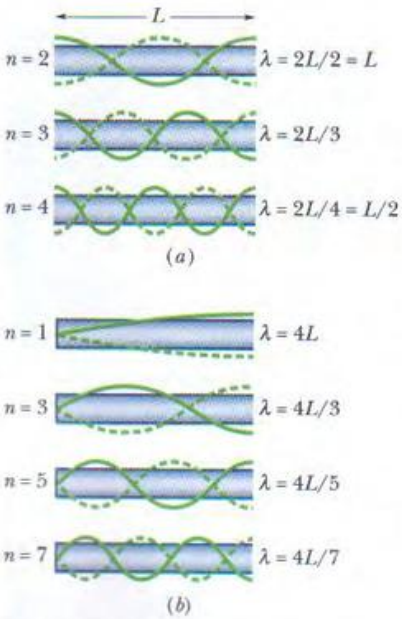



**FIG. 17-15** Ondas estacionárias em tubos, representadas por curvas de pressão em função da posição. (*a*) Com as duas extremidades do tubo abertas qualquer harmônico pode ser produzido no tubo. (*b*) Com apenas *uma* extremidade aberta, apenas os harmônicos ímpares podem ser produzidos.

A Fig. 17-15*b* mostra algumas ondas sonoras estacionárias que podem ser produzidas em um tubo com apenas uma das extremidades aberta. Nesse caso existe um antinó na extremidade aberta e um nó na extremidade fechada. O modo mais simples é aquele no qual $\lambda = 4L$. No segundo modo mais simples, $\lambda = 4L/3$, e assim por diante.

No caso geral as freqüências de ressonância de um tubo de comprimento $L$ com uma extremidade aberta e a outra fechada correspondem a comprimentos de onda dados por

$$\lambda = \frac{4L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{17-40}$$

onde o número harmônico *n é um número ímpar*. As freqüências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots \quad \text{(tubo, uma extremidade aberta).} \tag{17-41}$$

Observe que apenas os harmônicos ímpares podem existir em um tubo com uma das extremidades aberta. Assim, por exemplo, o segundo harmônico, com $n = 2$, não pode ser produzido em um tubo desse tipo. Observe também que em um tubo desse tipo uma expressão como "o terceiro harmônico" ainda se refere ao modo cujo número harmônico é 3, e não ao terceiro harmônico possível.

O comprimento de um instrumento musical está ligado à faixa de freqüências que o instrumento foi projetado para cobrir; comprimentos menores estão associados a freqüências mais altas. A Fig. 17-16, por exemplo, mostra as famílias do saxo-

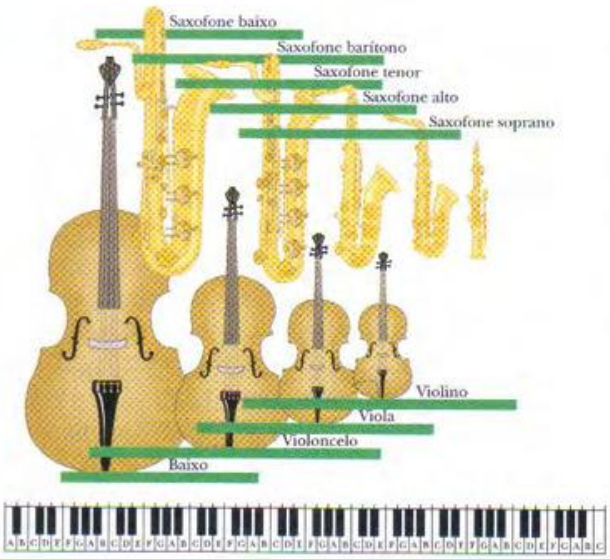



**FIG. 17-16** As famílias do saxofone e do violino, mostrando a relação entre o comprimento do instrumento e a faixa de freqüências. A faixa de freqüências de cada instrumento é indicada por uma barra horizontal em uma escala de freqüência sugerida pelo teclado na base da figura; as freqüências aumentam da esquerda para a direita.

fone e do violino, com as faixas de freqüências sugeridas pelo teclado de um piano. Observe que para cada instrumento existe uma superposição com os vizinhos de freqüências mais altas e de freqüências mais baixas.

Em qualquer sistema oscilatório que produz um som musical, seja ele uma corda de violino ou o ar em um tubo de órgão, o modo fundamental e um ou mais harmônicos superiores costumam ser gerados simultaneamente. Assim, são escutados juntos, ou seja, superpostos para formar uma onda resultante. Quando diferentes instrumentos tocam a mesma nota produzem a mesma freqüência fundamental, mas os harmônicos superiores têm intensidades diferentes. Assim, por exemplo, o quarto harmônico do dó médio pode ser forte em um instrumento e fraco ou mesmo ausente em outro instrumento. É por isso que os instrumentos produzem sons diferentes, mesmo quando tocam a mesma nota. Esse é o caso das duas ondas resultantes mostradas na Fig. 17-17, que foram produzidas por diferentes instrumentos tocando a mesma nota musical.

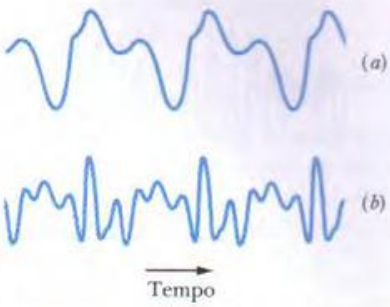



**FIG. 17-17** As formas de onda produzidas (*a*) por uma flauta e (*b*) por um oboé quando a mesma nota é tocada, com a mesma freqüência fundamental.

✓ **TESTE 3** O tubo $A$, de comprimento $L$, e o tubo $B$, de comprimento $2L$, têm as duas extremidades abertas. Que harmônico do tubo $B$ tem a mesma freqüência que o modo fundamental do tubo $A$?

## Exemplo 17-6

Ruídos de fundo de baixa intensidade em uma sala produzem ondas estacionárias em um tubo de papelão de comprimento $L = 67{,}0$ cm com as duas extremidades abertas. Suponha que a velocidade do som no ar dentro do tubo é 343 m/s.

(a) Qual a freqüência do som produzido pelo tubo?

**IDÉIA-CHAVE** Com as duas extremidades do tubo abertas temos uma situação simétrica na qual a onda estacionária possui um antinó em cada extremidade do tubo. A onda estacionária do modo fundamental é a da Fig. 17-14*b*.

***Cálculo:*** A freqüência é dada pela Eq. 17-39, com $n = 1$:

$$f = \frac{nv}{2L} = \frac{(1)(343\ \text{m/s})}{2(0{,}670\ \text{m})} = 256\ \text{Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Se os ruídos de fundo produzirem um harmônico de ordem superior, como, por exemplo, o segundo harmônico, serão produzidas outras freqüências que são múltiplos *inteiros* de 256 Hz.

(b) Se você encostar o ouvido em uma das extremidades do tubo, que freqüência fundamental ouvirá?

**IDÉIA-CHAVE** Com o seu ouvido fechando uma das extremidades do tubo temos uma situação assimétrica: ainda

existe um antinó na extremidade aberta, mas passa a haver um nó na outra extremidade, que está fechada. Nesse caso, a onda estacionária mais simples é a representada no alto na Fig. 17-15*b*.

***Cálculo:*** A freqüência é dada pela Eq. 17-41, com $n = 1$ para o modo fundamental:

$$f = \frac{nv}{4L} = \frac{(1)(343\ \text{m/s})}{4(0{,}670\ \text{m})} = 128\ \text{Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Se os ruídos de fundo produzirem harmônicos superiores, eles serão múltiplos ímpares de 128 Hz. Isso significa que a freqüência de 256 Hz (que é um múltiplo par) não pode ocorrer.

## 17-8 | Batimentos

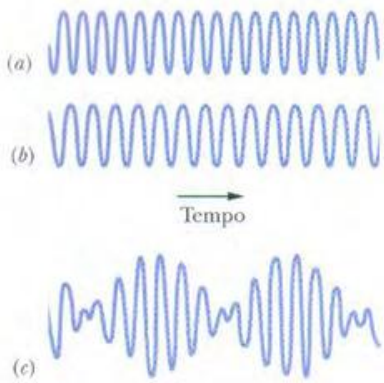



**FIG. 17-18** (*a*, *b*) As variações de pressão $\Delta p$ de duas ondas sonoras quando são detectadas separadamente. As freqüências das ondas são muito próximas. (*c*) A variação de pressão resultante quando as duas ondas são detectadas simultaneamente.

Quando escutamos, com uma diferença de alguns minutos, dois sons cujas freqüências são muito próximas, 552 e 564 Hz, digamos, temos dificuldade para distingui-los. Quando os dois sons chegam aos nossos ouvidos simultaneamente ouvimos um som cuja freqüência é 558 Hz, a *média* das duas freqüências, mas percebemos também uma grande variação na intensidade do som; ela aumenta e diminui alternadamente, produzindo um **batimento** que se repete com uma freqüência de 12 Hz, a *diferença* entre as duas freqüências originais. A Fig. 17-18 ilustra esse fenômeno.

Suponha que as variações de pressão em um certo local, produzidas por duas ondas sonoras de mesma amplitude $s_m$, sejam

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad \text{e} \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t, \qquad (17\text{-}42)$$

onde $\omega_1 > \omega_2$. De acordo com o princípio de superposição, a variação de pressão total é dada por

$$s = s_1 + s_2 = s_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$

Usando a identidade trigonométrica (veja o Apêndice E),

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)]$$

podemos escrever a variação de pressão total na forma

$$s = 2 s_m \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t]. \qquad (17\text{-}43)$$

Definindo

$$\omega' = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{e} \quad \omega = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \qquad (17\text{-}44)$$

podemos escrever a Eq. 17-43 na forma

$$s(t) = [2 s_m \cos \omega' t] \cos \omega t. \qquad (17\text{-}45)$$

Vamos supor que as freqüências angulares $\omega_1$ e $\omega_2$ das ondas que se combinam são quase iguais, o que significa que $\omega \gg \omega'$ na Eq. 17-44. Nesse caso podemos considerar a Eq. 17-45 como uma função co-seno cuja freqüência angular é $\omega$ e cuja amplitude (que não é constante, mas varia com uma freqüência angular $\omega'$) é o valor absoluto do fator entre colchetes.

Um máximo de amplitude ocorre sempre que $\cos \omega' t$ na Eq. 17-45 é igual a 1 ou $-1$, o que acontece duas vezes em cada repetição da função co-seno. Como $\cos \omega' t$ tem uma freqüência angular $\omega'$, a freqüência angular $\omega_{bat}$ com a qual ocorre o batimento é $\omega_{bat} = 2\omega'$. Assim, com a ajuda da Eq. 17-44 podemos escrever

$$\omega_{bat} = 2\omega' = (2)(\tfrac{1}{2})(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Como $\omega = 2\pi f$, esta equação também pode ser escrita na forma

$$f_{bat} = f_1 - f_2 \qquad \text{(freqüência de batimento)}. \qquad (17\text{-}46)$$

Os músicos usam o fenômeno de batimento para afinar seus instrumentos. O som de um instrumento é comparado com uma freqüência-padrão (como, por exemplo, uma nota chamada "lá de concerto" tocada pelo primeiro oboé), e ajustado até que o batimento desapareça. Em Viena, o lá de concerto (440 Hz) é fornecido por telefone aos muitos músicos residentes na cidade.

**Exemplo 17-7**

Quando um pingüim imperador volta para casa depois de sair à procura de alimento, como consegue encontrar a companheira no meio de milhares de pingüins reunidos para se proteger do rigoroso inverno da Antártica? Não é pela visão, já que todos os pingüins são muito parecidos, mesmo para um pingüim.

A resposta está no modo como os pingüins emitem sons. A maioria dos pássaros emite sons usando apenas um dos dois lados do seu órgão vocal, chamado *siringe*. Os pingüins imperadores, porém, emitem sons usando simultaneamente os dois lados da siringe. Cada lado produz ondas acústicas estacionárias na garganta e na boca do pássaro, como em um tubo com as duas extremidades abertas. Suponha que a freqüência do primeiro harmônico produzido pelo lado $A$ da siringe é $f_{A1} = 432$ Hz e que a freqüência do primeiro harmônico produzido pela extremidade $B$ é $f_{B1} = 371$ Hz. Qual é a freqüência de batimento entre as duas freqüências do primeiro harmônico e entre as duas freqüências do segundo harmônico?

**IDÉIA-CHAVE** De acordo com a Eq. 17-46 ($f_{bat} = f_1 - f_2$), a freqüência de batimento de duas freqüências é a diferença entre elas.

***Cálculos:*** Para as duas freqüências de primeiro harmônico $f_{A1}$ e $f_{B1}$, a freqüência de batimento é

$$f_{bat,1} = f_{A1} - f_{B1} = 432 \text{ Hz} - 371 \text{ Hz}$$
$$= 61 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como as ondas estacionárias no pingüim correspondem a um tubo com as duas extremidades abertas, as freqüências de ressonância são dadas pela Eq. 17-39 ($f = nv/2L$), onde $L$ é o comprimento (desconhecido) do tubo. A freqüência do primeiro harmônico é $f_1 = v/2L$ e a freqüência do segundo harmônico é $f_2 = 2v/2L$. Comparando as duas freqüências, vemos que, seja qual for o valor de $L$,

$$f_2 = 2f_1.$$

Para o pingüim, o segundo harmônico do lado $A$ tem uma freqüência $f_{A2} = 2f_{A1}$, e o segundo harmônico do lado $B$ tem uma freqüência $f_{B2} = 2f_{B1}$. Usando a Eq. 17-46 com as freqüências $f_{A2}$ e $f_{B2}$, descobrimos que a freqüência de batimento correspondente é

$$f_{bat,2} = f_{A2} - f_{B2} = 2f_{A1} - 2f_{B1}$$
$$= 2(432 \text{ Hz}) - 2(371 \text{ Hz})$$
$$= 122 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Os experimentos mostram que os pingüins conseguem perceber essas freqüências de batimento relativamente elevadas (o mesmo não se pode dizer dos seres humanos). Assim, o chamado de um pingüim possui uma variedade de harmônicos e freqüências de batimento que permite que sua voz seja identificada mesmo entre as vozes de milhares de outros pingüins.

## 17-9 | O Efeito Doppler

Um carro de polícia está estacionado no acostamento de uma rodovia, com a sirene de 1000 Hz ligada. Se você também estiver parado no acostamento, ouvirá o som da sirene com a mesma freqüência. Entretanto, se houver um movimento relativo entre você e o carro de polícia você ouvirá uma freqüência diferente. Assim, por exemplo, se você estiver se *aproximando* do carro de polícia a 120 km/h ouvirá uma freqüência *mais alta* (1096 Hz, um *aumento* de 96 Hz). Se estiver se *afastando* do carro de polícia com essa mesma velocidade ouvirá uma freqüência *mais baixa* (904 Hz, uma *diminuição* de 96 Hz).

Essas variações de freqüência relacionadas ao movimento são exemplos do **efeito Doppler**. Esse efeito foi proposto (embora não tenha sido perfeitamente analisado) em 1842 pelo físico austríaco Johann Christian Doppler. Foi estudado experimentalmente em 1845 por Buys Ballot, na Holanda, "usando uma locomotiva que puxava um vagão aberto com vários trompetistas".

O efeito Doppler é observado não só nas ondas sonoras, mas também nas ondas eletromagnéticas, como as microondas, as ondas de rádio e a luz visível. No momento, porém, vamos considerar apenas o caso das ondas sonoras e usar como referencial a massa de ar onde essas ondas se propagam. Isso significa que a velocidade da fonte $S$ de ondas sonoras e do detector $D$ dessas ondas serão medidas *em relação ao ar*. (A não ser que seja dito o contrário, vamos supor que o ar está em repouso em relação ao solo, de modo que as velocidades também podem ser medidas em relação ao solo.) Vamos supor que $S$ e $D$ se aproximam ou se afastam um do outro em linha reta, com velocidades menores do que a velocidade do som.

Se o detector ou a fonte está se movendo, ou se ambos estão se movendo, a freqüência emitida $f$ e a freqüência detectada $f'$ são relacionadas através da equação

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \qquad \text{(equação geral do efeito Doppler)}, \qquad (17\text{-}47)$$

onde $v$ é a velocidade do som no ar, $v_D$ é a velocidade do detector em relação ao ar e $v_S$ é a velocidade da fonte em relação ao ar. A escolha do sinal positivo ou negativo é dada pela seguinte regra:

Quando o movimento do detector ou da fonte é no sentido de aproximá-los, o sinal da velocidade deve resultar em um aumento da freqüência. Quando o movimento do detector ou da fonte é no sentido de afastá-los, o sinal da velocidade deve resultar em uma diminuição da freqüência.

Para resumir, *aproximação* significa *aumento de freqüência*; *afastamento* significa *diminuição de freqüência*.

Aqui estão alguns exemplos de aplicação da regra. Se o detector está se movendo em direção à fonte use o sinal positivo no numerador da Eq. 17-47 para obter um aumento da freqüência. Se o detector está se afastando da fonte use o sinal negativo no numerador para obter uma diminuição da freqüência. Se o detector estiver parado substitua $v_D$ por 0. Se a fonte estiver se movendo em direção ao detector use o sinal negativo no denominador da Eq. 17-47 para obter um aumento da freqüência. Se a fonte estiver se afastando use o sinal positivo no denominador para obter uma diminuição da freqüência. Se a fonte estiver parada substitua $v_S$ por 0.

Vamos agora demonstrar equações para o efeito Doppler em duas situações particulares e, em seguida, demonstrar a Eq. 17-47 para o caso geral.

1. Quando o detector está se movendo em relação ao ar e a fonte está parada em relação ao ar o movimento altera a freqüência com a qual o detector intercepta as frentes de onda e, portanto, a freqüência da onda sonora detectada.
2. Quando a fonte está se movendo em relação ao ar e o detector está parado em relação ao ar o movimento altera o comprimento de onda da onda sonora e, portanto, a freqüência detectada (lembre-se de que a freqüência está relacionada ao comprimento de onda).

## Detector em Movimento, Fonte Parada

Na Fig. 17-19 um detector $D$ (representado por uma orelha) está se movendo com velocidade $v_D$ em direção a uma fonte estacionária $S$ que emite ondas esféricas, de comprimento de onda $\lambda$ e freqüência $f$, que se propagam com a velocidade $v$ do som no ar. As frentes de onda estão desenhadas com uma separação de um comprimento de onda. A freqüência detectada pelo detector $D$ é a taxa com a qual $D$ intercepta as frentes de onda (ou comprimentos de onda individuais). Se $D$ estivesse parado essa

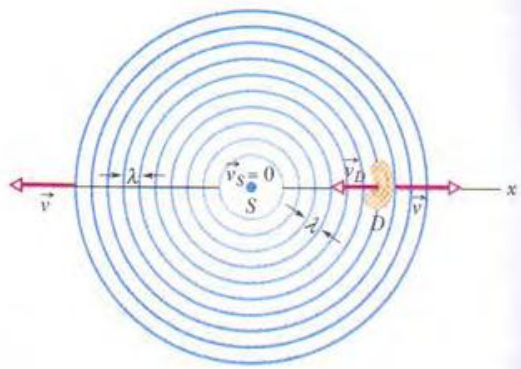



FIG. 17-19 Uma fonte sonora estacionária $S$ emite frentes de onda esféricas, mostradas com uma separação de um comprimento de onda, que se expandem radialmente com velocidade $v$. Um detector $D$, representado por uma orelha, se move com velocidade $\vec{v}_D$ em direção à fonte. O detector mede uma freqüência maior por causa do movimento.

taxa seria $f$, mas como $D$ está se movendo em direção às frentes de onda a taxa de interceptação é maior e, portanto, a freqüência detectada $f'$ é maior do que $f$.

Vamos por um momento considerar a situação na qual $D$ está estacionário (Fig. 17-20). No intervalo de tempo $t$ as frentes de onda percorrem uma distância $vt$ para a direita. O número de comprimentos de onda nessa distância $vt$ é o número de comprimentos de onda interceptados por $D$ no intervalo $t$; esse número é $vt/\lambda$. A taxa com a qual $D$ intercepta comprimentos de onda, que é a freqüência $f$ detectada por $D$, é

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}. \tag{17-48}$$

Nessa situação, com $D$ parado não existe efeito Doppler: a freqüência detectada pelo detector $D$ é a freqüência emitida pela fonte $S$.

Agora vamos novamente considerar a situação na qual $D$ se move no sentido oposto à velocidade das frentes de ondas (Fig. 17-21). No intervalo de tempo $t$ as frentes de onda percorrem uma distância $vt$ para a direita, como antes, mas agora $D$ percorre uma distância $v_D t$ para a esquerda. Assim, nesse intervalo $t$ a distância percorrida pelas frentes de onda em relação a $D$ é $vt + v_D t$. O número de frentes de onda nessa distância relativa $vt + v_D t$ é o número de comprimentos de onda interceptados por $D$ no intervalo $t$ e é dado por $(vt + v_D t)/\lambda$. A *taxa* com a qual $D$ intercepta comprimentos de onda nessa situação é a freqüência $f'$, dada por

$$f' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda}. \tag{17-49}$$

De acordo com a Eq. 17-48, $\lambda = v/f$. Assim, a Eq. 17-49 pode ser escrita na forma

$$f' = \frac{v + v_D}{v/f} = f\frac{v + v_D}{v}. \tag{17-50}$$

Observe que na Eq. 17-50 $f' > f$ a menos que $v_D = 0$ (ou seja, a menos que o detector esteja parado).

Podemos usar um raciocínio semelhante para calcular a freqüência detectada por $D$ quando $D$ está se afastando da fonte. Nesse caso, as frentes de onda se movem uma distância $vt - v_D t$ em relação a $D$ no intervalo $t$, e $f'$ é dada por

$$f' = f\frac{v - v_D}{v}. \tag{17-51}$$

Na Eq. 17-51 $f' < f$, a menos que $v_D = 0$. Podemos condensar as Eqs. 17-50 e 17-51 na equação

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v} \qquad \text{(detector em movimento, fonte parada).} \tag{17-52}$$

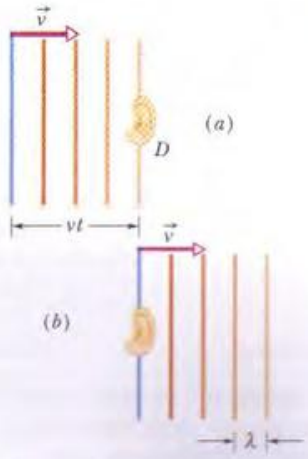



FIG. 17-20 As frentes de onda da Fig. 17-19, supostas planas, (*a*) alcançam e (*b*) passam por um detector estacionário $D$; elas percorrem uma distância $vt$ para a direita no intervalo de tempo $t$.

## Fonte em Movimento, Detector Parado

Suponha que o detector $D$ está parado em relação à massa de ar e a fonte $S$ está se movendo em direção a $D$ com velocidade $v_S$ (Fig. 17-22). O movimento de $S$ altera o comprimento de onda das ondas sonoras que a fonte emite e, portanto, a freqüência detectada por $D$.

Para compreendermos por que isso acontece, vamos chamar de $T$ $(= 1/f)$ o intervalo de tempo entre a emissão de um par de frentes de onda sucessivas, $O_1$ e $O_2$. Durante o intervalo $T$ a frente de onda $O1$ percorre uma distância $vT$ e a fonte percorre uma distância $v_S T$. No fim do intervalo $T$ a frente de onda $O_2$ é emitida. No lado para onde $S$ está se movendo a distância entre $O_1$ e $O_2$, que é o comprimento de onda $\lambda'$ das ondas que se propagam nessa direção, é $vT - v_S T$. Se $D$ detecta essas ondas, detecta uma freqüência $f'$ dada por

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_S T} = \frac{v}{v/f - v_S/f}$$

$$= f\frac{v}{v - v_S}. \tag{17-53}$$

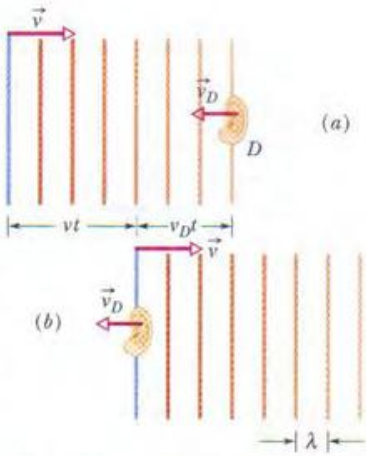



FIG. 17-21 Frentes de onda que se deslocam para a direita (*a*) alcançam e (*b*) passam pelo detector $D$, que se move no sentido oposto. No intervalo de tempo $t$, as frentes de onda percorrem uma distância $vt$ para a direita e $D$ percorre uma distância $v_D t$ para a esquerda.

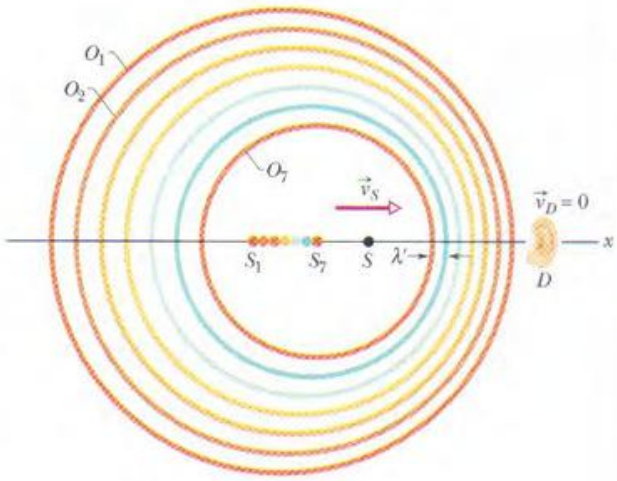



FIG. 17-22 Um detector $D$ está parado e uma fonte $S$ se move em direção a ele com velocidade $v_S$. A frente de onda $O_1$ foi emitida quando a fonte estava em $S_1$ e a frente de onda $O_7$ quando a fonte estava em $S_7$. No instante representado a fonte está em $S$. O detector percebe uma freqüência maior porque a fonte em movimento, perseguindo suas próprias frentes de onda, emite uma onda com um comprimento de onda reduzido $\lambda'$ na direção do movimento.

Na Eq. 17-53, $f' > f$ a menos que $v_S = 0$.

No lado oposto, o comprimento de onda $\lambda'$ das ondas é $vT + v_S T$. Se $D$ detecta estas ondas, detecta a freqüência $f'$ dada por

$$f' = f\frac{v}{v + v_S}. \tag{17-54}$$

Na Eq. 17-54 $f' < f$, a menos que $v_s = 0$.

Podemos condensar as Eqs. 17-53 e 17-54 na equação

$$f' = f\frac{v}{v \pm v_S} \quad \text{(fonte em movimento, detector parado).} \tag{17-55}$$

## Equação Geral do Efeito Doppler

Podemos agora escrever a equação geral do efeito Doppler substituindo $f'$ na Eq. 17-55 (a freqüência da fonte) por $f'$ da Eq. 17-52 (a freqüência associada ao movimento do detector). O resultado é a Eq. 17-47, a equação geral do efeito Doppler.

Esta equação geral se aplica não só quando o detector e a fonte estão se movendo, mas também nas duas situações particulares que acabamos de discutir. Na situação em que o detector está se movendo e a fonte está parada, fazendo $v_S = 0$ na Eq. 17-47, obtemos a Eq. 17-52, já demonstrada. Na situação em que a fonte está se movendo e o detector está parado, fazendo $v_D = 0$ na Eq. 17-47, obtemos a Eq. 17-55, já demonstrada. Assim, a Eq. 17-47 é a equação a ser lembrada.

**TESTE 4** A figura mostra os sentidos de movimento de uma fonte sonora e de um detector para seis situações, no ar estacionário. Para cada situação a freqüência detectada é maior que a freqüência emitida, menor que a freqüência emitida ou não é possível dar uma resposta sem conhecer as velocidades envolvidas?

| | Fonte | Detector | | Fonte | Detector |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | → | • Velocidade 0 | (d) | ← | ← |
| (b) | ← | • Velocidade 0 | (e) | → | ← |
| (c) | → | → | (f) | ← | → |

### Exemplo 17-8 Aumente sua capacidade

Os morcegos se orientam e localizam suas presas emitindo e detectando ondas ultra-sônicas, que são ondas sonoras com freqüências tão altas que não podem ser percebidas pelos ouvidos humanos. Suponha que um morcego emite ultra-sons com uma freqüência $f_{mor,e} = 82{,}52$ kHz enquanto está voando com uma velocidade $\vec{v}_{mor} = (9{,}00\ \text{m/s})\hat{i}$ em perseguição a uma mariposa que voa com velocidade $\vec{v}_{mar} = (8{,}00\ \text{m/s})\hat{i}$. Que freqüência $f_{mar,d}$ é detectada pela mariposa? Qual é a freqüência $f_{mor,d}$ detectada pelo morcego ao receber o eco da mariposa?

**IDÉIAS-CHAVE** A freqüência é alterada pelo movimento relativo do morcego e da mariposa. Como os dois estão se

movendo no mesmo eixo, a variação de freqüência é dada pela equação geral do efeito Doppler, Eq. 17-47. Um movimento de *aproximação* faz a freqüência *aumentar*, e um movimento de *afastamento* faz a freqüência *diminuir*.

***Detecção pela mariposa:*** A equação geral do efeito Doppler é

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_S}, \tag{17-56}$$

onde a freqüência detectada $f'$ na qual estamos interessados é a freqüência $f_{mar,d}$ detectada pela mariposa. Do lado direito da equação a freqüência emitida $f$ é a freqüência de emissão do morcego, $f_{mor,e} = 82{,}52$ kHz, a velocidade do som é $v = 343$ m/s, a velocidade $v_D$ do detector é a velocidade da mariposa, $v_{mar} = 8{,}00$ m/s, e a velocidade $v_S$ da fonte é a velocidade do morcego, $v_{mor} = 9{,}00$ m/s.

Essas substituições na Eq. 17-56 são fáceis de fazer. Entretanto, é preciso tomar cuidado na escolha dos sinais. Uma boa estratégia é pensar em termos de *aproximação* e *afastamento*. Considere, por exemplo, a velocidade da mariposa (o detector) no numerador da Eq. 17-56. A mariposa está se movendo *para longe* do morcego, o que tende a diminuir a freqüência detectada. Como a velocidade está no numerador, escolhemos o sinal negativo para respeitar a tendência (o numerador fica menor). Os passos desse raciocínio estão indicados na Tabela 17-3.

A velocidade do morcego aparece no denominador da Eq. 17-56. O morcego está se movendo *para perto* na mariposa, o que tende a aumentar a freqüência detectada. Como a velocidade está no denominador, escolhemos o sinal negativo para respeitar essa tendência (o denominador fica menor).

Com essas substituições e escolhas, temos:

$$f_{mar,d} = f_{mor,e}\frac{v - v_{mar}}{v - v_{mor}}$$

$$= (82{,}52\text{ kHz})\frac{343\text{ m/s} - 8{,}00\text{ m/s}}{343\text{ m/s} - 9{,}00\text{ m/s}}$$

$$= 82{,}767\text{ kHz} \approx 82{,}8\text{ kHz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

***Detecção do eco pelo morcego:*** Quando o morcego recebe o eco a mariposa se comporta como fonte sonora, emitindo sons com a freqüência $f_{mar,d}$ que acabamos de calcular. Assim, agora a mariposa é a fonte (que está se movendo *para longe* do detector) e o morcego é o detector (que está se movendo *para perto* da fonte). Os passos desse raciocínio estão indicados na Tabela 17-3. Para calcular a freqüência $f_{mor,d}$ detectada pelo morcego usamos a Eq. 17-56:

$$f_{mor,d} = f_{mar,d}\frac{v + v_{mor}}{v + v_{mar}}$$

$$= (82{,}767\text{ kHz})\frac{343\text{ m/s} + 9{,}00\text{ m/s}}{343\text{ m/s} + 8{,}00\text{ m/s}}$$

$$= 83{,}00\text{ kHz} \approx 83{,}0\text{ kHz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Algumas mariposas se defendem emitindo estalidos ultra-sônicos que interferem com o sistema de detecção dos morcegos.

**TABELA 17-3**

| Do Morcego para a Mariposa | | Eco da Mariposa para o Morcego | |
|---|---|---|---|
| Detector | Fonte | Detector | Fonte |
| mariposa | morcego | morcego | mariposa |
| velocidade $v_D = v_{mar}$ | velocidade $v_S = v_{mor}$ | velocidade $v_D = v_{mor}$ | velocidade $v_S = v_{mar}$ |
| afastamento | aproximação | aproximação | afastamento |
| diminui | aumenta | aumento | diminui |
| numerador | denominador | numerador | denominador |
| negativo | negativo | positivo | positivo |

## 17-10 | Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque

Se uma fonte está se movendo em direção a um detector estacionário com uma velocidade igual à velocidade do som, ou seja, se $v_S = v$, as Eqs. 17-47 e 17-55 prevêem que a freqüência detectada $f'$ será infinita. Isso significa que a fonte está se movendo tão depressa que acompanha suas próprias frentes de onda, como mostra a Fig. 17-23*a*. O que acontece quando a velocidade da fonte é *maior* que a velocidade do som?

Nessas velocidades *supersônicas* as Eqs. 17-47 e 17-55 não são mais válidas. A Fig. 17-23*b* mostra as frentes de onda produzidas em várias posições da fonte. O raio de qualquer frente de onda dessa figura é $vt$, onde $v$ é a velocidade do som e $t$ é o tempo transcorrido depois que a fonte emitiu a frente de onda. Observe que as

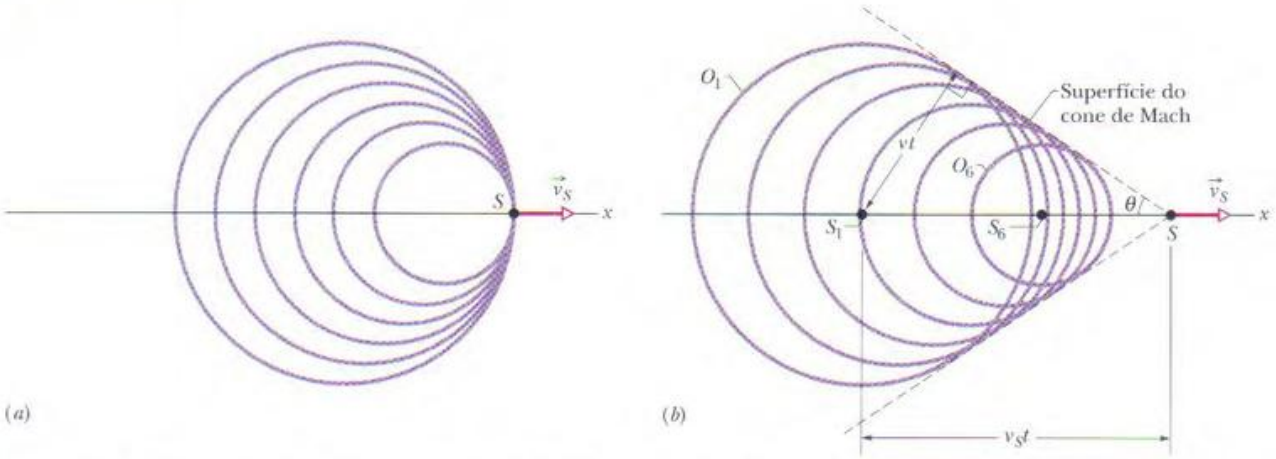



**FIG. 17-23** (*a*) Uma fonte sonora *S* se move com uma velocidade $v_S$ igual à velocidade do som e, portanto, com a mesma velocidade que as frentes de onda que produz. (*b*) Uma fonte *S* se move com uma velocidade $v_S$ maior do que a velocidade do som e, portanto, mais depressa que as frentes de onda. Quando a fonte estava na posição $S_1$ produziu a frente de onda $O_1$; quando estava na posição $S_6$ produziu a frente de onda $O_6$. Todas as frentes de ondas esféricas se expandem com a velocidade do som *v* e se superpõem na superfície de um cone chamado cone de Mach, formando uma onda de choque. A superfície do cone possui um semi-ângulo $\theta$ e é tangente a todas as frentes de onda.

frentes de onda se combinam em uma envoltória em forma de V no desenho bidimensional da Fig. 17-23*b*. As frentes de onda na verdade se propagam em três dimensões e se combinam em uma envoltória em forma de cone chamada *cone de Mach*. Dizemos que existe uma *onda de choque* na superfície desse cone porque a superposição das frentes de onda causa uma elevação e uma queda abrupta da pressão do ar quando a superfície passa por um ponto qualquer. De acordo com a Fig. 17-23*b*, o semi-ângulo $\theta$ do cone, chamado *ângulo do cone de Mach*, é dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S} \qquad \text{(ângulo de cone de Mach).} \qquad (17\text{-}57)$$

A razão $v_S/v$ é chamada de *número de Mach*. Quando você ouve dizer que um certo avião voou a Mach 2,3 isso significa que a velocidade do avião era 2,3 vezes maior que a velocidade do som no ar que o avião estava atravessando. A onda de choque gerada por uma aeronave supersônica (Fig. 17-24) ou por um projétil produz um som semelhante ao de uma explosão, conhecido como *estrondo sônico*, no qual a pressão do ar primeiro aumenta bruscamente e depois diminui para valores menores que o normal antes voltar ao normal. Parte do som produzido pelo disparo de um rifle se deve ao estrondo sônico produzido pela bala. Um estrondo sônico também pode ser produzido agitando rapidamente um chicote comprido. Perto do fim do movimento a ponta está se movendo mais depressa que o som e produz um pequeno estrondo sônico: o *estalo* do chicote.

**FIG. 17-24** Ondas de choque produzidas pelas asas de um jato FA 18 da Marinha dos Estados Unidos. As ondas de choque são visíveis porque a redução brusca da pressão do ar fez com que moléculas de água se condensassem, formando uma nuvem. *(Foto do guarda-marinha John Gay para a Marinha dos Estados Unidos)*

## REVISÃO E RESUMO

**Ondas Sonoras** Ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que podem se propagar em sólidos, líquidos e gases. A velocidade *v* de uma onda sonora em um meio de **módulo de elasticidade volumétrico** *B* e massa específica $\rho$ é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(velocidade do som).} \qquad (17\text{-}3)$$

No ar a 20°C, a velocidade do som é igual a 343 m/s.

Uma onda sonora provoca um deslocamento longitudinal *s* de um elemento de massa em um meio que é dado por

$$s = s_m \cos(kx - \omega t), \qquad (17\text{-}13)$$

onde $s_m$ é a **amplitude do deslocamento** (deslocamento máximo) em relação ao equilíbrio, $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$, onde $\lambda$ e *f* são o

comprimento de onda e a freqüência da onda sonora. A onda sonora também provoca uma variação $\Delta p$ da pressão do meio em relação à pressão de equilíbrio:

$$\Delta p = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{17-14}$$

onde a **amplitude da pressão** é

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \tag{17-15}$$

**Interferência** A interferência de duas ondas sonoras de mesmo comprimento de onda que passam pelo mesmo ponto depende da diferença de fase $\phi$ entre as ondas nesse ponto. Se as ondas sonoras foram emitidas em fase e se propagam aproximadamente na mesma direção, $\phi$ é dado por

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi, \tag{17-21}$$

onde $\Delta L$ é a **diferença de percurso** (a diferença entre as distâncias percorridas pelas ondas para chegar ao ponto comum). A interferência totalmente construtiva acontece quando $\phi$ é um múltiplo inteiro de $2\pi$,

$$\phi = m(2\pi), \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17-22}$$

ou seja, quando a razão entre $\Delta L$ e o comprimento de onda $\lambda$ é dada por

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17-23}$$

A interferência totalmente destrutiva acontece quando $\phi$ é um múltiplo ímpar de $\pi$,

$$\phi = (2m + 1)\pi, \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17-24}$$

ou seja, quando a razão entre $\Delta L$ e o comprimento de onda $\lambda$ é dada por

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0{,}5; 1{,}5; 2{,}5; \ldots \tag{17-25}$$

**Intensidade Sonora** A **intensidade** $I$ de uma onda sonora em uma superfície é a taxa média por unidade de área com a qual a energia contida na onda atravessa a superfície ou é absorvida pela superfície:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{17-26}$$

onde $P$ é a taxa de transferência de energia (potência) da onda sonora e $A$ é a área da superfície que intercepta o som. A intensidade $I$ está relacionada à amplitude $s_m$ do deslocamento da onda sonora através da equação

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2. \tag{17-27}$$

A intensidade a uma distância $r$ da fonte pontual que emite ondas sonoras de potência $P_s$ é

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}. \tag{17-28}$$

**Nível Sonoro em Decibéis** O *nível sonoro* $\beta$ em *decibéis* (dB) é definido como

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \tag{17-29}$$

onde $I_0$ ($= 10^{-12}$ W/m$^2$) é um nível de intensidade de referência com o qual todas as intensidades são comparadas. Para cada aumento de um fator de 10 na intensidade, 10 dB são somados ao nível sonoro.

**Ondas Estacionárias em Tubos** Ondas sonoras estacionárias podem ser produzidas em tubos. No caso de um tubo aberto nas duas extremidades as freqüências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17-39}$$

onde $v$ é a velocidade do som no ar do interior do tubo. No caso de um tubo fechado em uma das extremidades e aberto na outra, as freqüências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots. \tag{17-41}$$

**Batimentos** Os *batimentos* acontecem quando duas ondas de freqüências ligeiramente diferentes, $f_1$ e $f_2$, são detectadas simultaneamente. A freqüência de batimento é dada por

$$f_{\text{bat}} = f_1 - f_2. \tag{17-46}$$

**O Efeito Doppler** O *efeito Doppler* é a mudança da freqüência observada de uma onda quando a fonte ou o detector está se movendo em relação ao meio onde a onda está se propagando (como, por exemplo, o ar). No caso do som, a freqüência observada $f'$ está relacionada à freqüência $f$ da fonte através da equação

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} \qquad \text{(equação geral do efeito Doppler)}, \tag{17-47}$$

onde $v_D$ é a velocidade do detector em relação ao meio, $v_S$ é a velocidade da fonte e $v$ é a velocidade do som no meio. Os sinais são escolhidos para que $f'$ tenda a ser *maior* para os movimentos de aproximação e *menor* para os movimentos de afastamento.

**Ondas de Choque** Se a velocidade de uma fonte em relação ao meio é maior que a velocidade do som no meio, a equação para o efeito Doppler deixa de ser válida. Nesse caso, surgem ondas de choque. O semi-ângulo $\theta$ do cone de Mach é dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{v_S} \qquad \text{(ângulo do cone de Mach)}. \tag{17-57}$$

## PERGUNTAS

1 Na Fig. 17-25, três tubos longos ($A$, $B$ e $C$) estão cheios de gases submetidos a pressões diferentes. A razão entre o módulo de elasticidade volumétrico e a massa específica está indicada para cada gás em termos de um valor de referência $B_0/\rho_0$. Cada tubo possui um êmbolo na extremidade esquerda que pode produzir um pulso no tubo (como na Fig. 16-2). Os três pulsos são produzidos simultaneamente. Ordene os tubos de acordo com o tempo de chegada dos pulsos na extremidade direita aberta dos tubos, em ordem crescente.

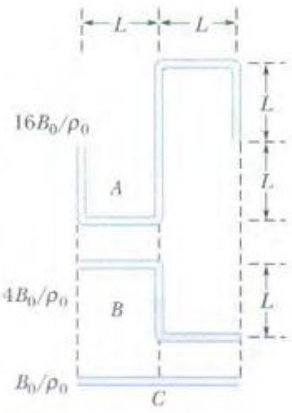



FIG. 17-25 Pergunta 1.

**2** Na Fig. 17-26, duas fontes pontuais $S_1$ e $S_2$, que estão em fase, emitem ondas sonoras iguais de comprimento de onda 2,0 m. Em termos de comprimentos de onda, qual é a diferença de fase entre as ondas que chegam ao ponto $P$ se (a) $L_1 = 38$ m e $L_2 = 34$ m, (b) $L_1 = 39$ m e $L_2 = 36$ m? (c) Supondo que a distância entre as fontes é muito menor que $L_1$ e $L_2$, que tipo de interferência ocorre em $P$ nas situações (a) e (b)?

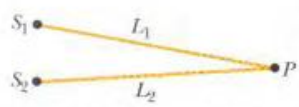



FIG. 17-26 Pergunta 2.

**3** Em um primeiro experimento, uma onda sonora senoidal é produzida em um tubo longo de ar, transportando energia a uma taxa média $P_{méd,1}$. Em um segundo experimento, duas ondas sonoras iguais à primeira são produzidas simultaneamente no tubo com uma diferença de fase $\phi$ de 0; 0,2 ou 0,5 comprimento de onda. (a) Sem fazer cálculos no papel, ordene esses valores de $\phi$ de acordo com a taxa média com a qual as ondas transportam energia, em ordem decrescente. (b) Para o primeiro valor de $\phi$, qual é a taxa média em termos de $P_{méd,1}$?

**4** O tubo $A$ tem comprimento $L$ e uma extremidade aberta. O tubo $B$ tem comprimento $2L$ e as duas extremidades abertas. Quais harmônicos do tubo $B$ têm freqüências iguais às freqüências de ressonância do tubo $A$?

**5** Quatro das seis freqüências dos harmônicos abaixo de 1000 Hz de um certo tubo são 300, 600, 750 e 900 Hz. Quais são as duas freqüências que estão faltando nesta lista?

**6** O sexto harmônico é gerado em um tubo. (a) Quantas extremidades abertas o tubo possui (ele possui pelo menos uma)? (b) No ponto médio do tubo existe um nó, um antinó ou um estado intermediário?

**7** Na Fig. 17-27, o tubo $A$ é colocado para oscilar no terceiro harmônico por uma pequena fonte sonora interna. O som emitido na extremidade direita faz ressoar quatro tubos próximos, cada um com apenas uma extremidade aberta (eles *não estão* desenhados em escala). O tubo $B$ oscila no modo fundamental, o tubo $C$ no segundo harmônico, o tubo $D$ no terceiro harmônico e o tubo $E$ no quarto harmônico. Sem executar cálculos, ordene os cinco tubos de acordo com seus comprimentos, em ordem decrescente. (*Sugestão:* Desenhe as ondas estacionárias em escala e, em seguida, desenhe os tubos em escala.)

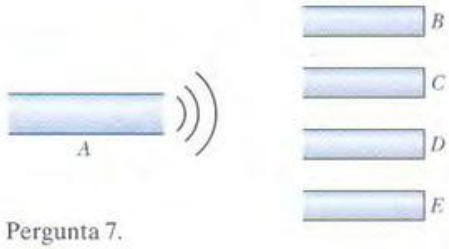



FIG. 17-27 Pergunta 7.

**8** A Fig. 17-28 mostra uma corda esticada de comprimento $L$ e tubos $a$, $b$, $c$ e $d$ de comprimentos $L$, $2L$, $L/2$ e $L/2$, respectivamente. A tensão da corda é ajustada até que a velocidade das ondas na corda seja igual à velocidade do som no ar. O modo fundamental de oscilação é então produzido na corda. Em que tubo o som gerado pela corda produz ressonância e qual é o modo de oscilação correspondente?

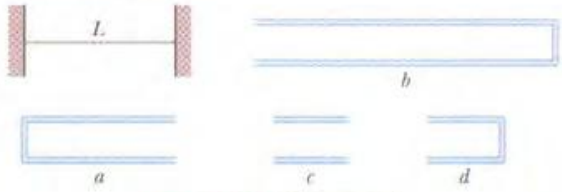



FIG. 17-28 Pergunta 8.

**9** A Fig. 17-29 mostra uma fonte $S$ em movimento que emite sons com uma certa freqüência e quatro detectores de som estacionários. Ordene os detectores de acordo com a freqüência do som que detectam, da maior para a menor.

FIG. 17-29 Pergunta 9.

**10** Uma pessoa fica na borda de três carrosséis, um de cada vez, segurando uma fonte que emite isotropicamente sons de uma certa freqüência. A freqüência que outra pessoa ouve a uma certa distância dos carrosséis varia com o tempo por causa da rotação dos carrosséis. A variação da freqüência para os três carrosséis está plotada em função do tempo da Fig. 17-30. Ordene as curvas de acordo (a)com a velocidade linear $v$ da fonte sonora, (b) com a velocidade angular $\omega$ do carrossel e (c) com o raio $r$ do carrossel, em ordem decrescente.

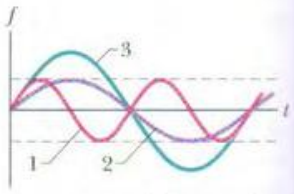



FIG. 17-30 Pergunta 10.

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

*Use os seguintes valores nos problemas, a menos que sejam fornecidos outros valores:*

velocidade do som no ar: 343 m/s

*e*

massa específica do ar: 1,21 kg/m³

### seção 17-3 A Velocidade do Som

•**1** Quando a porta da Capela do Mausoléu, em Hamilton, Escócia, é fechada, o último eco ouvido por uma pessoa que está atrás da porta, no interior da capela, ocorre 15 s depois. (a)

Se esse eco se devesse a uma única reflexão em uma parede em frente à porta, a que distância da porta estaria essa parede? (b) Como a parede, na verdade, está a 25,7 m de distância, a quantas reflexões (para a frente e para trás) corresponde o último eco?

•2 Uma coluna de soldados, marchando a 120 passos por minuto, segue o ritmo da batida de um tambor que é tocado na frente da coluna. Observa-se que os últimos soldados da coluna estão levantando o pé esquerdo quando os primeiros soldados estão levantando o pé direito. Qual é o comprimento aproximado da coluna?

•3 Dois espectadores de uma partida de futebol, no estádio de Montjuic, vêem e depois ouvem uma bola ser chutada no campo. O tempo de retardo para o espectador $A$ é 0,23 s e para o espectador $B$ é 0,12 s. As linhas de visada dos dois espectadores até o jogador que chutou a bola fazem um ângulo de 90°. A que distância do jogador estão (a) o espectador $A$ e (b) o espectador $B$? (c) Qual é a distância entre os dois espectadores?

•4 Qual é o modulo de elasticidade volumétrico do oxigênio se 32 g de oxigênio ocupam 22,4 L e a velocidade do som no oxigênio é 317 m/s?

••5 Uma pedra é jogada em um poço. O som produzido pela pedra ao se chocar com a água é ouvido 3,00 s depois. Qual é a profundidade do poço?

••6 *O efeito chocolate quente.* Bata com uma colher na parte interna de uma xícara com água quente e preste atenção na freqüência $f_i$ do som. Acrescente uma colher de sopa de chocolate em pó ou café solúvel e repita o experimento enquanto mexe o líquido. A princípio, a nova freqüência, $f_s$, é menor, porque pequenas bolhas de ar liberadas pelo pó diminuem o valor do módulo de elasticidade volumétrico da água. Quando as bolhas chegam à superfície da água e desaparecem a freqüência volta ao valor original. Enquanto o efeito dura as bolhas não modificam apreciavelmente a massa específica nem o volume do líquido; limitam-se a alterar o valor de $dV/dp$, ou seja, a taxa de variação do volume do líquido causada pela variação de pressão associada às ondas sonoras. Se $f_s/f_i = 0{,}333$, qual é o valor da razão $(dV/dp)_s/(dV/dp)_i$?

••7 Os terremotos geram ondas sonoras no interior da Terra. Ao contrário de um gás, a Terra pode transmitir tanto ondas sonoras transversais (S) como ondas sonoras longitudinais (P). A velocidade das ondas S é da ordem de 4,5 km/s e a das ondas P é da ordem de 8,0 km/s. Um sismógrafo registra as ondas P e S de um terremoto. As primeiras ondas P chegam 3,0 min antes das primeiras ondas S. Se as ondas se propagaram em linha reta, a que distância ocorreu o terremoto?

••8 Um homem bate com um martelo na ponta de uma barra delgada. A velocidade do som na barra é 15 vezes maior que a velocidade do som no ar. Uma mulher na outra extremidade, com o ouvido próximo da barra, escuta o som da pancada duas vezes, com um intervalo de 0,12 s; um som vem da barra e outro vem do ar em torno da barra. Se a velocidade do som no ar é 343 m/s, qual é o comprimento da barra?

## seção 17-4 Ondas Sonoras Progressivas

•9 Um aparelho de ultra-som, com uma freqüência de 4,50 MHz, é usado para examinar tumores em tecidos moles. (a) Qual é o comprimento de onda no ar das ondas sonoras produzidas pelo aparelho? (b) Se a velocidade do som no tecido é 1500 m/s, qual é o comprimento de onda no tecido das ondas produzidas pelo aparelho?

•10 A pressão de uma onda sonora progressiva é dada pela equação

$$\Delta p = (1{,}5\ \text{Pa})\ \text{sen}\ \pi[(0{,}900\ m^{-1})x - (315\ s^{-1})t].$$

Determine (a) a amplitude, (b) a freqüência, (c) o comprimento de onda e (d) a velocidade da onda.

•11 Se a forma de uma onda sonora que se propaga no ar é

$$s(x,t) = (6{,}0\ \text{nm})\cos(kx + (3000\ \text{rad/s})t + \phi),$$

quanto tempo uma molécula de ar no caminho onda leva para se mover entre os deslocamentos $s = 2{,}0$ nm e $s = -2{,}0$ nm?

•12 *Ilusão causada pela água.* Uma das informações usadas pelo cérebro humano para determinar a localização de uma fonte sonora é a diferença $\Delta t$ entre o instante em que um som é detectado pelo ouvido mais próximo da fonte e o instante em que é detectado pelo outro ouvido. Suponha que a fonte está suficientemente distante para que as frentes de onda sejam praticamente planas e seja $D$ a distância entre os ouvidos. (a) Se a direção da fonte faz um ângulo $\theta$ com uma perpendicular ao plano do rosto (Fig. 17-31), qual é o valor de $\Delta t$ em termos de $D$ e da velocidade $v$ do som no ar? (b) Se uma pessoa está debaixo d'água e a fonte está exatamente à direita, qual é o valor de $\Delta t$ em termos de $D$ e da velocidade $v_a$ do som na água? (c) Com base na diferença $\Delta t$, o cérebro calcula erroneamente que a direção da fonte faz um ângulo $\theta \neq 90°$ com uma perpendicular ao plano do rosto. Determine o valor de $\theta$ para água doce a 20 °C.

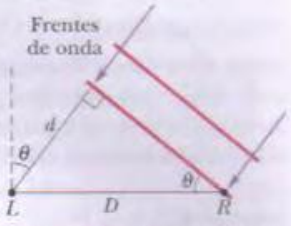


FIG. 17-31 Problema 12.

••13 O som de bater de palmas em um anfiteatro produz ondas que são espalhadas por degraus de largura $w = 0{,}75$ m (Fig. 17-32). O som retorna ao palco como uma série regular de pulsos, que soa como uma nota musical. (a) Supondo que todos os raios na Fig. 17-32 são horizontais, determine a freqüência com a qual os pulsos chegam ao palco (ou seja, a freqüência da nota ouvida por alguém que se encontra no palco). (b) Se a largura $w$ dos degraus fosse menor, a freqüência seria maior ou menor?

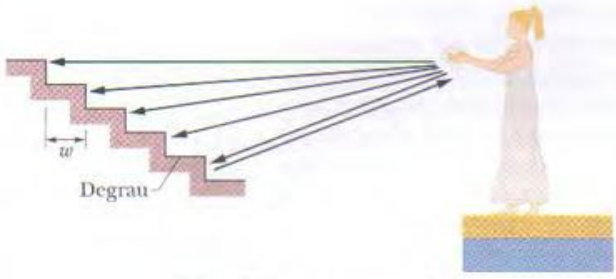


FIG. 17-32 Problema 13.

••14 A Fig. 17-33 mostra a leitura de um monitor de pressão montado em um ponto da trajetória de uma onda sonora de uma só freqüência, propagando-se a 343 m/s em um ar de massa específica uniforme 1,21 kg/m³. A escala do eixo vertical é definida por $\Delta p_s = 4{,}0$ mPa. Se a função *deslocamento* da onda é $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$,

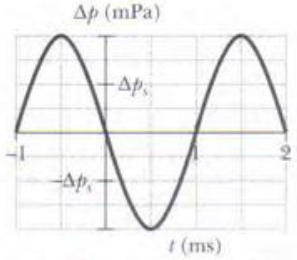


FIG. 17-33 Problema 14.

determine (a) $s_m$, (b) $k$ e (c) $\omega$. Quando o ar é resfriado, a massa específica aumenta para 1,35 kg/m$^3$ e a velocidade da onda sonora diminui para 320 m/s. A fonte emite uma onda com a mesma freqüência e a mesma pressão que antes. Qual é o novo valor (d) de sm, (e) de $k$ e (f) de $\omega$?

••15 Uma onda sonora da forma $s = s_m \cos(kx - \omega t + \phi)$ se propaga a 343 m/s no ar em um tubo horizontal longo. Em um certo instante a molécula $A$ do ar, situada no ponto $x = 2{,}000$ m, está com o deslocamento máximo positivo de 6,00 nm e a molécula $B$, situada em $x = 2{,}070$ m, está com um deslocamento positivo de 2,00 nm. Todas as moléculas entre $A$ e $B$ estão com deslocamentos intermediários. Qual é a freqüência da onda?

## seção 17-5 Interferência

•16 Duas ondas sonoras, produzidas por duas fontes diferentes de mesma freqüência, 540 Hz, se propagam na mesma direção e no mesmo sentido a 330 m/s. As fontes estão em fase. Qual é a diferença de fase das ondas em um ponto que está a 4,40 m de uma fonte e a 4,00 m da outra?

••17 A Fig. 17-34 mostra duas fontes sonoras pontuais isotrópicas, $S_1$ e $S_2$. As fontes, que emitem ondas em fase, de comprimento de onda $\lambda = 0{,}50$ m, estão separadas por uma distância $D = 1{,}75$ m. Se um detector é deslocado ao longo de uma grande circunferência cujo raio é o ponto médio entre as fontes, em quantos pontos as ondas chegam ao detector (a) exatamente em fase e (b) com fases opostas?

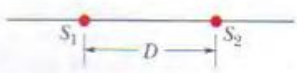


FIG. 17-34 Problemas 17 e 107.

••18 Na Fig. 17-35, um som com comprimento de onda de 40,0 cm se propaga para a direita um tubo que possui uma bifurcação. Ao chegar à bifurcação a onda se divide em duas partes. Uma parte se propaga em um tubo em forma de semicircunferência e a outra se propaga em um tubo retilíneo. As duas ondas se combinam mais adiante, interferindo mutuamente antes de chegarem a um detector. Qual é o menor raio $r$ da semicircunferência para o qual a intensidade medida pelo detector é mínima?

FIG. 17-35 Problema 18.

••19 Na Fig. 17-36 dois alto-falantes separados por uma distância $d_1 = 2{,}00$ m estão em fase. Suponha que as amplitudes das ondas sonoras emitidas pelos alto-falantes são aproximadamente iguais para um ouvinte que se encontra diretamente à frente do alto-falante da direita, a uma distância $d_2 = 3{,}75$ m. Considere toda a faixa de audição de um ser humano normal, 20 Hz a 20 kHz. (a) Qual é a menor freqüência, $f_{\text{mín},1}$, para a qual a intensidade do som é mínima (interferência destrutiva) na posição do ouvinte? Por que número a freqüência $f_{\text{mín},1}$ deve ser multiplicada para se obter (b) a segunda menor freqüência, $f_{\text{mín},2}$, para a qual a intensidade do som é mínima, e (c) a terceira menor freqüência, $f_{\text{mín},3}$, para a qual a intensidade do som é mínima? (d) Qual é a menor freqüência, $f_{\text{máx},1}$, para a qual a intensidade do som é máxima (interferência construtiva) na posição do ouvinte? Por qual número $f_{\text{máx},1}$ deve ser multiplicada para se obter (e) a segunda menor freqüência, $f_{\text{máx},2}$, para a qual a intensidade do som é máxima, e (c) a terceira menor freqüência, $f_{\text{máx},3}$, para a qual a intensidade do som é máxima?

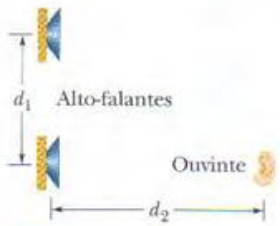


FIG. 17-36 Problema 19.

••20 Na Fig. 17-37 as ondas sonoras $A$ e $B$, de mesmo comprimento de onda $\lambda$, estão inicialmente em fase e se propagam para a direita, como indicam os dois raios. A onda $A$ é refletida por quatro superfícies, mas volta a se propagar na direção e no sentido original. O mesmo acontece com a onda $B$, mas depois de ser refletida por apenas duas superfícies. Suponha que a distância $L$ da figura é um múltiplo do comprimento de onda $\lambda$: $L = q\lambda$. Qual é (a) o menor e (b) o segundo menor valor de $q$ para o qual $A$ e $B$ estão em oposição de fase após as reflexões?

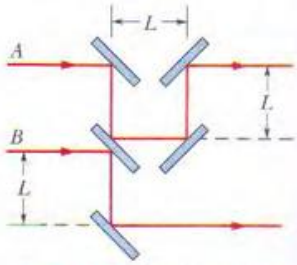


FIG. 17-37 Problema 20.

••21 Dois alto-falantes estão separados por uma distância de 3,35 m em um palco ao ar livre. Um ouvinte está a 18,3 m de um dos alto-falantes e a 19,5 m do outro. Durante o teste do som um gerador de sinais alimenta os dois alto-falantes em fase com um sinal de mesma amplitude e freqüência. A freqüência transmitida varia ao longo de toda a faixa audível (20 Hz a 20 kHz). (a) Qual é menor freqüência, $f_{\text{mín},1}$, para a qual a intensidade do sinal é mínima (interferência destrutiva) na posição do ouvinte? Por que número $f_{\text{mín},1}$ deve ser multiplicada para se obter (b) a segunda menor freqüência, $f_{\text{mín},2}$, para a qual o sinal é mínimo, e (c) a terceira menor freqüência, $f_{\text{mín},3}$, para a qual o sinal é mínimo? (d) Qual é menor freqüência, $f_{\text{máx},1}$, para a qual o sinal é máximo (interferência construtiva) na posição do ouvinte? Por que número $f_{\text{máx},1}$ deve ser multiplicada para se obter (e) a segunda menor freqüência, $f_{\text{máx},2}$ para a qual o sinal é máximo, e (c) a terceira menor freqüência, $f_{\text{máx},3}$ para a qual o sinal é máximo?

••22 A Fig. 17-38 mostra quatro fontes sonoras pontuais isotrópicas uniformemente espaçadas ao longo de um eixo $x$. As fontes emitem sons de mesmo comprimento de onda $\lambda$ e mesma amplitude $s_m$, e estão em fase. Um ponto $P$ é mostrado sobre o eixo $x$. Suponha que quando as ondas se propagam até $P$ a amplitude se mantém praticamente constante. Que múltiplo de $s_m$ corresponde à amplitude da onda resultante em $P$ se a distância $d$ mostrada na figura é (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ e (c) $\lambda$?

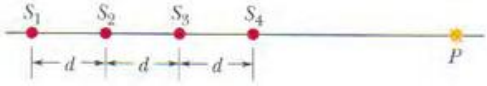


FIG. 17-38 Problema 22.

•••23 A Fig. 17-39 mostra duas fontes pontuais $S_1$ e $S_2$ que emitem sons de comprimento de onda $\lambda = 2{,}00$ m. As emissões são isotrópicas e em fase; a distância entre as fontes é $d = 16{,}0$ m. Em qualquer ponto $P$ sobre o eixo x as ondas produzidas por $S_1$ e $S_2$ interferem. Se $P$ está muito distante ($x \approx \infty$), qual é (a) a diferença de fase entre as ondas produzidas por $S_1$ e $S_2$ e (b) o tipo de interferência que elas produzem? Suponha que o ponto $P$ é deslocado ao longo do eixo $x$ em direção a $S_1$. (c) A diferença de fase entre as ondas aumenta ou diminui? A que distância $x$ da origem as ondas possuem uma diferença de fase de (d) $0{,}50\lambda$, (e) $1{,}00\lambda$ e (f) $1{,}50\lambda$?

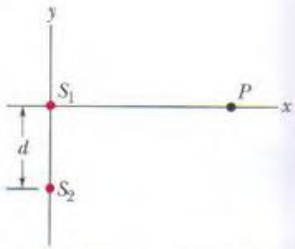


FIG. 17-39 Problema 23.

### seção 17-6 Intensidade e Nível Sonoro

•24 Uma fonte pontual de 1,0 W emite ondas sonoras isotropicamente. Supondo que a energia da onda é conservada, determine a intensidade (a) a 1,0 m e (b) a 2,5 m da fonte.

•25 Uma fonte emite ondas sonoras isotropicamente. A intensidade das ondas a 2,50 m da fonte é $1{,}91 \times 10^{-4}$ W/m$^2$. Supondo que a energia da onda é conservada, determine a potência da fonte.

•26 A diferença entre os níveis sonoros de dois sons é 1,00 dB. Qual é a razão entre a intensidade maior e a intensidade menor?

•27 Uma onda sonora com uma freqüência de 300 Hz tem uma intensidade de 1,00 $\mu$W/m$^2$. Qual é a amplitude das oscilações do ar causadas por esta onda?

•28 A fonte de uma onda sonora tem uma potência de 1,00 $\mu$W. Se ela é uma fonte pontual, (a) qual é a intensidade a 3,00 m de distância e (b) qual é o nível sonoro em decibéis a essa distância?

•29 O nível sonoro de uma certa fonte sonora é aumentado em 30,0 dB. Por que fator é multiplicada (a) a intensidade do som e (b) a amplitude da pressão do ar?

•30 Uma discussão começa acalorada, com um nível sonoro de 70 dB, mas o nível cai para 50 dB quando os interlocutores se acalmam. Supondo que a freqüência do som é 500 Hz, determine a intensidade (a) inicial e (b) final e a amplitude (c) inicial e (d) final das ondas sonoras.

•31 O macho da rã-touro, *Rana catesbeiana*, é conhecido pelos ruidosos gritos de acasalamento. O som não é emitido pela boca da rã, mas pelos tímpanos. Surpreendentemente, o mecanismo nada tem a ver com o papo inflado da rã. Se o som emitido possui uma freqüência de 260 Hz e um nível sonoro de 85 dB (perto dos tímpanos), qual é a amplitude da oscilação dos tímpanos? A massa específica do ar é 1,21 kg/m$^3$.

•32 Os ouvidos de aproximadamente um terço das pessoas com audição normal emitem continuamente um som de baixa intensidade através do canal auditivo. Uma pessoa com essa *emissão otoacústica espontânea* raramente tem consciência do som, exceto talvez em um ambiente extremamente silencioso, mas às vezes a emissão é suficientemente intensa para ser percebida por outra pessoa. Em uma observação, a onda sonora tinha uma freqüência de 1665 Hz e uma amplitude de pressão de $1{,}13 \times 10^{-3}$ Pa. Quais eram (a) a amplitude dos deslocamentos e (b) a intensidade da onda emitida pelo ouvido?

•33 Ao "estalar" uma junta você alarga bruscamente a cavidade da articulação, aumentando o volume disponível para o fluido sinovial em seu interior e causando o aparecimento súbito de uma bolha de ar no fluido. A produção súbita da bolha, chamada de "cavitação", produz um pulso sonoro: o som do estalo. Suponha que o som é transmitido uniformemente em todas as direções e que passa completamente do interior da articulação para o exterior. Se o pulso tem um nível sonoro de 62 dB no seu ouvido, estime a taxa com a qual a energia é produzida pela cavitação.

••34 *Conversas em festas.* Quanto maior o número de pessoas presentes em uma festa mais você precisa levantar a voz para ser ouvido, por casa do *ruído de fundo* dos outros participantes. Entretanto, depois que você está gritando a plenos pulmões a única forma de se fazer ouvir é aproximar-se do interlocutor, invadindo seu "espaço pessoal". Modele a situação substituindo a pessoa que está falando por uma fonte sonora isotrópica de potência fixa $P$ e o ouvinte por um ponto $Q$ que absorve parte das ondas sonoras. Os pontos $P$ e $Q$ estão separados inicialmente por uma distância $r_i = 1{,}20$ m. Se o ruído de fundo aumenta de $\Delta\beta = 5$ dB, o nível do som na posição do ouvinte também deve aumentar. Qual é a nova distância $r_f$ necessária para que a conversa possa prosseguir?

••35 Uma fonte pontual emite 30,0 W de som isotropicamente. Um pequeno microfone intercepta o som em uma área de 0,750 cm$^2$, a 200 m de distância da fonte. Calcule (a) a intensidade sonora nessa posição e (b) a potência interceptada pelo microfone.

••36 Duas fontes sonoras $A$ e $B$ na atmosfera emitem isotropicamente com potência constante. Os níveis sonoros $\beta$ das emissões estão plotados na Fig. 17-40 em função da distância $r$ das fontes. A escala do eixo vertical é definida por $\beta_1 = 85{,}0$ dB e $\beta_2 = 65{,}0$ dB. Para $r = 10$ m, determine (a) a razão entre a maior e a menor potência e (b) a diferença entre os níveis sonoros das emissões.

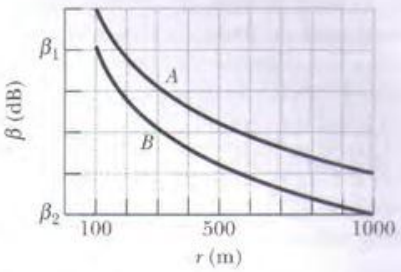



FIG. 17-40
Problema 36.

•••37 Uma fonte produz uma onda sonora senoidal de freqüência angular 3000 rad/s e amplitude 12,0 nm em um tubo com ar. O raio interno do tubo é 2,00 cm. (a) Qual é a taxa média com a qual a energia (soma das energias cinética e potencial) é transportada para a extremidade oposta do tubo? (b) Se, ao mesmo tempo, uma onda igual se propaga em um tubo vizinho idêntico, qual é a taxa média total com a qual a energia é transportada pelas ondas para a extremidade oposta dos tubos? Se, em vez disso, essas duas ondas são produzidas simultaneamente no *mesmo* tubo, qual é a taxa média total com que a energia é transportada quando a diferença de fase entre as ondas é (c) 0, (d) $0{,}40\pi$ rad e (e) $\pi$ rad?

### seção 17-7 Fontes de Sons Musicais

•38 A crista do crânio de um dinossauro *Parasaurolophus* continha uma passagem nasal na forma de um tubo longo e arqueado aberto nas duas extremidades. O dinossauro pode ter usado a passagem para produzir sons no modo fundamental do tubo. (a) Se a passagem nasal de um certo fóssil de *Parasaurolophus* tem 2,0 m de comprimento, que freqüência era produzida? (b) Se esse dinossauro pudesse ser clonado (como em *Jurassic Park*), uma pessoa com uma capacidade auditiva na faixa de 60 Hz a 20 kHz poderia ouvir esse modo fundamental? O som seria de alta ou de baixa freqüência? Crânios fósseis com passagens nasais mais curtas são atribuídos a *Parasaurolophus* fêmeas. (c) Isso torna a freqüência fundamental da fêmea maior ou menor que a do macho?

•39 Uma corda de violino com 15,0 cm de comprimento e as duas extremidades fixas oscila no modo $n = 1$. A velocidade das ondas na corda é 250 m/s e a velocidade do som no ar é 348 m/s. Quais são (a) a freqüência e (b) o comprimento de onda da onda sonora emitida?

•40 Uma onda sonora que se propaga em um meio fluido é refletida em uma barreira, o que leva à formação de uma onda esta-

cionária. A distância entre nós é 3,8 cm e a velocidade de propagação é 1500 m/s. Determine a freqüência da onda sonora.

•41 No tubo $A$, a razão entre a freqüência de um certo harmônico e a freqüência do harmônico precedente é 1,2. No tubo $B$, a razão entre a freqüência de um certo harmônico e a freqüência do harmônico precedente é 1,4. Quantas extremidades abertas existem (a) no tubo $A$ e (b) no tubo $B$?

•42 O tubo de órgão $A$, com as duas extremidades abertas, tem uma freqüência fundamental de 300 Hz. O terceiro harmônico do tubo de órgão $B$, com uma extremidade aberta, tem a mesma freqüência que o segundo harmônico do tubo $A$. Qual é o comprimento (a) do tubo $A$ e (b) do tubo $B$?

•43 (a) Determine a velocidade das ondas em uma corda de violino de massa 800 mg e comprimento 22,0 cm se a freqüência fundamental é 920 Hz. (b) Qual é a tensão da corda? Para o modo fundamental, qual é o comprimento de onda (c) das ondas na corda e (d) das ondas sonoras emitidas pela corda?

•44 O nível de água em um tubo de vidro vertical com 1,00 m de comprimento pode ser ajustado em qualquer posição dentro do tubo. Um diapasão vibrando a 686 Hz é mantido acima da extremidade aberta do tubo para gerar uma onda sonora estacionária na parte superior do tubo, onde existe ar. (Essa parte superior cheia de ar se comporta como um tubo com uma extremidade aberta e a outra fechada.) (a) Para quantas posições diferentes do nível de água o som do diapasão produz uma ressonância na parte do tubo cheia de ar? Quais são (b) a menor altura e (c) a segunda menor altura da água no tubo para as qual ocorre ressonância?

•45 Na Fig. 17-41, $S$ é um pequeno alto-falante alimentado por um oscilador de áudio com uma freqüência que varia de 1000 Hz a 2000 Hz, e $D$ é um tubo cilíndrico com 45,7 cm de comprimento e as duas extremidades abertas. A velocidade do som no ar do interior do tubo é 344 m/s. (a) Para quantas freqüências o som do alto-falante produz ressonância no tubo? Quais são (b) a menor e (c) a segunda menor freqüência de ressonância?

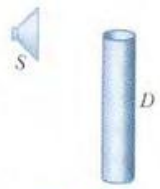


FIG. 17-41 Problema 45.

••46 Uma das freqüências harmônicas do tubo $A$, que possui as duas extremidades abertas, é 325 Hz. A freqüência harmônica seguinte é 390 Hz. (a) Qual é a freqüência harmônica que se segue à freqüência harmônica de 195 Hz? (b) Qual é o número desse harmônico?

Uma das freqüências harmônicas do tubo $B$, com apenas uma das extremidades aberta, é 1080 Hz. A freqüência harmônica seguinte é 1320 Hz. (c) Qual é a freqüência harmônica que se segue à freqüência harmônica de 600 Hz? (d) Qual é o número desse harmônico?

••47 Uma corda de violino de 30,0 cm de comprimento com uma massa específica linear de 0,650 g/m é colocada perto de um alto-falante alimentado por um oscilador de áudio de freqüência variável. Observa-se que a corda entra em oscilação apenas nas freqüências de 880 Hz e 1320 Hz, quando a freqüência do oscilador de áudio varia no intervalo de 500 a 1500 Hz. Qual é a tensão da corda?

••48 Um tubo com 1,20 m de comprimento é fechado em uma extremidade. Uma corda esticada é colocada perto da extremidade aberta. A corda tem 0,330 m de comprimento e 9,60 g de massa, está fixa nas duas extremidades e oscila no modo fundamental. Devido à ressonância, ela faz a coluna de ar no tubo oscilar na sua freqüência fundamental. Determine (a) a freqüência fundamental da coluna de ar e (b) a tensão da corda.

••49 Um poço com paredes verticais e água no fundo ressoa em 7,00 Hz e em nenhuma outra freqüência mais baixa. (A parte do poço cheia de ar se comporta como um tubo com uma extremidade fechada e outra aberta.) O ar no interior do poço tem uma massa específica de 1,10 kg/m$^3$ e um módulo de elasticidade volumétrico de $1{,}33 \times 10^5$ Pa. A que profundidade está a superfície da água?

••50 O tubo $A$, que tem 1,20 m de comprimento e as duas extremidades abertas, oscila na terceira freqüência harmônica. Está cheio de ar, para o qual a velocidade do som é 343 m/s. O tubo $B$, com uma das extremidades fechada, oscila na segunda freqüência harmônica. A freqüência de oscilação de $B$ coincide com a de $A$. Um eixo $x$ coincide com o eixo do tubo $B$, com $x = 0$ na extremidade fechada. (a) Quantos nós existem no eixo $x$? Quais são (b) o menor e (c) o segundo menor valor da coordenada $x$ desses nós? (d) Qual é a freqüência fundamental do tubo $B$?

### seção 17-8 Batimentos

•51 A corda lá de um violino está esticada demais. São ouvidos 4,00 batimentos por segundo quando a corda é tocada junto com um diapasão que oscila exatamente na freqüência do lá de concerto (440 Hz). Qual é o período de oscilação da corda do violino?

•52 Um diapasão de freqüência desconhecida produz 3,00 batimentos com um segundo diapasão-padrão com freqüência de 384 Hz. A freqüência de batimento diminui quando um pequeno pedaço de cera é colocado em um dos braços do primeiro diapasão. Qual é a freqüência desse diapasão?

••53 Duas cordas de piano iguais têm uma freqüência fundamental de 600 Hz quando são submetidas a uma mesma tensão. Que aumento relativo da tensão de uma das cordas faz com que haja 6,0 batimentos por segundo quando as duas cordas oscilam simultaneamente?

••54 Cinco diapasões oscilam com freqüências próximas, mas diferentes. Quais são os números (a) máximo e (b) mínimo de freqüências de batimento diferentes que podem ser produzidas tocando os diapasões aos pares, dependendo da diferença entre as freqüências?

### seção 17-9 O Efeito Doppler

•55 Um guarda rodoviário persegue um carro que excedeu o limite de velocidade em um trecho reto de uma rodovia; os dois carros estão a 160 km/h. A sirene do carro de polícia produz um som com uma freqüência de 500 Hz. Qual é o deslocamento Doppler da freqüência ouvida pelo motorista infrator?

•56 Uma ambulância cuja sirene emite um som com uma freqüência de 1600 Hz passa por um ciclista que está a 2,44 m/s. Depois de ser ultrapassado, o ciclista escuta uma freqüência de 1590 Hz. Qual é a velocidade da ambulância?

•57 Um apito de 540 Hz se move em uma circunferência com 60,0 cm de raio com uma velocidade angular de 15,0 rad/s. Quais são as freqüências (a) mais baixa e (b) mais alta escutadas por um ouvinte distante, em repouso em relação ao centro da circunferência?

••58 Um detector de movimento estacionário envia ondas sonoras de 0,150 MHz em direção a um caminhão que se aproxima com uma velocidade de 45,0 m/s. Qual é a freqüência das ondas refletidas de volta para o detector?

••59 Um alarme acústico contra roubo utiliza uma fonte que emite ondas com uma freqüência de 28,0 kHz. Qual é a freqüência de batimento entre as ondas da fonte e as ondas refletidas em um intruso que caminha com uma velocidade média de 0,950 m/s afastando-se em linha reta do alarme?

••60 Uma fonte sonora $A$ e uma superfície refletora $B$ se movem uma em direção à outra. Em relação ao ar, a velocidade da fonte $A$ é 29,9 m/s, a velocidade da superfície $B$ é 65,8 m/s e a velocidade do som é 329 m/s. A fonte emite ondas com uma freqüência de 1200 Hz no referencial da fonte. No referencial do refletor, quais são (a) a freqüência e (b) o comprimento de onda das ondas sonoras? No referencial da fonte, quais são (c) a freqüência e (d) o comprimento de onda das ondas sonoras refletidas de volta para a fonte?

••61 Na Fig. 17-42, um submarino francês e um submarino americano se movem um em direção ao outro durante manobras em águas paradas no Atlântico Norte. O submarino francês se move com velocidade $v_F = 50{,}0$ km/h e o submarino americano com velocidade $v_A = 70{,}0$ km/h. O submarino francês envia um sinal de sonar (onda sonora na água) de $1{,}000 \times 10^3$ Hz. As ondas de sonar se propagam a 5470 km/h. (a) Qual é a freqüência do sinal detectado pelo submarino americano? (b) Qual é a freqüência do eco do submarino americano detectado pelo submarino francês?

FIG. 17-42 Problema 61.

••62 Um detector estacionário mede a freqüência de uma fonte sonora que se aproxima em linha reta, passa pelo detector e se afasta, mantendo a velocidade constante. A freqüência emitida pela fonte é $f$. A freqüência detectada durante a aproximação é $f'_{ap}$ e a freqüência detectada durante o afastamento é $f'_{af}$. Se $(f'_{ap} - f'_{af})/f = 0{,}500$, qual é a razão $v_s/v$ entre a velocidade da fonte e a velocidade do som?

••63 Um morcego está voando em uma caverna, orientando-se através de pulsos ultra-sônicos. A freqüência dos sons emitidos pelo morcego é 39 000 Hz. O morcego se aproxima de uma parede plana da caverna com uma velocidade igual a 0,025 vez a velocidade do som no ar. Qual é a freqüência com que o morcego ouve os sons refletidos pela parede da caverna?

••64 A Fig. 17-43 mostra quatro tubos de 1,0 m ou 2,0 m de comprimento e com uma ou as duas extremidades abertas. O terceiro harmônico é produzido em cada tubo, e parte do som que escapa é captada pelo detector $D$, que se afasta dos tubos em linha reta. Em termos da velocidade do som $v$, que velocidade deve ter o detector para que a freqüência do som proveniente (a) do tubo 1, (b) do tubo 2, (c) do tubo 3 e (d) do tubo 4 seja igual à freqüência fundamental do tubo?

FIG. 17-43 Problema 64.

•••65 Uma menina está sentada perto da janela aberta de um trem que viaja para leste com uma velocidade de 10,00 m/s. O tio da menina está parado na plataforma e observa o trem se afastar. O apito da locomotiva produz um som com uma freqüência de 500,0 Hz. O ar está parado. (a) Que freqüência o tio ouve? (b) Que freqüência a menina ouve? (c) Um vento vindo do leste começa a soprar a 10,00 m/s. (c) Que freqüência o tio passa a ouvir? (d) Que freqüência a menina passa a ouvir?

•••66 Dois trens viajam um em direção ao outro a 30,5 m/s em relação ao solo. Um dos trens faz soar um apito de 500 Hz. (a) Que freqüência é ouvida no outro trem se o ar está parado? (b) Que freqüência é ouvida no outro trem se o vento está soprando a 30,5 m/s no sentido contrário ao do trem que apitou? (c) Que freqüência é ouvida se o sentido do vento se inverte?

•••67 Uma sirene de 2000 Hz e um funcionário da defesa civil estão em repouso em relação ao solo. Que freqüência o funcionário ouve se o vento está soprando a 12 m/s (a) da fonte para o funcionário e (b) do funcionário para a fonte?

### seção 17-10 Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque

•68 A onda de choque produzida pelo avião da Fig. 17-24 tinha um ângulo de aproximadamente 60°. O avião estava se movendo a 1350 km/h no momento em que a fotografia foi tirada. Qual era, aproximadamente, a velocidade do som na altitude do avião?

••69 Um avião a jato passa sobre um pedestre a uma altitude de 5000 m e a uma velocidade de Mach 1,5. (a) Determine o ângulo do cone de Mach (a velocidade do som é 331 m/s). (b) Quanto tempo após o avião ter passado diretamente acima do pedestre ele é atingido pela onda de choque?

••70 Um avião voa a 1,25 vez a velocidade do som. Seu estrondo sônico atinge um homem no solo 1,00 min depois de o avião ter passado exatamente por cima dele. Qual é a altitude do avião? Suponha que a velocidade do som é 330 m/s.

### Problemas Adicionais

71 Na Fig. 17-44, um som de comprimento de onda 0,850 m é emitido isotropicamente por uma fonte pontual $S$. O raio de som 1 se propaga diretamente para o detector $D$, situado a uma distância $L = 10{,}0$ m. O raio de som 2 chega a $D$ após ser refletido em uma superfície plana. Essa reflexão ocorre sobre a mediatriz do segmento de reta $SD$, a uma distância $d$ do raio 1. Suponha que a reflexão desloca a fase da onda sonora de $0{,}500\lambda$. Qual é o menor valor de $d$ (diferente de zero) para o qual o som direto e o som refletido chegam a $D$ (a) em oposição de fase e (b) em fase?

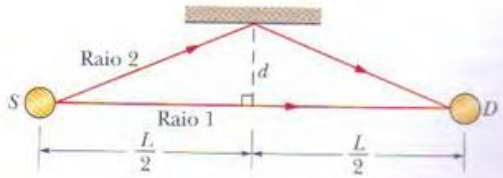



FIG. 17-44 Problema 71.

72 Um detector se aproxima em linha reta de uma fonte sonora estacionária, passa pela fonte e se afasta, mantendo a velocidade constante. A freqüência emitida pela fonte é $f$. A freqüência detectada durante a aproximação é $f'_{ap}$ e a freqüência detectada durante o afastamento é $f'_{af}$. Se $(f'_{ap} - f'_{af})/f = 0{,}500$, qual é a razão $v_D/v$ entre a velocidade do detector e a velocidade do som?

73 Duas ondas sonoras com uma amplitude de 12 nm e um comprimento de onda de 35 cm se propagam no mesmo sentido em um tubo longo, com uma diferença de fase de $\pi/3$ rad. Quais são (a) a amplitude e (b) o comprimento de onda da onda sonora que resulta da interferência das duas ondas? Se, em vez disso, as ondas sonoras se propagam em sentidos opostos no tubo, quais

são (c) a amplitude e (d) o comprimento de onda da onda resultante?

**74** Uma onda sonora senoidal se propaga a 343 m/s no ar no sentido positivo de um eixo $x$. Em um certo instante, a molécula $A$ do ar está em seu deslocamento máximo no sentido negativo do eixo, enquanto a molécula $B$ do ar está em sua posição de equilíbrio. A distância entre as duas moléculas é 15,0 cm e as moléculas entre $A$ e $B$ possuem deslocamentos intermediários no sentido negativo do eixo. (a) Qual é a freqüência da onda sonora?

Em um arranjo semelhante, para uma onda sonora senoidal diferente, a molécula $C$ do ar está em seu máximo deslocamento no sentido positivo do eixo, enquanto a molécula $D$ do ar está em seu máximo deslocamento no sentido negativo. A distância entre essas moléculas é 15,0 cm e as moléculas entre $C$ e $D$ possuem deslocamentos intermediários. (b) Qual é a freqüência da onda sonora?

**75** Na Fig. 17-45, as ondas sonoras $A$ e $B$, de mesmo comprimento de onda $\lambda$, estão inicialmente em fase e se propagam para a direita, como indicam os dois raios. A onda $A$ é refletida por quatro superfícies, mas volta a se propagar na direção e no sentido original. Que múltiplo do comprimento de onda $\lambda$ é o menor valor da distância $L$ da figura para o qual $A$ e $B$ estão em oposição de fase após as reflexões?

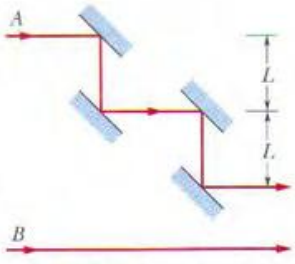


FIG. 17-45 Problema 75.

**76** Um trompetista em um vagão de trem em movimento se aproxima de segundo trompetista ao lado dos trilhos enquanto ambos tocam uma nota de 440 Hz. As ondas sonoras ouvidas por um observador estacionário entre os dois trompetistas têm uma freqüência de batimento de 4,0 batimentos/s. Qual é a velocidade do vagão?

**77** Uma sirene que emite um som com uma freqüência de 1000 Hz se afasta de você em direção a um rochedo com uma velocidade de 10 m/s. Considere a velocidade do som no ar como 330 m/s. (a) Qual é a freqüência do som que você escuta vindo diretamente da sirene? (b) Qual é a freqüência do som que você escuta refletido do rochedo? (c) Qual é a freqüência de batimento entre os dois sons? Ela é perceptível (menor que 20 Hz)?

**78** Uma fonte sonora se move ao longo de um eixo $x$, entre os detectores $A$ e $B$. O comprimento de onda do som detectado por $A$ é 0,500 do comprimento do som detectado por $B$. Qual é a razão $v_S/v$ entre a velocidade da fonte e a velocidade do som?

**79** Um sistema de alto-falantes emite sons isotropicamente com uma freqüência de 2000 Hz e uma intensidade de 0,960 mW/m$^2$ a uma distância de 6,10 m. Suponha que não existem reflexões. (a) Qual é a intensidade a 30,0 m? A 6,10 m, quais são (b) a amplitude do deslocamento e (c) a amplitude de pressão do som?

**80** Em um certo ponto, duas ondas produzem variações de pressão dadas por $\Delta p_1 = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega t$ e $\Delta p_2 = \Delta p_m \operatorname{sen} (\omega t - \phi)$. Nesse ponto, qual é a razão $\Delta p_r/\Delta p_m$, onde $\Delta p_r$ é a amplitude da pressão da onda resultante, se $\phi$ é igual a (a) 0, (b) $\pi/2$, (c) $\pi/3$ e (d) $\pi/4$?

**81** A intensidade do som é 0,0080 W/m$^2$ a uma distância de 10 m de uma fonte sonora pontual isotrópica. (a) Qual é a potência da fonte? (b) Qual é a intensidade sonora a 5,0 m da fonte? (c) Qual é o nível sonoro a 10 m da fonte?

**82** A massa específica média da crosta da Terra 10 km abaixo dos continentes é 2,7 g/cm$^3$. A velocidade de ondas sísmicas a essa profundidade, calculada a partir do tempo de percurso das ondas produzida por terremotos distantes, é 5,4 km/s. Use essa informação para determinar o módulo de elasticidade volumétrico da crosta terrestre a essa profundidade. Para fins de comparação, o módulo de elasticidade volumétrico do aço é aproximadamente $16 \times 10^{10}$ Pa.

**83** Dois diapasões iguais oscilam a 440 Hz. Uma pessoa está situada em algum ponto da reta que liga os dois diapasões. Calcule a freqüência de batimento ouvida por essa pessoa se (a) ela estiver parada e os dois diapasões se moverem no mesmo sentido ao longo da reta a 3,00 m/s e (b) os diapasões estiverem parados e o ouvinte se mover ao longo da reta a 3,00 m/s.

**84** É possível estimar a distância de um relâmpago contando o número de segundos que separam o clarão do trovão. Por que número inteiro é preciso dividir o número de segundos para obter a distância em quilômetros?

**85** (a) Se duas ondas sonoras, uma no ar e uma na água doce, têm a mesma freqüência e a mesma intensidade, qual é a razão entre a amplitude da pressão da onda na água e a amplitude da pressão da onda no ar? Suponha que a água e o ar estão a 20°C. (Veja a Tabela 14-1.) (b) Se, em vez de terem a mesma intensidade, as ondas têm a mesma amplitude de pressão, qual é a razão entre as intensidades?

**86** Encontre a razão (entre a maior e a menor) (a) das intensidades, (b) das amplitudes de pressão e (c) das amplitudes dos deslocamentos das partículas para dois sons cujos níveis sonoros diferem de 37 dB.

**87** A Fig. 17-46 mostra um interferômetro acústico, usado para demonstrar a interferência de ondas sonoras. A fonte sonora $F$ é um diafragma oscilante; $D$ é um detector de ondas sonoras, como o ouvido ou um microfone; o tubo contém ar. O comprimento do tubo $FBD$ pode variar, mas o do tubo $FAD$ é fixo. Em $D$, a onda sonora que se propaga no tubo $FBD$ interfere com a que se propaga no tubo $FAD$. Em um experimento, a intensidade sonora no detector $D$ possui um valor mínimo de 100 unidades para uma certa posição do braço móvel e aumenta continuamente até um valor máximo de 900 unidades quando o braço é deslocado de 1,65 cm. Determine (a) a freqüência do som emitido pela fonte e (b) a razão entre as amplitudes no ponto D da onda $FAD$ e da onda $FBD$. (c) Como é possível que essas ondas tenham amplitudes diferentes, já que foram geradas pela mesma fonte?

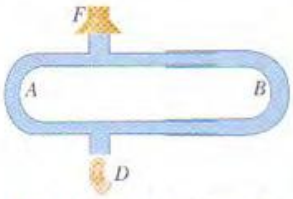


FIG. 17-46 Problema 87.

**88** Uma bala é disparada com uma velocidade de 685 m/s. Determine o ângulo entre o cone de choque e a trajetória da bala.

**89** O som produzido pelos cachalotes (Fig. 17-47*a*) lembra uma série de cliques. Na verdade, a baleia produz apenas um som na frente da cabeça para iniciar a série. Parte desse som passa para a água e se torna o primeiro clique da série. O restante do som se propaga para trás, atravessa o saco de espermacete (um depósito de gordura), é refletido no saco frontal (uma camada de ar) e passa novamente pelo saco de espermacete. Quando chega ao saco distal (outra camada de ar), na frente da cabeça, parte desse som escapa para a água para formar o segundo clique, enquanto o restante é refletido de volta para o saco de espermacete (e acaba formando outros cliques).

A Fig. 17-47*b* mostra o registro de uma série de cliques detectados por um hidrofone. O intervalo de tempo correspondente a 1 ms está indicado no gráfico. Supondo que a velocidade do som no saco de espermacete é 1372 m/s, determine o comprimento do saco de espermacete. Usando cálculos desse tipo, os cientistas marinhos estimam o comprimento de uma baleia a partir dos cliques que produz.

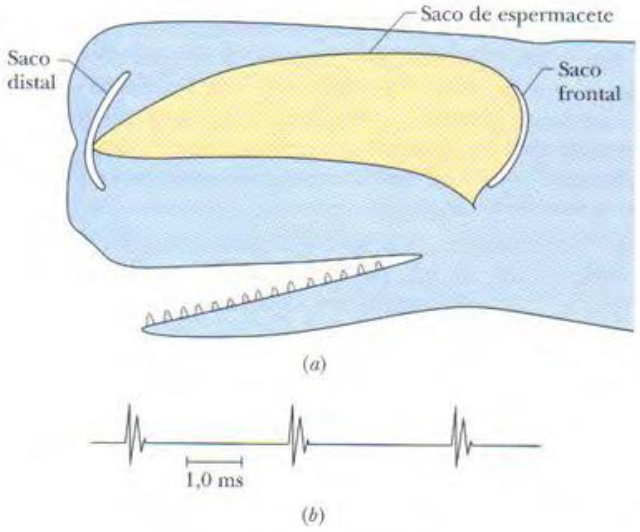



FIG. 17-47 Problema 89.

**90** Uma onda longitudinal senoidal contínua é produzida em uma mola espiral muito longa por uma fonte presa à mola. A onda se propaga no sentido negativo de um eixo $x$; a freqüência da fonte é 25 Hz; em qualquer instante, a distância entre pontos sucessivos de distensão máxima da mola é igual a 24 cm; o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula da mola é 0,30 cm; a partícula situada em $x = 0$ possui deslocamento nulo no instante $t = 0$. Se a onda é escrita na forma $s(x, t) = s_m \cos(kx \pm \omega t)$, determine (a) $s_m$, (b) $k$, (c) $\omega$, (d) a velocidade da onda e (e) o sinal que precede $\omega$.

**91** A uma distância de 10 km, uma corneta de 100 Hz, considerada uma fonte pontual isotrópica, mal pode ser ouvida. A que distância começa a causar dor?

**92** A velocidade do som em um certo metal é $v_m$. Uma das extremidades de um tubo longo feito com esse metal, de comprimento $L$, recebe uma pancada. Uma pessoa na outra extremidade ouve dois sons, um associado à onda que se propaga na parede do tubo e o outro associado à onda que se propaga no ar do interior do tubo. (a) Se $v$ é a velocidade do som no ar, qual é o intervalo de tempo $\Delta t$ entre as chegadas dos dois sons ao ouvido da pessoa? (b) Se $\Delta t = 1{,}00$ s e o metal é o aço, qual é o comprimento $L$?

**93** Um tubo de 0,60 m de comprimento, fechado em uma extremidade, está cheio de um gás desconhecido. A freqüência do terceiro harmônico do tubo é 750 Hz. (a) Qual é a velocidade do som no gás desconhecido? (b) Qual é a freqüência fundamental do tubo quando está cheio do gás desconhecido?

**94** Quatro ondas sonoras são produzidas no mesmo tubo cheio de ar, no mesmo sentido:

$$s_1(x, t) = (9{,}00\text{ nm}) \cos(2\pi x - 700\pi t)$$
$$s_2(x, t) = (9{,}00\text{ nm}) \cos(2\pi x - 700\pi t + 0{,}7\pi)$$
$$s_3(x, t) = (9{,}00\text{ nm}) \cos(2\pi x - 700\pi t + \pi)$$
$$s_4(x, t) = (9{,}00\text{ nm}) \cos(2\pi x - 700\pi t + 1{,}7\pi).$$

Qual é a amplitude da onda resultante? (*Sugestão:* Use um diagrama fasorial para simplificar o problema.)

**95** Um segmento de reta $AB$ liga duas fontes pontuais, separadas por uma distância de 5,00 m, que emitem ondas sonoras de 300 Hz de mesma amplitude e fases opostas. (a) Qual é a menor distância entre o ponto médio de $AB$ e um ponto sobre $AB$ no qual a interferência das ondas provoca a maior oscilação possível das moléculas de ar? Quais são (b) a segunda e (c) a terceira menor distância?

**96** Uma fonte pontual que está parada em um eixo $x$ emite uma onda sonora senoidal com uma freqüência de 686 Hz e uma velocidade de 343 m/s. A onda se propaga radialmente, fazendo as moléculas de ar oscilarem para perto e para longe da fonte. Defina uma frente de onda como uma linha que liga os pontos nos quais as moléculas de ar possuem o deslocamento máximo para fora na direção radial. Em qualquer instante, as frentes de onda são circunferências concêntricas com o centro na fonte. (a) Qual é a distância, ao longo do eixo $x$, entre frentes de onda vizinhas? A fonte passa a ser mover ao longo do eixo $x$ com uma velocidade de 110 m/s. Qual é a distância, ao longo do eixo $x$, entre as frentes de onda (b) na frente e (c) atrás da fonte?

**97** Você está parado a uma distância $D$ de uma fonte sonora pontual isotrópica, caminha 50,0 m em direção à fonte e observa que a intensidade do som dobrou. Calcule a distância $D$.

**98** Em 10 de julho de 1996, um bloco de granito se desprendeu de uma montanha no vale de Yosemite e, depois de deslizar pela encosta, foi lançado em uma trajetória balística. As ondas sísmicas produzidas pelo choque do bloco com o solo foram registradas por sismógrafos a mais de 200 km de distância. Medições posteriores mostraram que o bloco tinha uma massa entre $7{,}3 \times 10^7$ kg e $1{,}7 \times 10^8$ kg e que ele caiu a uma distância vertical de 500 m e a uma distância horizontal de 30 m do ponto de onde foi lançado. (O ângulo de lançamento não é conhecido.) (a) Estime a energia cinética do bloco imediatamente antes do choque com o solo.

Suponha que tipos de ondas sísmicas foram produzidos no solo pelo impacto: uma *onda volumétrica*, com a forma de um hemisfério de raio crescente, e uma *onda superficial*, com a forma de um cilindro curto (Fig. 17-48). Suponha que o choque durou 0,50 s, que o cilindro tinha uma altura $d$ de 5,0 m e que cada tipo de onda recebeu 20% da energia que o bloco possuía imediatamente antes do impacto. Desprezando a energia mecânica perdida pelas ondas durante a propagação, determine a intensidade (b) da onda volumétrica e (c) da onda superficial quando chegaram a um sismógrafo situado a 200 km de distância. (d) Com base nesses resultados, qual das duas ondas pode ser detectada com mais facilidade por um sismógrafo distante?

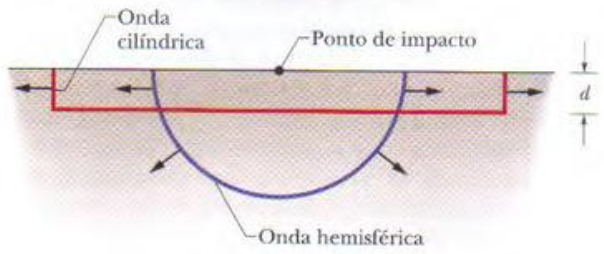



FIG. 17-48 Problema 98.

**99** Uma avalanche de areia em um tipo raro de duna pode produzir um estrondo suficientemente intenso para ser ouvido a 10 km de distância. O estrondo aparentemente é causado pela osci-

lação de uma camada deslizante de areia; a espessura da camada aumenta e diminui periodicamente. Se a freqüência emitida é 90 Hz, determine (a) o período de oscilação da espessura da camada e (b) o comprimento de onda do som.

**100** Os ocupantes de um carro que se move a 16,0 m/s ouvem a sirene de uma ambulância que se aproxima por trás, a uma velocidade de 40,0 m/s (em relação ao ar e ao chão). A freqüência da sirene é 950 Hz e a velocidade do som no ar é 340 m/s. (a) Qual é a freqüência da sirene ouvida pelo motorista da ambulância? (b) Qual é a freqüência ouvida pelos ocupantes do carro depois que o carro é ultrapassado pela ambulância?

**101** O ultra-som, uma onda sonora com uma freqüência tão alta que não pode ser ouvida pelos seres humanos, é usado para produzir imagens do interior do corpo humano. Além disso, o ultra-som é usado para medir a velocidade do sangue no corpo; para tal, a freqüência do ultra-som aplicado ao corpo é comparada com a freqüência do ultra-som refletido pelo sangue para a superfície do corpo. Como o sangue pulsa, a freqüência detectada varia.

Suponha que uma imagem de ultra-som do braço de um paciente mostra uma artéria que faz um ângulo $\theta = 20°$ com a direção de propagação do ultra-som (Fig. 17-49). Suponha ainda que a freqüência do ultra-som refletido pelo sangue da artéria apresenta um aumento máximo de 5495 Hz em relação à freqüência de 5,000 000 MHz do ultra-som original. (a) Na Fig. 17-49, o sangue está correndo para a direita ou para a esquerda? (b) A velocidade do som no braço humano é 1540 m/s. Qual é a velocidade máxima do sangue? (*Sugestão:* O efeito Doppler é causado pela componente da velocidade do sangue na direção de propagação do ultra-som.) (c) Se o ângulo $\theta$ fosse maior, a freqüência refletida seria maior ou menor?

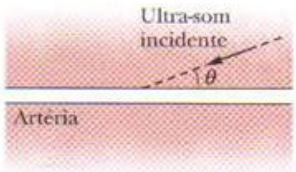


FIG. 17-49 Problema 101.

**102** O cano $A$ tem apenas uma extremidade aberta; o tubo $B$ é quatro vezes mais comprido e tem as duas extremidades abertas. Dos 10 menores números harmônicos $n_B$ do tubo $B$, quais são (a) o menor, (b) o segundo menor e (c) o terceiro menor valor para o qual uma freqüência harmônica de $B$ coincide com uma das freqüências harmônicas de $A$?

**103** *Acústica das cachoeiras.* O impacto turbulento da água de uma cachoeira faz o solo oscilar em uma larga faixa de baixas freqüências. Se a água cai livremente (em vez de bater nas pedras enquanto desce), as oscilações são maiores em uma freqüência particular $f_m$. Este fato sugere que o fenômeno se deve a uma ressonância acústica e que $f_m$ é a freqüência fundamental. A tabela a seguir mostra, para nove cachoeiras americanas e canadenses, os valores medidos de $f_m$ e da altura $L$ da queda livre da água. Mostre como representar os dados em um gráfico para obter a velocidade do som na água da cachoeira. A partir do gráfico, calcule a velocidade do som se a ressonância da cachoeira for como a ressonância em um tubo (a) com as duas extremidades abertas e (b) com apenas uma extremidade aberta. A velocidade do som em uma água turbulenta contendo bolhas de ar pode ser cerca de 25% menor que a sua velocidade de 1400 m/s em água parada. (c) A partir das respostas dos itens (a) e (b), determine quantas extremidades abertas estão efetivamente envolvidas na ressonância de uma cachoeira.

| CACHOEIRA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_m$ (Hz) | 5,6 | 3,8 | 8,0 | 6,1 | 8,8 | 6,0 | 19 | 21 | 40 |
| $L$ (m) | 97 | 71 | 53 | 49 | 35 | 24 | 13 | 11 | 8 |

**104** Uma pessoa em um vagão de trem toca uma nota de 440 Hz em um trompete. O vagão está se movendo a 20,0 m/s em direção a uma parede. Calcule a freqüência (a) a som que incide na parede e (b) do som refletido que é ouvido pelo trompetista.

**105** Um carro de polícia persegue um Porsche 911 por excesso de velocidade. Suponha que a velocidade máxima do Porsche é 80,0 m/s e a do carro se polícia é 54,0 m/s. No instante em que os dois carros atingem a velocidade máxima, que freqüência o motorista do Porsche escuta se a freqüência da sirene do carro de polícia é 440 Hz? Considere a velocidade do som no ar como sendo 340 m/s.

**106** Uma onda sonora se propaga uniformemente em todas as direções a partir de uma fonte pontual. (a) Justifique a seguinte expressão para o deslocamento $s$ do meio transmissor a uma distância $r$ da fonte:

$$s = \frac{b}{r} \operatorname{sen} k(r - vt),$$

onde $b$ é uma constante. Considere a velocidade, o sentido de propagação, a periodicidade e a intensidade da onda. (b) Qual é a dimensão da constante $b$?

**107** Na Fig. 17-34, $S_1$ e $S_2$ são duas fontes sonoras pontuais isotrópicas. Elas emitem ondas em fase com comprimento de onda 0,50 m e estão separadas por uma distância $D = 1{,}60$ m. Se movemos um detector de som ao longo de uma grande circunferência com o centro no ponto médio entre as fontes, em quantos pontos as ondas chegam ao detector (a) com a mesma fase e (b) com fases opostas?

**108** Suponha que um alto-falante esférico emite sons isotropicamente com uma potência de 10 W em uma sala com paredes, piso e teto cobertos de material absorvente (uma *câmara anecóica*). (a) Qual é a intensidade do som a uma distância $d = 3{,}0$ m da fonte? (b) Qual é a razão entre as amplitudes da onda em $d = 4{,}0$ m e em $d = 3{,}0$ m?

**109** Os paleontólogos podem usar ondas sonoras para produzir uma imagem computadorizada do fóssil de um dinossauro incrustado na rocha. A imagem serve para guiar os paleontólogos durante a remoção do fóssil. (A técnica é mostrada nas cenas de abertura do filme *Jurassic Park*.) Para isso, um pulso sonoro de alta intensidade é emitido por uma fonte especial (um canhão sísmico) no nível do solo e detectado por hidrofones instalados em um poço a intervalos regulares. A fonte e um hidrofone são mostrados na Fig. 17-50. Se a onda sonora se propaga da fonte para o hidrofone apenas através da rocha, como na Fig. 17-50, ela viaja com uma velocidade $V$ e leva um certo tempo $T$. Se, em vez disso, ela atravessa um osso fossilizado no caminho, leva um tempo ligeiramente maior, já que a velocidade de propagação no osso é menor do que na rocha. Medindo a diferença $\Delta t$ entre os tempos de percursos esperado e observado, a distância $d$ percorrida no osso pode ser calculada. Depois que esse procedimento é

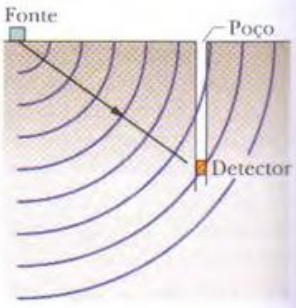


FIG. 17-50 Problema 109.

repetido para muitas localizações da fonte e dos hidrofones, um computador pode transformar as várias distâncias $d$ calculadas em uma imagem do fóssil.

(a) Seja $V - \Delta V$ a velocidade do som no osso fossilizado, onde $\Delta V$ é muito menor que $V$. Mostre que a distância $d$ é dada por

$$d \approx \frac{V^2 \Delta t}{\Delta V}.$$

(b) Para $V = 5000$ m/s e $\Delta V = 200$ m/s, que valor típico de $\Delta t$ pode ser esperado se o som passar pelo diâmetro de um osso da perna de um *T. rex* adulto? (Estime o diâmetro do osso.)

**110** O período de uma estrela variável pulsante pode ser estimado supondo que a estrela está executando pulsações longitudinais *radiais* no modo fundamental de uma onda estacionária, ou seja, que o raio da estrela varia periodicamente com o tempo, com um antinó do deslocamento na superfície da estrela. (a) Nesse modelo, o centro da estrela é um nó ou um antinó do deslocamento? (b) Por analogia com um tubo com uma extremidade aberta e a outra fechada, mostre que o período de pulsação é dado por $T = 4R/v$, onde $R$ é o raio de equilíbrio da estrela e $v$ é a velocidade média do som no interior da estrela. (c) As estrelas anãs brancas típicas são feitas de uma substância com um módulo de elasticidade volumétrico de $1{,}33 \times 10^{22}$ Pa e uma massa específica de $10^{10}$ kg/m$^3$ e têm um raio igual a $9{,}0 \times 10^{-3}$ vezes o raio solar. Qual o período aproximado de pulsação de uma anã branca?

**111** Um homem em repouso (em relação ao ar e ao chão) ouve um sinal de freqüência $f_1$ produzido por uma fonte que se move em sua direção com velocidade de 15 m/s. Se o homem se move em direção à fonte com uma velocidade de 25 m/s, ouve uma freqüência $f_2$ que difere de $f_1$ por 37 Hz. Qual é a freqüência da fonte? (Tome a velocidade do som no ar como sendo 340 m/s.)

**112** Uma violonista afina uma corda de violão para uma freqüência fundamental de 440 Hz. (a) Qual será a freqüência fundamental se ela aumentar a tensão da corda em 20%? (b) Qual será a freqüência se, em vez disso, ela diminuir o comprimento efetivo da corda deslocando o dedo da posição da cravelha para um terço da distância até a ponte, na outra extremidade da corda?

# 18 Temperatura, Calor e a Primeira Lei da Termodinâmica

Cortesia de Nathan Schiff, Ph.D., USDA Forest Service, Center for Bottomland Hardwoods Research, Stoneville, MS

*Os pequenos besouros* Melanophila *apresentam um comportamento curioso. Eles voam em direção aos incêndios florestais e se acasalam perto das chamas. Em seguida, as fêmeas se aproximam das árvores ainda fumegantes para pôr ovos sob a casca carbonizada. Este é o ambiente ideal para as larvas que saem dos ovos, pois a árvore não pode mais se proteger das larvas através de resinas ou outros meios químicos. Naturalmente, se um besouro está perto do incêndio pode detectá-lo com facilidade. Entretanto, esses besouros são capazes de detectar um incêndio razoavelmente grande a mais de 12 km de distância, o que praticamente elimina o uso da visão e do olfato.*

*Como um besouro é capaz de detectar um incêndio na floresta a uma grande distância sem usar a visão e o olfato?*

A resposta está neste capítulo.

## 18-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos principais ramos da física e da engenharia é a **termodinâmica**, o estudo das leis que regem a relação entre calor, trabalho e outras formas de energia. Um dos conceitos centrais da termodinâmica é o de *temperatura*, que será discutido na próxima seção. Desde a infância, temos um conhecimento prático dos conceitos de temperatura e *energia térmica*. Sabemos, por exemplo, que é preciso tomar cuidado com alimentos e objetos quentes e que a carne e o peixe devem ser guardados na geladeira. Sabemos, também, que a temperatura no interior de uma casa e de um automóvel deve ser mantida dentro de certos limites, e que devemos nos proteger do frio e do calor excessivos.

Os exemplos de aplicação da termodinâmica na ciência e na tecnologia são numerosos. Os engenheiros de automóveis se preocupam com o superaquecimento dos motores, especialmente no caso dos carros de corrida. Os engenheiros de alimentos estudam o aquecimento dos alimentos, como pizzas em fornos de microondas, e o seu resfriamento, como nos alimentos congelados. Os meteorologistas analisam a transferência de energia térmica nos eventos associados ao fenômeno El Niño e ao aquecimento global. Os engenheiros agrônomos investigam a influência das condições climáticas sobre a agricultura. Os engenheiros biomédicos estão interessados em saber se a medida da temperatura de um paciente permite distinguir uma infecção viral benigna de um tumor canceroso.

O ponto de partida de nossa discussão da termodinâmica é o conceito de temperatura.

FIG. 18-1 Algumas temperaturas na escala Kelvin. A temperatura $T = 0$ corresponde a $10^{-\infty}$ e não pode ser plotada nesta escala logarítmica.

## 18-2 | Temperatura

A temperatura é uma das sete grandezas fundamentais do SI. Os físicos medem a temperatura na **escala Kelvin**, cuja unidade é o *kelvin* (K). Embora não exista um limite superior para a temperatura de um corpo, existe um limite inferior; esta temperatura-limite é tomada como sendo o zero da escala Kelvin de temperatura. A temperatura ambiente está em torno de 290 kelvins (290 K). A Fig. 18-1 mostra a temperatura em kelvins de alguns corpos estudados pelos físicos.

Quando o universo começou, há 13,7 bilhões de anos, sua temperatura era da ordem de $10^{39}$ K. Ao se expandir, o universo esfriou, e hoje sua temperatura média é de aproximadamente 3 K. Aqui na Terra a temperatura é um pouco maior, porque vivemos nas vizinhanças de uma estrela. Se não fosse o Sol, também estaríamos a 3 K (ou melhor, não existiríamos).

## 18-3 | A Lei Zero da Termodinâmica

Certas propriedades dos corpos sofrem mudanças consideráveis quando eles são aquecidos em um forno ou resfriados em uma geladeira. Eis alguns exemplos: Com o aquecimento, um líquido aumenta de volume, uma barra de metal fica um pouco mais comprida, a resistência elétrica de um fio aumenta e a pressão de um gás confinado aumenta. Qualquer dessas propriedades pode ser usada como base de um instrumento que pode nos ajudar a compreender o conceito de temperatura.

A Fig. 18-2 mostra um instrumento desse tipo. Um engenheiro habilidoso poderia construí-lo usando qualquer das propriedades mencionadas no parágrafo anterior. O instrumento dispõe de um mostrador digital e tem as seguintes características: quando é aquecido (com um bico de Bunsen, digamos), o número do mostrador aumenta; quando é colocado em uma geladeira, o número diminui. O instrumento não está calibrado e os números não têm (ainda) um significado físico. Este aparelho é um *termoscópio*, mas não é (ainda) um *termômetro*.

FIG. 18-2 Um termoscópio. Os números aumentam quando o dispositivo é aquecido e diminuem quando é resfriado. O sensor térmico pode ser, entre outras coisas, um fio cuja resistência elétrica é medida e indicada.

FIG. 18-3 (*a*) O corpo *T* (um termoscópio) e o corpo *A* estão em equilíbrio térmico. (O corpo *S* é um isolante térmico.) (*b*) O corpo *T* e o corpo *B* também estão em equilíbrio térmico e produzem a mesma leitura do termoscópio. (*c*) Se (*a*) e (*b*) são verdadeiros, a lei zero da termodinâmica estabelece que o corpo *A* e o corpo *B* também estão em equilíbrio térmico.

Suponha que, como na Fig. 18-3*a*, o termoscópio (que vamos chamar de corpo *T*) é posto em contato com outro corpo (corpo *A*). O sistema inteiro está contido em uma caixa feita de material isolante. Os números mostrados pelo termoscópio variam até, finalmente, se estabilizarem (digamos que a leitura final seja "137,04"). Vamos supor, na verdade, que todas as propriedades mensuráveis do corpo *T* e do corpo *A* assumem, após um certo tempo, um valor constante. Quando isso acontece, dizemos que os dois corpos estão em *equilíbrio térmico*. Embora as leituras mostradas para o corpo *T* não tenham sido calibradas, concluímos que os corpos *T* e *A* devem estar à mesma temperatura (desconhecida).

Suponha que, em seguida, o corpo *T* é posto em contato com o corpo *B* (Fig. 18-3*b*), e verifica-se que os dois atingem o equilíbrio térmico *para a mesma leitura do termoscópio*. Nesse caso, os corpos *T* e *B* devem estar à mesma temperatura (ainda desconhecida). Se colocarmos os corpos *A* e *B* em contato (Fig. 18-3*c*), eles já estarão em equilíbrio térmico? Experimentalmente, verificamos que sim.

O fato experimental mostrado na Fig. 18-3 é expresso pela **lei zero da termodinâmica**:

> Se dois corpos *A* e *B* estão separadamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo *T*, *A* e *B* estão em equilíbrio térmico entre si.

Em uma linguagem menos formal, o que a lei zero nos diz é o seguinte: "Todo corpo possui uma propriedade chamada **temperatura**. Quando dois corpos estão em equilíbrio térmico, suas temperaturas são iguais e vice-versa." Podemos agora transformar nosso termoscópio (o terceiro corpo *T*) em um termômetro, confiantes de que suas leituras têm um significado físico. Tudo que precisamos fazer é calibrá-lo.

Usamos a lei zero constantemente no laboratório. Quando desejamos saber se os líquidos em dois recipientes estão à mesma temperatura, medimos a temperatura de cada um com um termômetro; não precisamos colocar os dois líquidos em contato e observar se estão ou não em equilíbrio térmico.

A lei zero, considerada uma descoberta tardia, foi formulada apenas na década de 1930, muito depois que a primeira e segunda lei da termodinâmica foram descobertas e numeradas. Como o conceito de temperatura é fundamental para essas duas leis, a lei que estabelece a temperatura como um conceito válido deve ter uma numeração menor; por isso o zero.

## 18-4 | Medindo a Temperatura

Vamos primeiro definir e medir temperaturas na escala Kelvin para, em seguida, calibrar um termoscópio e transformá-lo em um termômetro.

### O Ponto Triplo da Água

Para criar uma escala de temperatura escolhemos um fenômeno térmico reprodutível e, arbitrariamente, atribuímos a ele uma *temperatura*. Poderíamos, por exemplo, escolher o ponto de fusão do gelo ou o ponto de ebulição da água, mas, por razões técnicas, optamos pelo **ponto triplo da água**.

A água, o gelo e o vapor de água podem coexistir, em equilíbrio térmico, para apenas um conjunto de valores de pressão e temperatura. A Fig. 18-4 mostra uma célula de ponto triplo, na qual este chamado ponto triplo da água pode ser obtido em laboratório. Por acordo internacional, foi atribuído ao ponto triplo da água o valor de 273,16 K como a temperatura-padrão para a calibração dos termômetros, ou seja,

$$T_3 = 273{,}16\ \text{K} \qquad \text{(temperatura do ponto triplo)}, \tag{18-1}$$

onde o índice 3 significa "ponto triplo". Esse acordo também estabelece o valor do kelvin como 1/273,16 da diferença entre o zero absoluto e a temperatura do ponto triplo da água.

Note que não usamos o símbolo de grau ao expressar temperaturas na escala Kelvin. Escrevemos 300 K (e não 300° K), e devemos ler a temperatura como "300 kelvins" (e não como "300 graus kelvin"). Os prefixos usados para as outras unidades do SI podem ser usados; assim, 3,5 mK significa 0,0035 K. Não há nomenclaturas distintas para temperaturas na escala Kelvin e diferenças de temperaturas, de modo que podemos escrever "a temperatura de fusão do enxofre é 717,8 K", e "a temperatura deste líquido aumentou 8,5 K".

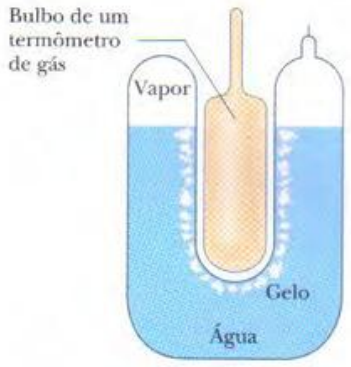



FIG. 18-4 Uma célula de ponto triplo, na qual gelo (sólido), água (líquido) e vapor (gás) estão em equilíbrio térmico. Por acordo internacional, a temperatura desta mistura foi definida como 273,16 K. O bulbo de um termômetro de gás a volume constante é mostrado no centro da célula.

## O Termômetro de Gás a Volume Constante

O termômetro-padrão, em relação ao qual todos os outros termômetros são calibrados, se baseia na pressão de um gás em um volume fixo. A Fig. 18-5 mostra um **termômetro de gás a volume constante**; ele é composto por um bulbo cheio de gás ligado por um tubo a um manômetro de mercúrio. Levantando ou baixando o reservatório $R$ é sempre possível fazer com que o nível de mercúrio no lado esquerdo do tubo em U fique no zero da escala para manter o volume do gás constante (variações do volume do gás afetariam as medidas de temperatura).

A temperatura de qualquer corpo em contato térmico com o bulbo (como, por exemplo, o líquido em torno do bulbo na Fig. 18-5) é definida como

$$T = Cp, \tag{18-2}$$

onde $p$ é a pressão exercida pelo gás e $C$ é uma constante. De acordo com a Eq. 14-10, a pressão $p$ é dada por

$$p = p_0 - \rho g h, \tag{18-3}$$

onde $p_0$ é a pressão atmosférica, $\rho$ é a massa específica do mercúrio e $h$ é a diferença entre os níveis de mercúrio medida nos dois lados do tubo.* (O sinal negativo é usado na Eq. 18-3 porque a pressão $p$ é medida *acima* do nível no qual a pressão é $p_0$.)

Se o bulbo é introduzido em uma célula de ponto triplo (Fig. 18-4), a temperatura medida é

$$T_3 = Cp_3, \tag{18-4}$$

onde $p_3$ é a pressão do gás. Eliminando $C$ nas Eqs. 18-2 e 18-4, obtemos uma equação para a temperatura em função de $p$ e $p_3$:

$$T = T_3\left(\frac{p}{p_3}\right) = (273{,}16\ \text{K})\left(\frac{p}{p_3}\right) \quad \text{(provisória)}. \tag{18-5}$$

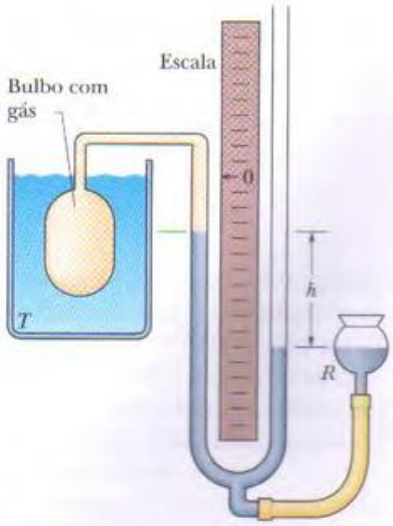



FIG. 18-5 Um termômetro de gás a volume constante, com o bulbo imerso em um líquido cuja temperatura $T$ se pretende medir.

Ainda temos um problema com este termômetro. Se o usamos para medir, digamos, o ponto de ebulição da água, descobrimos que gases diferentes no bulbo fornecem resultados ligeiramente diferentes. Entretanto, quando usarmos quantidades cada vez menores de gás no interior do bulbo as leituras convergem para uma única temperatura, seja qual for o gás utilizado. A Fig. 18-6 mostra essa convergência para três gases.

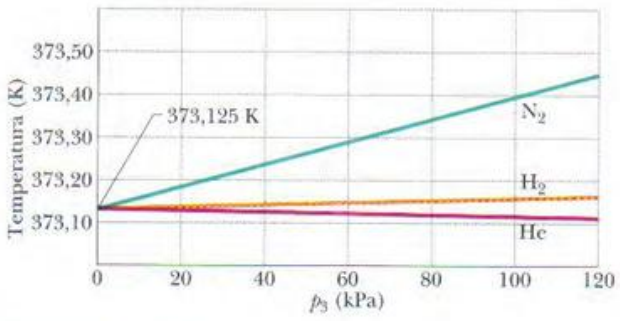



FIG. 18-6 Temperaturas medidas por um termômetro de gás a volume constante, com o bulbo imerso em água fervente. Para calcular a temperatura usando a Eq. 18-5 a pressão $p_3$ foi medida no ponto triplo da água. Três gases diferentes no bulbo do termômetro fornecem resultados diferentes para diferentes pressões do gás, mas quando a quantidade de gás é reduzida (o que diminui o valor de $p_3$) as três curvas convergem para 373,125 K.

*Vamos usar como unidade de pressão o pascal (Pa), definido na Seção 14-3, cuja relação com outras unidades comuns de pressão é a seguinte:

$$1\ \text{atm} = 1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{torr} = 14{,}7\ \text{lb/in}^2.$$

Assim, a receita para medir a temperatura com um termômetro de gás é

$$T = (273{,}16\ \text{K})\left(\lim_{\text{gás}\to 0}\frac{p}{p_3}\right). \tag{18-6}$$

A receita ensina a medir uma temperatura $T$ desconhecida da seguinte forma: encha o bulbo do termômetro com uma quantidade arbitrária de *qualquer* gás (nitrogênio, por exemplo) e meça $p_3$ (usando uma célula de ponto triplo) e $p$, a pressão do gás na temperatura que está sendo medida. (Mantenha constante o volume do gás.) Calcule a razão $p/p_3$. Repita as medidas com uma quantidade menor do gás no bulbo e calcule a nova razão. Repita o procedimento usando quantidades cada vez menores de gás, até poder extrapolar para a razão $p/p_3$ que seria obtida se não houvesse gás no bulbo. Calcule a temperatura $T$ substituindo essa razão extrapolada na Eq. 18-6. (A temperatura é chamada de *temperatura de gás ideal.*)

## 18-5 | As Escalas Celsius e Fahrenheit

Até agora, consideramos apenas a escala Kelvin, usada principalmente pelos cientistas. Em quase todos os países do mundo a escala Celsius (chamada antigamente de escala centígrada) é a escala mais usada no dia-a-dia. As temperaturas na escala Celsius são medidas em graus, e o grau Celsius tem o mesmo valor numérico que o kelvin. Entretanto, o zero da escala Celsius está em um valor mais conveniente que o zero absoluto. Se $T_C$ representa uma temperatura na escala Celsius e $T$ uma temperatura na escala Kelvin,

$$T_C = T - 273{,}15°. \tag{18-7}$$

Quando expressamos temperaturas na escala Celsius, usamos o símbolo de grau. Assim, escrevemos 20,00°C (que se lê como "20,00 graus Celsius") para uma temperatura na escala Celsius, mas 293,15 K (que se lê como "293,15 kelvins") para a mesma temperatura na escala Kelvin.

A escala Fahrenheit, a mais comum nos Estados Unidos, utiliza um grau menor que o grau Celsius e um zero de temperatura diferente. A relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é a seguinte:

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32°, \tag{18-8}$$

onde $T_F$ é a temperatura em graus Fahrenheit. A conversão entre essas duas escalas pode ser feita com facilidade a partir dos pontos de referência das duas escalas (pontos de congelamento e de ebulição da água), mostrados na Tabela 18-1. As escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit são comparadas na Fig. 18-7.

As letras C e F são usadas para distinguir medidas e graus nas duas escalas. Assim,

$$0°\text{C} = 32°\text{F}$$

**TABELA 18-1**

**Correspondência entre Algumas Temperaturas**

| Temperatura | °C | °F |
|---|---|---|
| Ponto de ebulição da água[a] | 100 | 212 |
| Temperatura normal do corpo | 37,0 | 98,6 |
| Temperatura confortável | 20 | 68 |
| Ponto de congelamento da água[a] | 0 | 32 |
| Zero da escala Fahrenheit | ≈ −18 | 0 |
| Coincidência das escalas | −40 | −40 |

[a]Estritamente falando, o ponto de ebulição da água na escala Celsius é 99,975°C, e o ponto de congelamento é 0,00°C. Assim, existe ligeiramente menos de 100C° entre esses dois pontos.

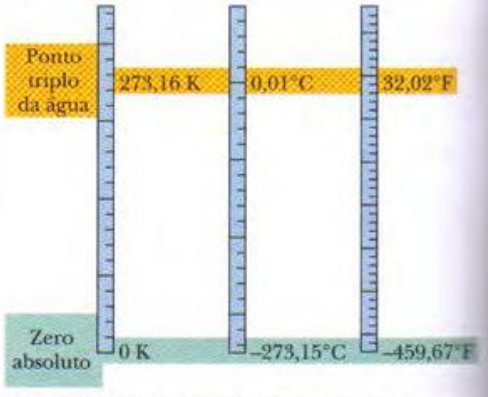


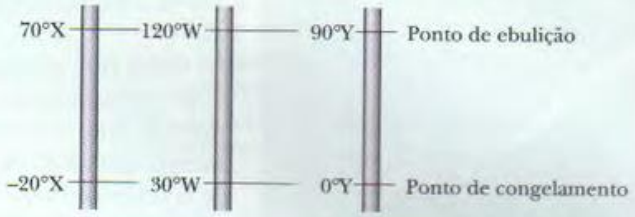

**FIG. 18-7** Comparação entre as escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit de temperatura.

significa que uma temperatura de 0° na escala Celsius equivale a uma temperatura de 32° na escala Fahrenheit, enquanto

$$5\,C^\circ = 9\,F^\circ$$

significa que uma diferença de temperatura de 5 graus Celsius (observe que, nesse caso, o símbolo de grau aparece depois do C) equivale a uma diferença de temperatura de 9 graus Fahrenheit.

**TESTE 1** A figura mostra três escalas lineares de temperatura, com os pontos de congelamento e ebulição da água indicados. (a) Ordene os graus dessas escalas de acordo com o tamanho, em ordem decrescente. (b) Ordene as seguintes temperaturas, em ordem decrescente: 50°X, 50°W e 50°Y.




## Exemplo 18-1

Suponha que você encontre anotações antigas que descrevem uma escala de temperatura chamada Z, na qual o ponto de ebulição da água é 65,0°Z e o ponto de congelamento é −14,0°Z. A que temperatura na escala Fahrenheit corresponde uma temperatura $T = -98,0°Z$? Suponha que a escala Z é linear, ou seja, que o tamanho de um grau Z é o mesmo em toda a escala Z.

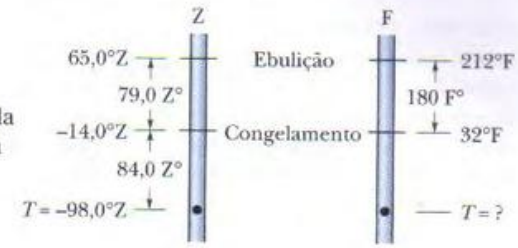



FIG. 18-8 Comparação entre uma escala de temperatura desconhecida e a escala Fahrenheit.

**IDÉIA-CHAVE** Como as duas escalas são lineares, o fator de conversão entre elas pode ser calculado usando duas temperaturas conhecidas nas duas escalas, como os pontos de ebulição e congelamento da água. O número de graus entre as temperaturas conhecidas em uma escala é equivalente ao número de graus entre elas na outra escala.

***Cálculos:*** Começamos por relacionar a temperatura dada $T$ a *uma* das temperaturas conhecidas da escala Z. Como $T = -98,0°Z$ está mais próximo do ponto de congelamento (−14,0°Z) que do ponto de ebulição (65,0°Z), escolhemos o ponto de congelamento. Observamos então que $T$ está $-14,0°Z - (-98,0°Z) = 84,0°Z$ *abaixo do ponto de congelamento*. (Esta diferença pode ser lida como "84,0 graus Z".)

O passo seguinte consiste em determinar um fator de conversão entre as escalas Z e Fahrenheit. Para isso, usamos *as duas* temperaturas conhecidas na escala Z e as correspondentes temperaturas na escala Fahrenheit. Na escala Z, a diferença entre os pontos de ebulição e de congelamento é $65,0°Z - (-14,0°Z) = 79,0\ Z°$. Na escala Fahrenheit, é $212°F - 32,0°F = 180F°$. Assim, uma diferença de temperatura de 79,0 Z° equivale a uma diferença de temperatura de 180 F° (Fig. 18-8), e podemos usar a razão (180 F°)/(79,0 Z°) como fator de conversão.

Como $T$ está 84,0 Z° abaixo do ponto de congelamento, ela deve estar abaixo do ponto de congelamento por

$$(84,0\ Z^\circ)\frac{180\ F^\circ}{79,0\ Z^\circ} = 191\ F^\circ.$$

Como o ponto de congelamento corresponde a 32,0°F, isso significa que

$$T = 32,0°F - 191\ F^\circ = -159°F. \quad \text{(Resposta)}$$

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 1:*** *Variações de Temperatura* Entre os pontos de ebulição e de congelamento da água existem (aproximadamente) 100 kelvins e 100 graus Celsius. Assim, um kelvin tem o mesmo tamanho que um grau Celsius. A partir desse fato ou da Eq. 18-7 sabemos que qualquer variação de temperatura é representada pelo mesmo número nas escalas Kelvin e Celsius. Assim, por exemplo, uma variação de temperatura de 10 K equivale exatamente a uma variação de temperatura de 10 C°.

Entre os pontos de ebulição e de congelamento da água existem 180 graus Fahrenheit. Assim, 180 F° = 100 K, e o tamanho de um grau Fahrenheit é 100/180 = 5/9 do tamanho de um kelvin ou de um grau Celsius. A partir deste resultado ou da Eq. 18-8, sa-

bemos então que qualquer variação de temperatura expressa em graus Fahrenheit é 9/5 vez a mesma variação expressa em kelvins ou graus Celsius. Assim, por exemplo, em graus Fahrenheit uma variação de temperatura de 10 K é (9/5)(10 K), ou 18 F°.

É preciso tomar cuidado para não confundir uma *temperatura* com uma *variação* ou *diferença* de temperatura. Uma temperatura de 10 K certamente não é igual a 10°C ou 18°F, mas, como acabamos de ver, uma *variação* de temperatura de 10 K é igual a uma variação de 10 C° ou 18 F°. Esta diferença é muito importante em uma equação que contém uma temperatura $T$ em vez de uma variação ou diferença de temperatura como $T_2 - T_1$: uma temperatura $T$ isolada em geral deve ser expressa em kelvins e não em graus Celsius ou Fahrenheit. Em suma: cuidado com o "$T$ desacompanhado".

FIG. 18-9 Quando um Concorde voava mais depressa que a velocidade do som a dilatação térmica produzida pelo atrito com o ar aumentava o comprimento da aeronave em 12,5 cm. (A temperatura aumentava para 128°C no nariz e 90°C na cauda. Era possível sentir com a mão o aquecimento das janelas.) *(Hugh Thomas/BWP Media/Getty Images News and Sport Services)*

## 18-6 | Dilatação Térmica

Às vezes, para conseguir desatarraxar a tampa metálica de um pote de vidro basta colocar o pote debaixo de uma torneira de água quente. Tanto o metal da tampa quanto o vidro do pote se expandem quando a água quente fornece energia aos átomos. (Com a energia adicional, os átomos se afastam mais uns dos outros, atingindo um novo ponto de equilíbrio com as forças elásticas interatômicas que mantêm os átomos unidos em um sólido.) Entretanto, como os átomos no metal se afastam mais uns dos outros que os átomos do vidro, a tampa se dilata mais do que o pote e, portanto, fica frouxa.

A **dilatação térmica** dos materiais com o aumento de temperatura deve ser levada em conta em muitas situações da vida prática. Quando uma ponte está sujeita a grandes variações de temperatura ao longo do ano, por exemplo, é dividida em trechos separados por *juntas de dilatação*, para que o concreto possa se expandir nos dias quentes sem que a ponte se deforme. O material usado nas obturações dentárias deve ter as mesmas propriedades de dilatação térmica que o dente, para que o paciente possa beber um café quente depois de um sorvete sem sofrer conseqüências desagradáveis. Quando o jato supersônico Concorde (Fig. 18-9) foi construído, o projeto teve que levar em conta a dilatação térmica da fuselagem provocada pelo atrito com o ar durante o vôo.

As propriedades de dilatação térmica de alguns materiais podem ter aplicações práticas. Alguns termômetros e termostatos utilizam a diferença na dilatação dos componentes de uma *tira bimetálica* (Fig. 18-10). Os termômetros clínicos e meteorológicos se baseiam no fato de que líquidos como o mercúrio e o álcool se dilatam mais do que os tubos de vidro que os contêm.

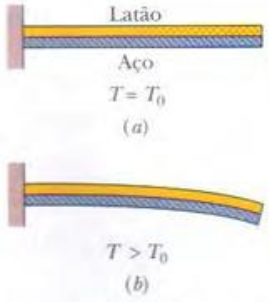



FIG. 18-10 (*a*) Uma tira bimetálica, formada por uma tira de latão e uma tira de aço soldadas entre si, à temperatura $T_0$. (*b*) A tira se enverga da forma mostrada para temperaturas maiores que esta temperatura de referência. Abaixo da temperatura de referência a tira se enverga no sentido oposto. Muitos termostatos funcionam com base neste princípio, fazendo e desfazendo um contato elétrico de acordo com a temperatura.

### Dilatação Linear

Se a temperatura de uma barra metálica de comprimento $L$ aumenta de um valor $\Delta T$, seu comprimento aumenta de um valor

$$\Delta L = L\alpha\,\Delta T, \tag{18-9}$$

onde $\alpha$ é uma constante chamada **coeficiente de dilatação linear**. A unidade do coeficiente $\alpha$ é o $C^{o-1}$ ou $K^{-1}$. Embora $\alpha$ varie ligeiramente com a temperatura, na maioria dos casos pode ser considerado constante para um dado material. A Tabela 18-2 mostra os coeficientes de dilatação linear de alguns materiais. Note que a unidade C° que aparece na tabela poderia ser substituída pela unidade K.

A dilatação térmica de um sólido é como a ampliação de uma fotografia, exceto pelo fato de que ocorre em três dimensões. A Fig. 18-11*b* mostra a dilatação térmica (exagerada) de uma régua de aço. A Eq. 18-9 se aplica todas as dimensões lineares da régua, como as arestas, a espessura, as diagonais e os diâmetros de uma circunferência desenhada na régua e de um furo circular aberto na régua. Se o disco retirado do furo se ajusta perfeitamente ao furo, continua a se ajustar se sofrer o mesmo aumento de temperatura que a régua.

### Dilatação Volumétrica

Se todas as dimensões de um sólido aumentam com a temperatura, é evidente que o volume do sólido também aumenta. No caso dos líquidos, a dilatação volumétrica

**TABELA 18-2**

**Alguns Coeficientes de Dilatação Linear[a]**

| Substância | $\alpha$ ($10^{-6}$/C°) | Substância | $\alpha$ ($10^{-6}$/C°) |
|---|---|---|---|
| Gelo (a 0°C) | 51 | Aço | 11 |
| Chumbo | 29 | Vidro (comum) | 9 |
| Alumínio | 23 | Vidro (Pyrex) | 3,2 |
| Latão | 19 | Diamante | 1,2 |
| Cobre | 17 | Invar[b] | 0,7 |
| Concreto | 12 | Quartzo fundido | 0,5 |

[a]Valores à temperatura ambiente, exceto no caso do gelo.

[b]Esta liga foi projetada para ter um baixo coeficiente de dilatação. O nome é uma abreviação de "invariável".

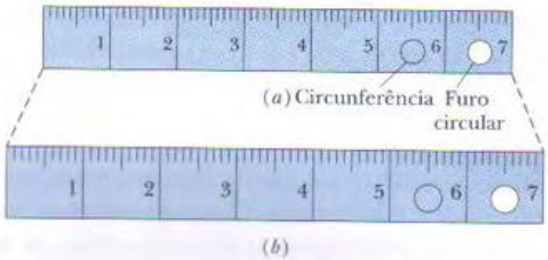



**FIG. 18-11** A mesma régua de aço em duas temperaturas diferentes. Quando a régua se dilata, a escala, os números, a espessura e os diâmetros da circunferência e do furo circular aumentam do mesmo fator. (A dilatação foi exagerada para tornar o desenho mais claro.)

é a única que faz sentido. Se a temperatura de um sólido ou de um líquido cujo volume é $V$ aumenta de um valor $\Delta T$, o aumento de volume correspondente é

$$\Delta V = V\beta\,\Delta T, \tag{18-10}$$

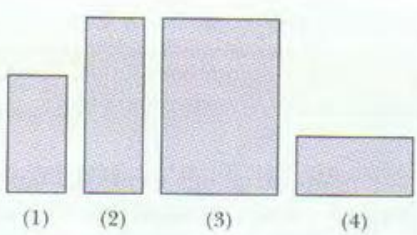
onde $\beta$ é o **coeficiente de dilatação volumétrica** do sólido ou líquido. Os coeficientes de dilatação volumétrica e de dilatação linear de um sólido estão relacionados através da equação

$$\beta = 3\alpha. \tag{18-11}$$

O líquido mais comum, a água, não se comporta como outros líquidos. Acima de 4°C a água se dilata quando a temperatura aumenta, como era de se esperar. Entre 0 e 4°C, porém, a água se *contrai* quando a temperatura aumenta. Assim, por volta de 4°C a massa específica da água passa por um máximo.

Este comportamento da água é a razão pela qual os lagos congelam de cima para baixo, e não o contrário. Quando a água da superfície é resfriada a partir de, digamos, 10°C, em direção ao ponto de congelamento, ela fica mais densa (mais "pesada") que a água abaixo dela, e afunda. Abaixo de 4°C, porém, um resfriamento adicional faz com que a água que está na superfície fique *menos* densa (mais "leve") que a água abaixo dela, e ela permanece na superfície até congelar. Assim, a água da superfície congela enquanto a água mais abaixo permanece líquida. Se os lagos congelassem de baixo para cima, o gelo assim formado não derreteria totalmente no verão, pois ele estaria isolado pela água mais acima. Após alguns anos, muitos mares e lagos nas zonas temperadas da Terra permaneceriam congelados o ano inteiro, o que tornaria impossível a vida aquática.

**TESTE 2** A figura mostra quatro placas metálicas retangulares cujos lados têm comprimento $L$, $2L$ ou $3L$. São todas feitas do mesmo material e sua temperatura aumenta do mesmo valor. Ordene as placas de acordo com o aumento esperado (a) da dimensão vertical e (b) da área, em ordem decrescente.




## Exemplo 18-2

Em um dia quente em Las Vegas um caminhão-tanque foi carregado com 37 000 L de óleo diesel. Ele encontrou tempo frio ao chegar a Payson, Utah, onde a temperatura estava 23,0 K abaixo da temperatura de Las Vegas, e onde ele entregou a carga. Quantos litros foram descarregados? O coeficiente de dilatação volumétrica do

óleo diesel é $9{,}50 \times 10^{-4}/\text{C}^\circ$, e o coeficiente de dilatação linear do aço de que é feito o tanque do caminhão é $11 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ$.

**IDÉIA-CHAVE** O volume do óleo diesel é diretamente proporcional à temperatura. Como a temperatura diminuiu, o volume do combustível também diminuiu, de acordo com a Eq. 18-10 ($\Delta V = V\beta\Delta T$).

***Cálculos:*** Temos:

$$\Delta V = (37\,000\text{ L})(9{,}50 \times 10^{-4}/\text{C}^\circ)(-23{,}0\text{ K}) = -808\text{ L}.$$

Assim, o volume entregue foi

$$V_{\text{desc}} = V + \Delta V = 37\,000\text{ L} - 808\text{ L} = 36\,190\text{ L}. \quad \text{(Resposta)}$$

Note que a dilatação térmica do tanque de aço nada tem a ver com o problema. Pergunta: quem pagou pelo óleo diesel que "desapareceu"?

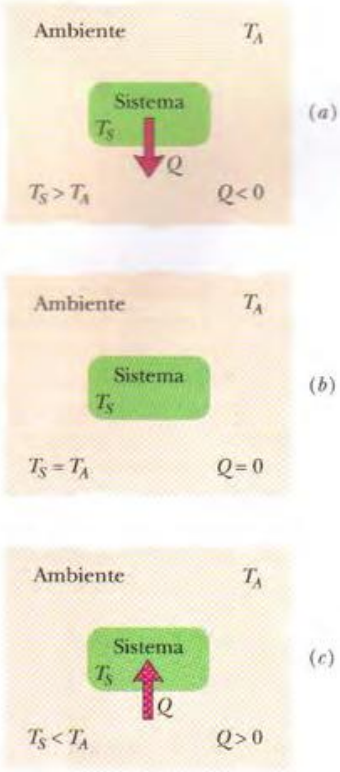



**FIG. 18-12** Se a temperatura de um sistema é maior que a temperatura ambiente, como em (*a*), uma certa quantidade $Q$ de calor é perdida pelo sistema para o ambiente para que o equilíbrio térmico (*b*) seja restabelecido. (*c*) Se a temperatura do sistema é menor que a temperatura ambiente, uma certa quantidade de calor é absorvida pelo sistema para que o equilíbrio térmico seja restabelecido.

## 18-7 | Temperatura e Calor

Se você pega uma lata de refrigerante na geladeira e a deixa na mesa da cozinha a temperatura da lata aumenta, a princípio rapidamente e depois mais devagar, até que a temperatura do refrigerante seja igual à do ambiente (ou seja, até que os dois estejam em equilíbrio térmico). Da mesma forma, a temperatura de uma xícara de café quente deixada sobre a mesa diminui até se tornar igual à temperatura ambiente.

Generalizando esta situação, descrevemos o refrigerante ou o café como um *sistema* (à temperatura $T_S$) e as partes relevantes da cozinha como o *ambiente* (à temperatura $T_A$) desse sistema. Nossa observação é que se $T_S$ não é igual a $T_A$, $T_S$ varia ($T_A$ também pode variar um pouco) até que as duas temperaturas se igualem e o equilíbrio térmico seja estabelecido.

Essa variação de temperatura se deve a uma mudança da energia térmica do sistema por causa da troca de energia entre o sistema e o ambiente. (Lembre-se de que a *energia térmica* é uma energia interna que consiste na energia cinética e na energia potencial associadas aos movimentos aleatórios dos átomos, moléculas e outros corpos microscópicos que existem no interior de um objeto.) A energia transferida é chamada de **calor** e é simbolizada pela letra $Q$. O calor é *positivo* se a energia é transferida do ambiente para a energia térmica do sistema (dizemos que o calor é absorvido pelo sistema). O calor é *negativo* quando a energia é transferida da energia térmica do sistema para o ambiente (dizemos que o calor é cedido ou perdido pelo sistema).

Essa transferência de energia é mostrada na Fig. 18-12. Na situação da Fig. 18-12*a*, na qual $T_S > T_A$, a energia é transferida do sistema para o ambiente, de modo que $Q$ é negativo. Na Fig. 18-12*b*, na qual $T_S = T_A$, não há transferência de energia, $Q$ é zero e, portanto, não há calor cedido nem absorvido. Na Fig. 18-12*c*, na qual $T_S < T_A$, a transferência é do ambiente para o sistema e $Q$ é positivo.

Chegamos, portanto, à seguinte definição de calor:

> Calor é a energia transferida de um sistema para o ambiente ou vice-versa devido a uma diferença de temperatura.

Lembre-se de que a energia também pode ser transferida de um sistema para o ambiente ou vice-versa através do *trabalho* $W$ realizado por uma força. Ao contrário da temperatura, pressão e volume, o calor e o trabalho não são propriedades intrínsecas de um sistema; têm significado apenas quando descrevem a transferência de energia para dentro ou para fora do sistema. Para fazer uma analogia, a expressão "uma transferência de R$ 600,00" pode ser usada para descrever a transferência de dinheiro de uma conta bancária para outra, mas não para informar o saldo de uma conta, já que o que se guarda em uma conta é dinheiro, e não uma transferência. No caso do calor, é apropriado dizer: "Durante os últimos três minutos 15 J de calor foram transferidos do sistema para o ambiente", ou "Durante o último minuto um

trabalho de 12 J foi realizado pelo ambiente sobre o sistema". Não faz sentido dizer: "Este sistema possui 450 J de calor", ou "Este sistema contém 385 J de trabalho".

Antes que os cientistas percebessem que o calor é energia transferida, o calor era medido em termos da capacidade de aumentar a temperatura da água. Assim, a **caloria** (cal) foi definida como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 g de água de 14,5°C para 15,5°C. No sistema inglês, a unidade de calor era a **British thermal unit** (Btu), definida como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 libra de água de 63°F para 64°F.

Em 1948, a comunidade científica decidiu que uma vez que o calor (como o trabalho) é energia transferida, a unidade de calor no SI deveria ser a mesma da energia, ou seja, o **joule**. A caloria é hoje definida como 4,1868 J (exatamente), sem qualquer referência ao aquecimento da água. [A "caloria" usada pelos nutricionistas, às vezes chamada de Caloria (Cal), é equivalente a uma quilocaloria (1 kcal).] As relações entre as várias unidades de calor são as seguintes:

$$1 \text{ cal} = 3{,}968 \times 10^{-3} \text{ Btu} = 4{,}1868 \text{ J}. \tag{18-12}$$

**TABELA 18-3**

**Alguns Calores Específicos e Calores Específicos Molares à Temperatura Ambiente**

| | Calor Específico | | Calor Específico Molar |
|---|---|---|---|
| | cal | J | J |
| Substância | g · K | kg · K | mol · K |
| *Sólidos Elementares* | | | |
| Chumbo | 0,0305 | 128 | 26,5 |
| Tungstênio | 0,0321 | 134 | 24,8 |
| Prata | 0,0564 | 236 | 25,5 |
| Cobre | 0,0923 | 386 | 24,5 |
| Alumínio | 0,215 | 900 | 24,4 |
| *Outros Sólidos* | | | |
| Latão | 0,092 | 380 | |
| Granito | 0,19 | 790 | |
| Vidro | 0,20 | 840 | |
| Gelo (−10°C) | 0,530 | 2220 | |
| *Líquidos* | | | |
| Mercúrio | 0,033 | 140 | |
| Etanol | 0,58 | 2430 | |
| Água do mar | 0,93 | 3900 | |
| Água doce | 1,00 | 4180 | |

## 18-8 | A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

### Capacidade Térmica

A **capacidade térmica** $C$ de um objeto é a constante de proporcionalidade entre o calor $Q$ recebido ou cedido por um objeto e a variação de temperatura $\Delta T$ do objeto, ou seja,

$$Q = C\,\Delta T = C(T_f - T_i), \tag{18-13}$$

onde $T_i$ e $T_f$ são as temperaturas inicial e final do objeto, respectivamente. A capacidade térmica $C$ é medida em unidades de energia por grau ou energia por kelvin. A capacidade térmica $C$, digamos, de uma pedra de mármore pode ser 179 cal/C°, que também podemos escrever como 179 cal/K ou como 749 J/K.

A palavra "capacidade" nesse contexto pode ser enganadora, pois sugere uma analogia com a capacidade que um balde possui de conter uma certa quantidade de água. *Esta analogia é falsa*; você não deve pensar que um objeto "contém" calor ou possui uma capacidade limitada de absorver calor. É possível transferir uma quantidade ilimitada de calor para um objeto, contanto que uma diferença de temperatura seja mantida. É claro, porém, que o objeto pode fundir ou evaporar no processo.

### Calor Específico

Dois objetos feitos do mesmo material (mármore, digamos) têm capacidades térmicas proporcionais a suas massas. Assim, é conveniente definir uma "capacidade térmica por unidade de massa", ou **calor específico** $c$, que se refere não a um objeto, mas a uma massa unitária do material de que é feito o objeto. Nesse caso, a Eq. 18-13 se torna

$$Q = cm\,\Delta T = cm(T_f - T_i). \tag{18-14}$$

Experimentalmente, podemos observar que a capacidade térmica de uma certa pedra de mármore é 179 cal/C° (ou 749 J/K), mas o calor específico do mármore (nessa pedra ou em qualquer outro objeto feito de mármore) é 0,21 cal/g · C° (ou 880 J/kg · K).

De acordo com as definições de caloria e Btu, o calor específico da água é

$$c = 1 \text{ cal/g} \cdot \text{C}^\circ = 1 \text{ Btu/lb} \cdot \text{F}^\circ = 4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}. \tag{18-15}$$

A Tabela 18-3 mostra os calores específicos de algumas substâncias à temperatura ambiente. Note que o valor do calor específico da água é o maior da tabela. O calor específico de qualquer substância varia um pouco com a temperatura, mas os valo-

res da Tabela 18-3 podem ser usados com precisão razoável em temperaturas próximas da temperatura ambiente.

✓ **TESTE 3** Uma certa quantidade de calor $Q$ aquece 1 g de uma substância $A$ de 3 C° e 1 g de um material $B$ de 4 C°. Qual das duas substâncias tem o maior calor específico?

## Calor Específico Molar

Em muitas circunstâncias a unidade mais conveniente para especificar a quantidade de uma substância é o mol, definido da seguinte forma:

$$1 \text{ mol} = 6{,}02 \times 10^{23} \text{ unidades elementares}$$

de *qualquer* substância. Assim, 1 mol de alumínio significa $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos de Al (o átomo é a unidade elementar), e 1 mol de óxido de alumínio significa $6{,}02 \times 10^{23}$ fórmulas moleculares de $Al_2O_3$ (a fórmula molecular é a unidade elementar do composto).

Quando a quantidade de uma substância é expressa em mols o calor específico deve ser expresso na forma de quantidade de calor por mol (e não por unidade de massa); nesse caso, ele é chamado de **calor específico molar**. A Tabela 18-3 mostra o calor específico molar de alguns sólidos elementares (formados por um único elemento) à temperatura ambiente.

## Um Ponto Importante

Para determinar e utilizar corretamente o calor específico de uma substância é preciso conhecer as condições em que ocorre a transferência de calor. No caso de sólidos e líquidos, em geral supomos que a amostra está submetida a uma pressão constante (normalmente, a pressão atmosférica) durante a transferência. Entretanto, também podemos imaginar que a amostra é mantida com um volume constante durante a absorção de calor. Para isso, a dilatação térmica da amostra deve ser evitada pela aplicação de uma pressão externa. No caso de sólidos e líquidos isso é muito difícil de executar experimentalmente, mas o efeito pode ser calculado, e verifica-se que a diferença entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante é relativamente pequena. No caso dos gases, por outro lado, como vamos ver no próximo capítulo, os valores do calor específico a pressão constante e a volume constante são muito diferentes.

## Calores de Transformação

Quando o calor é transferido para uma amostra sólida ou líquida nem sempre a temperatura da amostra aumenta. Em vez disso, a amostra pode mudar de *fase* (ou de *estado*). A matéria pode existir em três estados. No *estado sólido*, os átomos ou moléculas do material formam uma estrutura rígida através de sua atração mútua. No *estado líquido* os átomos ou moléculas têm mais energia e maior mobilidade. Formam aglomerados transitórios, mas o material não tem uma estrutura rígida e pode escoar em um cano ou se acomodar no fundo de um recipiente. No *estado gasoso* os átomos ou moléculas têm uma energia ainda maior, não interagem, a não ser através de choques de curta duração, e podem ocupar todo o volume de um recipiente.

*Fundir* um sólido significa fazê-lo passar do estado sólido para o estado líquido. O processo requer energia porque os átomos ou moléculas do sólido devem ser liberados de sua estrutura rígida. A fusão de um cubo de gelo para formar água é um bom exemplo. *Solidificar* um líquido é o inverso de fundir, e exige a retirada de energia do líquido para que os átomos ou moléculas voltem a formar a estrutura rígida de um sólido.

*Vaporizar* um líquido significa fazê-lo passar do estado líquido para o estado gasoso. Este processo, como o de fusão, requer energia porque os átomos ou molé-

culas devem ser liberados de seus aglomerados. Ferver a água para transformá-la em vapor é um bom exemplo. *Condensar* um gás é o inverso de vaporizar e exige a retirada de energia para que os átomos ou moléculas voltem a se aglomerar.

A quantidade de energia por unidade de massa que deve ser transferida em forma de calor para que uma amostra mude totalmente de fase é chamada de **calor de transformação** e representada pela letra $L$. Assim, quando uma amostra de massa $m$ sofre uma mudança de fase a energia total transferida é

$$Q = Lm. \tag{18-16}$$

Quando a mudança é da fase líquida para a fase gasosa (caso em que a amostra absorve calor) ou da fase gasosa para a fase líquida (caso em que a amostra libera calor) o calor de transformação é chamado de **calor de vaporização** e representado pelo símbolo $L_V$. Para a água à temperatura normal de vaporização ou condensação,

$$L_V = 539 \text{ cal/g} = 40{,}7 \text{ kJ/mol} = 2256 \text{ kJ/kg}. \tag{18-17}$$

Quando a mudança é da fase sólida para a fase líquida (caso em que a amostra absorve calor) ou da fase líquida para a fase sólida (caso em que a amostra libera calor), o calor de transformação é chamado de **calor de fusão** e representado pelo símbolo $L_F$. Para a água à temperatura normal de solidificação ou de fusão,

$$L_F = 79{,}5 \text{ cal/g} = 6{,}01 \text{ kJ/mol} = 333 \text{ kJ/kg}. \tag{18-18}$$

A Tabela 18-4 mostra os calores de transformação de algumas substâncias.

**TABELA 18-4**

**Alguns Calores de Transformação**

| | Fusão | | Ebulição | |
|---|---|---|---|---|
| Substância | Ponto de Fusão (K) | Calor de Fusão $L_F$ (kJ/kg) | Ponto de Ebulição (K) | Calor de Vaporização $L_V$ (kJ/kg) |
| Hidrogênio | 14,0 | 58,0 | 20,3 | 455 |
| Oxigênio | 54,8 | 13,9 | 90,2 | 213 |
| Mercúrio | 234 | 11,4 | 630 | 296 |
| Água | 273 | 333 | 373 | 2256 |
| Chumbo | 601 | 23,2 | 2017 | 858 |
| Prata | 1235 | 105 | 2323 | 2336 |
| Cobre | 1356 | 207 | 2868 | 4730 |

## Exemplo 18-3

(a) Que quantidade de calor deve absorver uma amostra de gelo de massa $m = 720$ g a $-10°C$ para passar ao estado líquido a 15°C?

**IDÉIAS-CHAVE** O processo de aquecimento ocorre em três etapas: (1) o gelo não pode fundir a uma temperatura abaixo do ponto de congelamento; assim, a energia transferida para o gelo em forma de calor apenas aumenta a temperatura do gelo até a temperatura chegar a 0°C. (2) A temperatura não pode passar de 0°C até que todo o gelo tenha fundido; assim, quando o gelo está a 0°C toda a energia transferida para o gelo em forma de calor é usada para fundir o gelo. (3) Depois que todo o gelo funde, toda a energia transferida para a água é usada para aumentar a sua temperatura.

***Aquecimento do gelo:*** O calor $Q_1$ necessário para fazer a temperatura do gelo aumentar do valor inicial $T_i = -10°C$ para o valor final $T_f = 0°C$ (para que depois o gelo possa fundir) é dado pela Eq. 18-14 ($Q = cm\,\Delta T$). Usando o calor específico do gelo $c_{\text{gelo}}$ da Tabela 18-3, obtemos

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{\text{gelo}} m\,(T_f - T_i) \\ &= (2220 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0{,}720 \text{ kg})[0°C - (-10°C)] \\ &= 15\,984 \text{ J} \approx 15{,}98 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

***Fusão do gelo:*** O calor $Q_2$ necessário para fundir toda a amostra de gelo é dado pela Eq. 18-16 ($Q = Lm$), onde

$L$, nesse caso, é o calor de fusão $L_F$, com o valor dado na Eq. 18-18 e na Tabela 18-4. Temos:

$$Q_2 = L_F m = (333 \text{ kJ/kg})(0{,}720 \text{ kg}) \approx 239{,}8 \text{ kJ}.$$

***Aquecimento da água:*** O calor $Q_3$ necessário para fazer a temperatura da água aumentar do valor inicial $T_i = 0°C$ para o valor final $T_f = 15°C$ é dado pela Eq. 18-14 (com o calor específico da água $c_{água}$):

$$\begin{aligned} Q_3 &= c_{água} m\,(T_f - T_i) \\ &= (4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0{,}720 \text{ kg})(15°C - 0°C) \\ &= 45\,252 \text{ J} \approx 45{,}25 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

***Total:*** O calor total $Q_{tot}$ necessário é a soma dos valores calculados para as três etapas:

$$\begin{aligned} Q_{tot} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 15{,}98 \text{ kJ} + 239{,}8 \text{ kJ} + 45{,}25 \text{ kJ} \\ &\approx 300 \text{ kJ}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que o calor necessário para fundir o gelo é muito maior que o calor necessário para aumentar a temperatura do gelo e da água.

(b) Se fornecemos ao gelo uma energia total de apenas 210 kJ (na forma de calor), quais são o estado final e a temperatura da amostra?

**IDÉIA-CHAVE** Os resultados anteriores mostram que são necessários 15,98 kJ para aumentar a temperatura do gelo até o ponto de fusão. O calor restante $Q_r$ é, portanto, 210 kJ − 15,98 kJ ou, aproximadamente, 194 kJ. Os resultados anteriores mostram que esta quantidade de calor não é suficiente para derreter todo o gelo. Como a fusão do gelo é incompleta, acabamos com uma mistura de gelo e água; a temperatura dessa mistura é a do ponto de fusão do gelo, 0°C.

***Cálculos:*** Podemos determinar a massa $m$ do gelo que funde a partir da energia disponível $Q_r$ usando a Eq. 18-16 com $L_F$:

$$m = \frac{Q_r}{L_F} = \frac{194 \text{ kJ}}{333 \text{ kJ/kg}} = 0{,}583 \text{ kg} \approx 580 \text{ g}.$$

Assim, a massa restante de gelo é 720 g − 580 g = 140 g, e acabamos com

580 g de água e 140 g de gelo, a 0°C. (Resposta)

## Exemplo 18-4

Um lingote de cobre de massa $m_c = 75$ g é aquecido em um forno de laboratório até a temperatura $T = 312°C$. Em seguida, o lingote é colocado em um béquer de vidro contendo uma massa $m_a = 220$ g de água. A capacidade térmica $C_b$ do béquer é 45 cal/K. A temperatura inicial da água e do béquer é $T_i = 12°C$. Supondo que o lingote, o béquer e a água são um sistema isolado e que a água não é vaporizada, determine a temperatura final $T_f$ do sistema quando o equilíbrio térmico é atingido.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Como o sistema é isolado a energia total do sistema não pode mudar, e apenas transferências internas de energia podem ocorrer. (2) Como nenhum componente do sistema sofre uma mudança de fase, as transferências de energia na forma de calor podem apenas mudar as temperaturas.

***Cálculos:*** Para relacionar as transferências de calor a mudanças de temperatura, usamos as Eqs. 18-13 e 18-14 para escrever

$$\text{para a água: } Q_a = c_a m_a (T_f - T_i); \qquad (18\text{-}19)$$

$$\text{para o béquer: } Q_b = C_b (T_f - T_i); \qquad (18\text{-}20)$$

$$\text{para o cobre: } Q_c = c_c m_c (T_f - T). \qquad (18\text{-}21)$$

Como a energia total do sistema não pode mudar, a soma das três transferências de energia é zero:

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0. \qquad (18\text{-}22)$$

Substituindo as Eqs. 18-19 a 18-21 na Eq. 18-22, temos:

$$c_a m_a (T_f - T_i) + C_b (T_f - T_i) + c_c m_c (T_f - T) = 0. \qquad (18\text{-}23)$$

As temperaturas aparecem na Eq. 18-23 apenas na forma de diferenças. Como as diferenças nas escalas Celsius e Kelvin são iguais, podemos usar qualquer uma dessas escalas. Explicitando $T_f$, obtemos

$$T_f = \frac{c_c m_c T + C_b T_i + c_a m_a T_i}{c_a m_a + C_b + c_c m_c}.$$

Usando temperaturas Celsius e os valores de $c_c$ e $c_a$ da Tabela 18-3, obtemos para o numerador

$$\begin{aligned} &(0{,}0923 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(75 \text{ g})(312°C) + (45 \text{ cal/K})(12°C) \\ &\quad + (1{,}00 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(220 \text{ g})(12°C) = 5339{,}8 \text{ cal}, \end{aligned}$$

e para o denominador

$$\begin{aligned} &(1{,}00 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(220 \text{ g}) + 45 \text{ cal/K} \\ &\quad + (0{,}0923 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(75 \text{ g}) = 271{,}9 \text{ cal/C°}. \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$T_f = \frac{5339{,}8 \text{ cal}}{271{,}9 \text{ cal/C°}} = 19{,}6°C \approx 20°C. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo os valores conhecidos nas Eqs. 18-19 a 18-21, obtemos

$$Q_a \approx 1670 \text{ cal}, \quad Q_b \approx 342 \text{ cal}, \quad Q_c \approx -2020 \text{ cal}.$$

A não ser pelos erros de arredondamento, a soma algébrica dessas três transferências de energia é realmente nula, como estabelece a Eq. 18-22.

## 18-9 | Calor e Trabalho

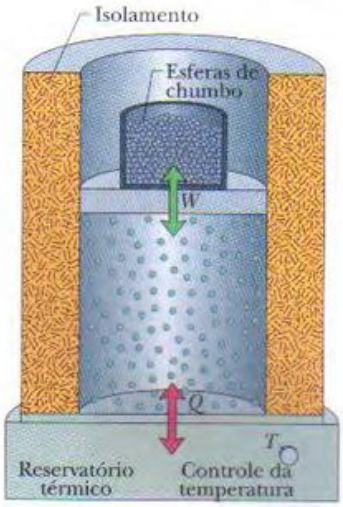



FIG. 18-13 Um gás está confinado a um cilindro com um êmbolo móvel. Uma certa quantidade $Q$ de calor pode ser adicionada ou removida do gás regulando a temperatura $T$ do reservatório térmico ajustável. Uma certa quantidade de trabalho $W$ pode ser realizada pelo gás ou sobre o gás levantando ou baixando o êmbolo.

Vamos agora examinar de perto o modo como a energia pode ser transferida em forma de calor e trabalho de um sistema para o ambiente e vice-versa. Vamos tomar como nosso sistema um gás confinado em um cilindro com um êmbolo, como na Fig. 18-13. A força para cima sobre o êmbolo devido à pressão do gás confinado é igual ao peso das esferas de chumbo colocadas acima do êmbolo. As paredes do cilindro são feitas de material isolante, que não permite a transferência de energia na forma de calor. A base do cilindro repousa em um *reservatório térmico* (uma placa quente, por exemplo), cuja temperatura $T$ pode ser controlada.

O sistema (gás) parte de um *estado inicial i*, descrito por uma pressão $p_i$, um volume $V_i$ e uma temperatura $T_i$. Deseja-se levar o sistema a um *estado final f*, descrito por uma pressão $p_f$, um volume $V_f$ e uma temperatura $T_f$. O processo de levar o sistema do estado inicial ao estado final é chamado de *processo termodinâmico*. Durante esse processo energia pode ser transferida do reservatório térmico para o sistema (calor positivo) ou vice-versa (calor negativo). Além disso, o sistema pode realizar trabalho sobre as esferas de chumbo, levantando o êmbolo (trabalho positivo), ou receber trabalho das esferas de chumbo (trabalho negativo). Vamos supor que todas essas mudanças ocorrem lentamente, de modo que o sistema está sempre (aproximadamente) em equilíbrio térmico (ou seja, cada parte do sistema está em equilíbrio térmico com todas as outras partes).

Suponha que algumas esferas de chumbo são removidas do êmbolo da Fig. 18-13, permitindo que o gás empurre o êmbolo e as esferas restantes para cima com uma força $\vec{F}$, que produz um deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$. Como o deslocamento é pequeno, podemos supor que $\vec{F}$ é constante durante o deslocamento. Nesse caso, o módulo de $\vec{F}$ é igual a $pA$, onde $p$ é a pressão do gás e $A$ é a área do êmbolo. O trabalho infinitesimal $dW$ realizado pelo gás durante o deslocamento é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (pA)(ds) = p(A\,ds)$$
$$= p\,dV, \tag{18-24}$$

onde $dV$ é a variação infinitesimal no volume do gás devido ao movimento do êmbolo. Quando o número de esferas removidas é suficiente para que o volume varie de $V_i$ para $V_f$, o trabalho realizado pelo gás é

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV. \tag{18-25}$$

Durante a variação de volume, a pressão e a temperatura do gás também podem variar. Para calcular diretamente a integral da Eq. 18-25 precisaríamos saber como a pressão varia com o volume no processo através do qual o sistema passa do estado $i$ para o estado $f$.

Na prática, existem muitas formas de levar o gás do estado $i$ para o estado $f$. Uma delas é mostrada na Fig. 18-14*a*, que é um gráfico da pressão do gás em função do volume, conhecido como diagrama $p$-$V$. Na Fig. 18-14*a* a curva mostra que a pressão diminui com o aumento do volume. A integral da Eq. 18-25 (e, portanto, o trabalho $W$ realizado pelo gás) é representada pela área sombreada sob a curva entre os pontos $i$ e $f$. Independentemente do que fizermos exatamente para levar o gás do ponto $i$ ao ponto $f$, este trabalho será sempre positivo, já que o gás só pode aumentar de volume empurrando o êmbolo para cima, ou seja, realizando trabalho sobre as esferas de chumbo.

Outra forma de levar o gás do estado $i$ para o estado $f$ é mostrada na Fig. 18-14*b*. Nesse caso, a mudança acontece em duas etapas: do estado $i$ para o estado $a$ e do estado $a$ para o estado $f$.

A etapa *ia* desse processo acontece a pressão constante, o que significa que o número de esferas de chumbo sobre o êmbolo da Fig. 18-13 permanece constante. O aumento de volume (de $V_i$ para $V_f$) é conseguido aumentando lentamente a temperatura do gás até um valor mais elevado $T_a$. (O aumento de temperatura aumenta

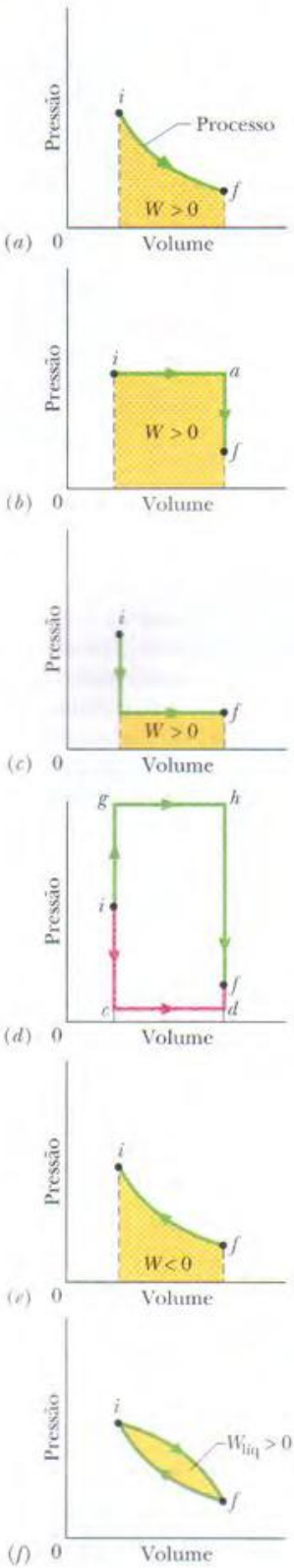



FIG. 18-14 (*a*) A área sombreada representa o trabalho $W$ realizado por um sistema ao passar de um estado inicial $i$ para um estado final $f$. O trabalho $W$ é positivo porque o volume do sistema aumenta. (*b*) $W$ continua a ser positivo, mas agora é maior. (*c*) $W$ continua a ser positivo, mas agora é menor. (*d*) $W$ pode ser ainda menor (trajetória *icdf*) ou ainda maior (trajetória *ighf*). (e) Neste caso, o sistema vai do estado $f$ para o estado $i$ quando o gás é comprimido por uma força externa e seu volume diminui; o trabalho $W$ realizado pelo sistema é negativo. (*f*) O trabalho líquido $W_{liq}$ realizado pelo sistema durante um ciclo completo é representado pela área sombreada.

a força que o gás exerce sobre o êmbolo, empurrando-o para cima.) Durante essa etapa a expansão do gás realiza um trabalho positivo (levantar o êmbolo), e calor é absorvido pelo sistema a partir do reservatório térmico (quando a temperatura do reservatório térmico é aumentada lentamente). Este calor é positivo porque é fornecido ao sistema.

A etapa *af* do processo da Fig. 18-14*b* acontece a volume constante, de modo que o êmbolo deve ser travado. Em seguida, a temperatura do reservatório térmico é reduzida lentamente e a pressão do gás diminui de $p_a$ para o valor final $p_f$. Durante essa etapa o sistema cede calor para o reservatório térmico.

Para o processo global *iaf*, o trabalho $W$, que é positivo e ocorre apenas durante o processo *ia*, é representado pela área sombreada sob a curva. A energia é transferida na forma de calor nas etapas *ia* e *af*, com uma transferência de energia líquida $Q$.

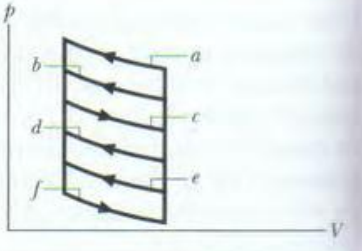
A Fig. 18-14*c* mostra um processo no qual os dois processos anteriores ocorrem em ordem inversa. O trabalho $W$ neste caso é menor do que na Fig. 18-14*b*, e o mesmo acontece com o calor líquido absorvido. A Fig. 18-14*d* mostra que é possível tornar o trabalho tão pequeno quanto se deseje (seguindo uma trajetória como *icdf*) ou tão grande quanto se deseje (seguindo uma trajetória como *ighf*).

Resumindo: Um sistema pode ser levado de um estado inicial para um estado final de um número infinito de formas e, em geral, o trabalho $W$ e o calor $Q$ têm valores diferentes em diferentes processos. Dizemos que o calor e o trabalho são grandezas *dependentes da trajetória*.

A Fig. 18-14*e* mostra um exemplo no qual um trabalho negativo é realizado por um sistema quando uma força externa comprime o sistema, reduzindo seu volume. O valor absoluto do trabalho continua a ser igual à área sob a curva, mas como o gás foi *comprimido* o trabalho realizado pelo gás é negativo.

A Fig. 18-14*f* mostra um *ciclo termodinâmico* no qual o sistema é levado de um estado inicial $i$ para um outro estado $f$ e depois levado de volta para $i$. O trabalho líquido realizado pelo sistema durante o ciclo é a soma do trabalho *positivo* realizado durante a expansão com o trabalho *negativo* realizado durante a compressão. Na Fig. 18-14*f*, o trabalho líquido é positivo porque a área sob a curva de expansão (de $i$ a $f$) é maior do que a área sob a curva de compressão (de $f$ a $i$).

✓ **TESTE 4** O diagrama $p$-$V$ da figura mostra seis trajetórias curvas (ligadas por trajetórias verticais) que podem ser seguidas por um gás. Quais são as duas trajetórias curvas que devem fazer parte de um ciclo fechado (ligadas às trajetórias verticais) para que o trabalho líquido realizado pelo gás tenha o maior valor positivo possível?




## 18-10 | A Primeira Lei da Termodinâmica

Com vimos, quando um sistema muda de um estado inicial para um estado final tanto o trabalho $W$ realizado como o calor $Q$ transferido dependem da natureza do processo. Os experimentos, porém, revelaram algo surpreendente. *A grandeza* $Q - W$

*é a mesma para todos os processos*. Ela depende apenas dos estados inicial e final, e não depende de maneira alguma da forma como o sistema passou de um para o outro. Todas as outras combinações das grandezas $Q$ e $W$, como $Q$ apenas, $W$ apenas, $Q + W$ e $Q + 2W$, são *dependentes da trajetória*; apenas $Q - W$ é independente.

Esta propriedade sugere que a grandeza $Q - W$ representa a variação de uma propriedade intrínseca do sistema. Chamamos esta propriedade de *energia interna* ($E_{int}$), e escrevemos

$$\Delta E_{int} = E_{int,f} - E_{int,i} = Q - W \quad \text{(primeira lei)}. \tag{18-26}$$

A Eq. 18-26 é a expressão matemática da **primeira lei da termodinâmica**. Se o sistema termodinâmico sofre apenas uma variação infinitesimal, podemos escrever a primeira lei na forma*

$$dE_{int} = dQ - dW \quad \text{(primeira lei)}. \tag{18-27}$$

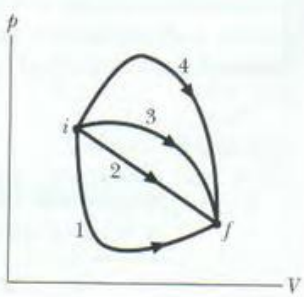
A energia interna $E_{int}$ de um sistema tende a aumentar, se acrescemos energia na forma de calor $Q$, e a diminuir, se removemos energia na forma de trabalho $W$ realizado pelo sistema.

No Capítulo 8 discutimos a lei da conservação da energia em sistemas isolados, ou seja, em sistemas nos quais nenhuma energia entra ou sai do sistema. A primeira lei da termodinâmica é uma extensão dessa lei para sistemas que *não estão* isolados. Nesses casos, a energia pode entrar ou sair do sistema na forma de trabalho $W$ ou calor $Q$. No enunciado da primeira lei da termodinâmica que foi apresentado estamos supondo que o sistema como um todo não sofreu variações de energia cinética e energia potencial, ou seja, que $\Delta K = \Delta U = 0$.

Antes deste capítulo, o termo *trabalho* e o símbolo $W$ sempre significaram o trabalho realizado *sobre* um sistema. Entretanto, a partir da Eq. 18-24 e nos próximos dois capítulos sobre termodinâmica vamos nos concentrar no trabalho realizado *por* um sistema, tal como o gás da Fig. 18-13.

Como o trabalho realizado *sobre* um sistema é sempre o negativo do trabalho realizado *pelo* sistema, se reescrevemos a Eq. 18-26 em termos do trabalho $W_s$ realizado *sobre* o sistema teremos $\Delta E_{int} = Q + W_s$. Isso nos diz o seguinte: A energia interna de um sistema tende a crescer se forneceremos calor ao sistema ou realizarmos trabalho sobre o sistema. Por outro lado, a energia interna tende a diminuir se removermos calor do sistema ou o sistema realizar trabalho.

**TESTE 5** A figura mostra quatro trajetórias em um diagrama $p$-$V$, ao longo das quais um gás pode ser levado de um estado $i$ para um estado $f$. Ordene as trajetórias de acordo com (a) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás, (b) o trabalho $W$ realizado pelo gás, (c) o valor absoluto da energia transferida em forma de calor entre o gás e o ambiente, em ordem decrescente.




*Na Eq. 18-27 as grandezas $dQ$ e $dW$, ao contrário de $dE_{int}$, não são diferenciais verdadeiras, ou seja, não existem funções do tipo $Q(p, V)$ e $W(p, V)$ que dependam apenas do estado do sistema. As grandezas $dQ$ e $dW$ são chamadas de *diferenciais inexatas* e costumam ser representadas pelos símbolos $\delta Q$ e $\delta W$. Para nossos propósitos, podemos tratá-las simplesmente como transferências de energia infinitesimais.

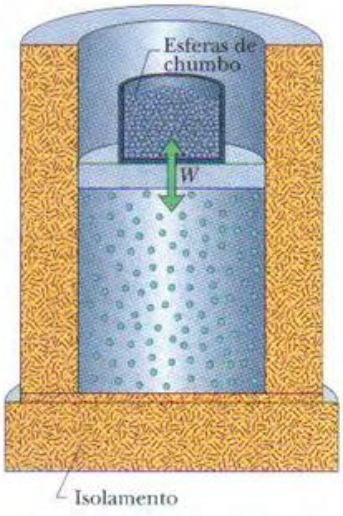



FIG. 18-15 Uma expansão adiabática pode ser realizada removendo lentamente esferas de chumbo do êmbolo. O processo pode ser invertido a qualquer momento acrescentando novas esferas.

## 18-11 | Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica

Vamos agora examinar quatro processos termodinâmicos diferentes para verificar o que acontece quando aplicamos a esses processos a primeira lei da termodinâmica. Os resultados estão indicados na Tabela 18-5.

1. ***Processos adiabáticos.*** Processo adiabático é aquele que acontece tão depressa ou em um sistema tão bem isolado *que não há trocas de calor* entre o sistema e o ambiente. Fazendo $Q = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$\Delta E_{\text{int}} = -W \quad \text{(processo adiabático)}. \tag{18-28}$$

De acordo com a Eq. 1-28, se o sistema realiza trabalho sobre o ambiente (ou seja, se $W$ é positivo), a energia interna do sistema diminui de um valor igual ao do trabalho realizado. Se, por outro lado, o ambiente realiza trabalho *sobre* o sistema (ou seja, se $W$ é negativo), a energia interna do sistema aumenta de um valor igual ao trabalho realizado.

A Fig. 18-15 mostra um processo adiabático ideal. O calor não pode entrar ou sair do sistema por causa do isolamento. Assim, a única troca possível de energia entre o sistema e o ambiente é através de trabalho. Se removemos esferas de chumbo do êmbolo e deixamos o gás se expandir, o trabalho realizado pelo sistema (o gás) é positivo e a energia interna diminui. Se, em vez disso, acrescentamos esferas e comprimimos o gás, o trabalho realizado pelo sistema é negativo e a energia interna do gás aumenta.

2. ***Processos a volume constante.*** Se o volume de um sistema (como um gás) é mantido constante, o sistema não pode realizar trabalho. Fazendo $W = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \quad \text{(processo a volume constante)}. \tag{18-29}$$

Assim, se o sistema recebe calor (ou seja, se $Q$ é positivo) a energia interna do sistema aumenta. Se, por outro lado, o sistema cede calor (ou seja, se $Q$ é negativo) a energia interna do sistema diminui.

3. ***Processos cíclicos.*** Existem processos nos quais, após certas trocas de calor e de trabalho, o sistema volta ao estado inicial. Nesse caso, nenhuma propriedade intrínseca do sistema (incluindo a energia interna) pode variar. Fazendo $\Delta E_{\text{int}} = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$Q = W \quad \text{(processo cíclico)}. \tag{18-30}$$

Assim, o trabalho líquido realizado durante o processo deve ser exatamente igual à quantidade de energia transferida em forma de calor; a energia interna do sistema deve permanecer a mesma. Os processos cíclicos descrevem uma trajetória fechada no diagrama $p$-$V$, como a da Fig. 18-14*f*. Esses processos serão discutidos com detalhes no Capítulo 20.

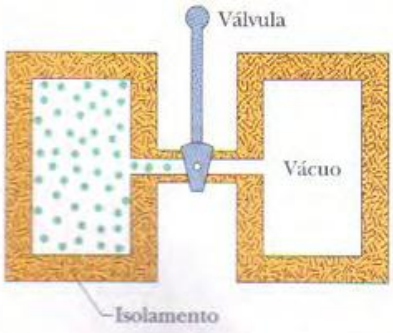



FIG. 18-16 O estágio inicial de um processo de expansão livre. Após a válvula ser aberta o gás ocupa as duas câmaras e, depois algum tempo, atinge um estado de equilíbrio.

**TABELA 18-5**

**A Primeira Lei da Termodinâmica: Quatro Casos Especiais**

| *A Lei:* $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$ (Eq. 18-26) | | |
|---|---|---|
| Processo | Restrição | Conseqüência |
| Adiabático | $Q = 0$ | $\Delta E_{\text{int}} = -W$ |
| Volume constante | $W = 0$ | $\Delta E_{\text{int}} = Q$ |
| Ciclo fechado | $\Delta E_{\text{int}} = 0$ | $Q = W$ |
| Expansão livre | $Q = W = 0$ | $\Delta E_{\text{int}} = 0$ |

4. ***Expansões livres.*** São processos adiabáticos nos quais nenhum trabalho é realizado. Assim, $Q = W = 0$ e, de acordo com a primeira lei,

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{(expansão livre)}. \tag{18-31}$$

A Fig. 18-16 mostra de que forma esse tipo de expansão pode ocorrer. Um gás, cujas moléculas se encontram em equilíbrio térmico, está inicialmente confinado por uma válvula fechada em uma das duas câmaras que compõem um sistema isolado; a outra câmara está vazia. A válvula é aberta e o gás se expande livremente até ocupar as duas câmaras. Nenhum calor é transferido do ambiente para o gás ou do gás para o ambiente por causa do isolamento. Nenhum trabalho é realizado pelo gás, porque ele se desloca para uma região vazia e, portanto, não encontra nenhuma resistência (pressão) na segunda câmara.

Uma expansão livre é diferente dos outros processos porque não pode ser realizada lentamente, de forma controlada. Em conseqüência, durante a expansão abrupta o gás não está em equilíbrio térmico e sua pressão não é uniforme. Assim, embora os estados inicial e final possam ser mostrados em um diagrama $p$-$V$, não podemos plotar a trajetória da expansão.

**TESTE 6** Para o ciclo fechado mostrado no diagrama $p$-$V$ da figura, (a) $\Delta E_{int}$ do gás e (b) a energia $Q$ transferida em forma de calor é positiva, negativa ou nula?

## Exemplo 18-5

Suponha que 1,00 kg de água a 100°C é convertido em vapor a 100°C à pressão atmosférica padrão (1,00 atm = $1{,}01 \times 10^5$ Pa) no arranjo da Fig. 18-17. O volume da água varia de um valor inicial de $1{,}00 \times 10^{-3}$ m³ do líquido para 1,671 m³ do vapor.

(a) Qual é o trabalho realizado pelo sistema durante esse processo?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) O trabalho realizado pelo sistema é positivo, já que o volume aumenta. (2) Podemos calcular o trabalho $W$ integrando a pressão em relação ao volume (Eq. 18-25).

***Cálculo:*** Como a pressão é constante, podemos colocar $p$ do lado de fora do sinal de integração. Temos, portanto,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = p\int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i)$$
$$= (1{,}01 \times 10^5 \text{ Pa})(1{,}671 \text{ m}^3 - 1{,}00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)$$
$$= 1{,}69 \times 10^5 \text{ J} = 169 \text{ kJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual a energia é transferida em forma de calor durante o processo?

**IDÉIA-CHAVE** Como o calor provoca apenas uma mudança de fase (a temperatura é a mesma nos estados inicial e final), ele é dado integralmente pela Eq. 18-16 ($Q = Lm$).

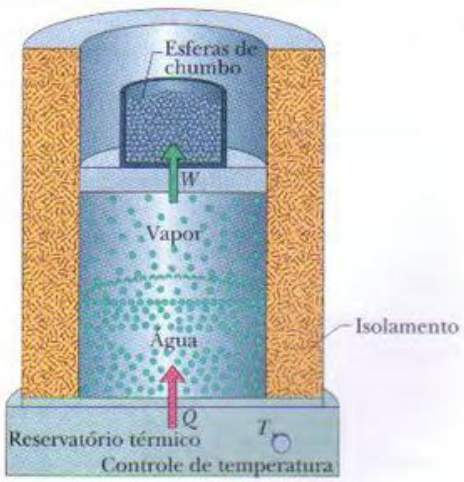



FIG. 18-17 Água fervendo a pressão constante. A energia é transferida do reservatório térmico, em forma de calor, até que toda a água se transforme em vapor. O gás se expande e realiza trabalho ao levantar o êmbolo.

***Cálculo:*** Como a mudança é da fase líquida para a fase gasosa, $L$ é o calor de vaporização $L_V$ da água, cujo valor aparece na Eq. 18-17 e na Tabela 18-4. Temos:

$$Q = L_V m = (2256 \text{ kJ/kg})(1{,}00 \text{ kg})$$
$$= 2256 \text{ kJ} \approx 2260 \text{ kJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a variação da energia interna do sistema durante o processo?

**IDÉIA-CHAVE** A variação na energia interna do sistema está relacionada ao calor (no caso, a energia transferida

para o sistema) e ao trabalho (no caso, a energia transferida para fora do sistema) através da primeira lei da termodinâmica (Eq. 18-26).

***Cálculo:*** A primeira lei pode ser escrita na forma

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2256\ \text{kJ} - 169\ \text{kJ}$$
$$\approx 2090\ \text{kJ} = 2{,}09\ \text{MJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como este valor é positivo, a energia interna do sistema aumentou durante o processo de ebulição. Esta energia é usada para separar as moléculas de $H_2O$, que se atraem fortemente no estado líquido. Vemos que quando a água é transformada em vapor cerca de 7,5% (= 169 kJ/2260 kJ) do calor são transferidos para o trabalho de abrir caminho na atmosfera. O resto do calor é transferido para a energia interna do sistema.

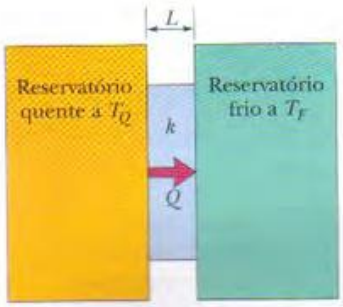



FIG. 18-18 Condução de calor. A energia é transferida em forma de calor de um reservatório à temperatura $T_Q$ para um reservatório mais frio, à temperatura $T_F$, através de uma placa de espessura $L$ e condutividade térmica $k$.

## 18-12 | Mecanismos de Transferência de Calor

Já discutimos a transferência de energia em forma de calor, mas ainda não falamos do modo como essa transferência ocorre. Existem três mecanismos de transferência de calor: condução, convecção e radiação.

### Condução

Se você deixa uma panela com cabo de metal no fogo por algum tempo o cabo da panela fica tão quente que pode queimar a sua mão. A energia é transferida da panela para o cabo por **condução**. Os elétrons e átomos da panela vibram intensamente por causa da alta temperatura a que estão expostos. Essas vibrações, e a energia associada, são transferidas para o cabo através de colisões entre os átomos. Dessa forma, uma região de temperatura crescente se propaga em direção ao cabo.

Considere uma placa de área $A$ e espessura $L$, cujas faces são mantidas a temperaturas $T_Q$ e $T_F$ por uma fonte quente e uma fonte fria, como na Fig. 18-18. Seja $Q$ a energia transferida na forma de calor através da placa, da face quente para a face fria, em um intervalo de tempo $t$. As experiências mostram que a *taxa de condução* $P_{cond}$ (a energia transferida por unidade de tempo) é dada por

$$P_{cond} = \frac{Q}{t} = kA\frac{T_Q - T_F}{L}, \qquad (18\text{-}32)$$

onde $k$, a *condutividade térmica*, é uma constante que depende do material de que é feita a placa. Um material que transfere facilmente energia por condução é um *bom condutor de calor* e tem um alto valor de $k$. A Tabela 18-6 mostra a condutividade térmica de alguns metais, gases e materiais de construção.

**TABELA 18-6**
**Algumas Condutividades Térmicas**

| Substância | $k$ (W/m · K) |
|---|---|
| *Metais* | |
| Aço inoxidável | 14 |
| Chumbo | 35 |
| Ferro | 67 |
| Latão | 109 |
| Alumínio | 235 |
| Cobre | 401 |
| Prata | 428 |
| *Gases* | |
| Ar (seco) | 0,026 |
| Hélio | 0,15 |
| Hidrogênio | 0,18 |
| *Materiais de Construção* | |
| Espuma de poliuretano | 0,024 |
| Lã de pedra | 0,043 |
| Fibra de vidro | 0,048 |
| Pinho | 0,11 |
| Vidro de janela | 1,0 |

### Resistência Térmica

Se você está interessado em manter a casa aquecida nos dias de inverno ou conservar a cerveja gelada em um piquenique, precisa mais de maus condutores de calor do que de bons condutores. Por essa razão, o conceito de *resistência térmica* ($R$) foi introduzido na engenharia. O valor de $R$ de uma placa de espessura $L$ é definido como

$$R = \frac{L}{k}. \qquad (18\text{-}33)$$

Quanto menor a condutividade térmica do material de que é feita uma placa, maior a resistência térmica da placa. Assim, um objeto com uma resistência térmica elevada é um *mau condutor de calor* e, portanto, um *bom isolante térmico*.

Note que a resistência térmica é uma propriedade atribuída a uma placa com uma certa espessura, e não a um material. A unidade de resistência térmica no SI é o $m^2 \cdot K/W$.

### Condução Através de uma Placa Composta

A Fig. 18-19 mostra uma placa composta, formada por dois materiais de diferentes espessuras $L_1$ e $L_2$ e diferentes condutividades térmicas $k_1$ e $k_2$. As temperaturas

das superfícies externas da placa são $T_Q$ e $T_F$. As superfícies das placas têm área $A$. Vamos formular uma expressão para a taxa de condução através da placa supondo que a transferência acontece no regime *estacionário*, ou seja, que as temperaturas em todos os pontos da placa e a taxa de transferência de energia não variam com o tempo.

No regime estacionário as taxas de condução através dos dois materiais devem ser iguais. Isso é o mesmo que dizer que a energia transferida através de um dos materiais em um certo instante deve ser igual à energia transferida através do outro material no mesmo instante. Se isso não fosse verdade, as temperaturas na placa estariam mudando e não teríamos um regime estacionário. Chamando de $T_X$ a temperatura da interface dos dois materiais, podemos usar a Eq. 18-32 para escrever

$$P_{\text{cond}} = \frac{k_2 A(T_Q - T_X)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_X - T_F)}{L_1}. \tag{18-34}$$

Explicitando $T_X$ na Eq. 18-34, obtemos

$$T_X = \frac{k_1 L_2 T_F + k_2 L_1 T_Q}{k_1 L_2 + k_2 L_1}. \tag{18-35}$$

Substituindo este valor de $T_X$ em uma das expressões da Eq. 18-34, temos:

$$P_{\text{cond}} = \frac{A(T_Q - T_F)}{L_1/k_1 + L_2/k_2}. \tag{18-36}$$

Podemos generalizar a Eq. 18-36 para uma placa composta por um número $n$ de materiais:

$$P_{\text{cond}} = \frac{A(T_Q - T_F)}{\Sigma(L/k)}. \tag{18-37}$$

O símbolo de somatório no denominador indica que devemos somar os valores de $L/k$ de todos os materiais.

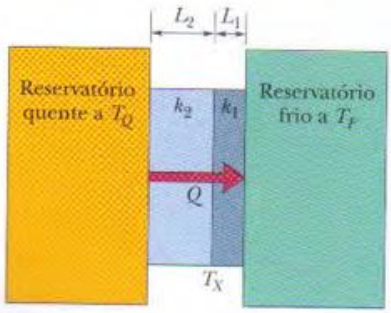
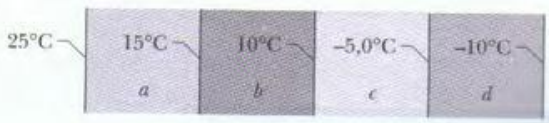



**FIG. 18-19** O calor é transferido a uma taxa constante através de uma placa composta de dois materiais diferentes, com diferentes espessuras e diferentes condutividades térmicas. A temperatura da interface dos dois materiais no regime estacionário é $T_X$.

**TESTE 7** A figura mostra as temperaturas das faces e das interfaces de uma placa composta feita de quatro materiais, com a mesma espessura, através da qual o calor é transferido no regime estacionário. Ordene os materiais de acordo com as condutividades térmicas, em ordem decrescente.




## Convecção

Quando olhamos para a chama de uma vela ou de um fósforo vemos a energia térmica ser transportada para cima por **convecção**. Esse tipo de transferência de energia acontece quando um fluido, como ar ou água, entra em contato com um objeto cuja temperatura é maior que a do fluido. A temperatura da parte do fluido que está em contato com o objeto quente aumenta e (na maioria dos casos) essa parte do fluido se expande, ficando menos densa. Como esse fluido expandido é mais leve do que o fluido que o cerca, mais frio, a força de empuxo o faz subir. O fluido mais frio escoa para tomar o lugar do fluido mais quente que sobe, e o processo pode continuar indefinidamente.

A convecção faz parte de muitos processos naturais. A convecção atmosférica desempenha um papel fundamental na formação de padrões climáticos globais e nas variações do tempo a curto prazo. Tanto os pilotos de asa delta como os pássaros usam térmicas (correntes de convecção de ar quente) para se manter por mais tempo no ar. Grandes transferências de energia ocorrem nos oceanos pelo mesmo processo. Finalmente, no Sol, a energia térmica produzida por reações de fusão nu-

clear é transportada do centro para a superfície através de gigantescas células de convecção, nas quais o gás mais quente sobe pela parte central da célula e o gás mais frio desce pelos lados.

## Radiação

Um sistema e o ambiente também podem trocar energia através de ondas eletromagnéticas (a luz visível é um tipo de onda eletromagnética). As ondas eletromagnéticas que transferem calor são muitas vezes chamadas de **radiação térmica** para distingui-las dos *sinais* eletromagnéticos (como, por exemplo, os das transmissões de televisão) e da radiação nuclear (ondas e partículas emitidas por núcleos atômicos). Quando você se aproxima de uma fogueira é aquecido pela radiação térmica proveniente do fogo, ou seja, sua energia térmica aumenta ao mesmo tempo em que a energia térmica do fogo diminui. Não é necessária a existência de um meio material para que o calor seja transferido por radiação. O calor do Sol, por exemplo, chega até nós através do vácuo.

A taxa $P_{rad}$ com a qual um objeto emite energia através da radiação eletromagnética depende da área $A$ da superfície do objeto e da temperatura $T$ dessa área (em kelvins), e é dada por

$$P_{rad} = \sigma \varepsilon A T^4. \tag{18-38}$$

onde $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ é uma constante física conhecida como *constante de Stefan-Boltzmann*, em homenagem a Josef Stefan (que descobriu a Eq. 18-38 experimentalmente em 1879) e Ludwig Boltzmann (que a deduziu teoricamente logo depois). O símbolo $\varepsilon$ representa a *emissividade* da superfície do objeto, que tem um valor entre 0 e 1, dependendo da composição da superfície. Uma superfície com a emissão máxima de 1,0 é chamada de *radiador de corpo negro*, mas uma superfície como essa é um limite ideal, e não existe na natureza. Note que a temperatura da Eq. 18-38 deve estar em kelvins para que uma temperatura de zero absoluto corresponda à ausência de radiação. Note também que todo objeto cuja temperatura está acima de 0 K (como você, por exemplo) emite radiação térmica. (Veja a Fig. 18-20.)

A taxa $P_{abs}$ com a qual um objeto absorve energia através da radiação térmica do ambiente, que supomos estar a uma temperatura uniforme $T_{amb}$ (em kelvins), é dada por

$$P_{abs} = \sigma \varepsilon A T_{amb}^4. \tag{18-39}$$

A emissividade $\varepsilon$ que aparece na Eq. 18-39 é a mesma da Eq. 18-38. Um radiador de corpo negro ideal, com $\varepsilon = 1$, absorve toda a energia eletromagnética que recebe (em vez de refletir ou espalhar parte da radiação).

Como um objeto irradia energia para o ambiente enquanto está absorvendo energia do ambiente, a taxa líquida $P_{líq}$ de troca de energia com o ambiente por radiação térmica é dada por

$$P_{líq} = P_{abs} - P_{rad} = \sigma \varepsilon A (T_{amb}^4 - T^4). \tag{18-40}$$

$P_{líq}$ é positiva se o corpo absorve energia, e negativa se o corpo perde energia por radiação.

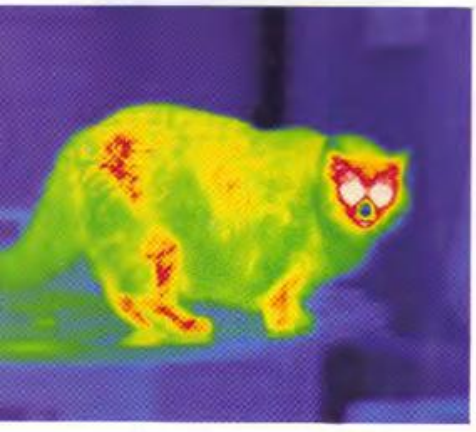


FIG. 18-20 Um termograma em cores falsas mostra a taxa com a qual a energia é irradiada por um gato. O branco e o vermelho correspondem às maiores taxas; o azul (nariz) às menores. (*Edward Kinsman/Photo Researchers*)

Vamos agora voltar à história da capacidade de um besouro *Melanophila* de detectar um incêndio a uma distância de até 12 km sem usar a visão nem o olfato. Dois pares de órgãos situados nos lados do corpo do besouro são capazes de detectar radiação térmica de baixíssima intensidade. Cada órgão contém aproximadamente 70 sensores em forma de botão que se dilatam ligeiramente quando absorvem radiação térmica. Ao se dilatarem, esses sensores comprimem células nervosas. Assim, o detector é um mecanismo que transfere energia da radiação térmica para a energia de

um dispositivo mecânico. Para localizar o incêndio o besouro gira o corpo até que os quatro órgãos detectores de radiação sejam afetados; em seguida, voa na direção em que a resposta dos órgãos aumenta.

A radiação térmica também está envolvida em muitos casos em que pessoas foram picadas na mão por uma cobra cascavel *morta*. Pequenos furos entre os olhos e as narinas da cobra cascavel (Fig. 18-21) funcionam como sensores de radiação térmica. Quando, digamos, um rato se aproxima da cabeça de uma cascavel a radiação térmica proveniente do rato dispara esses sensores, provocando um ato reflexo no qual a cobra morde o rato e injeta veneno. A radiação térmica da mão que se aproxima de uma cobra cascavel pode causar o mesmo ato reflexo, mesmo que a cobra esteja morta há mais de meia hora, porque o sistema nervoso da cobra continua a funcionar. Como um veterinário recomendou, se você tiver que remover uma cobra cascavel morta recentemente use uma vara comprida em lugar das mãos.

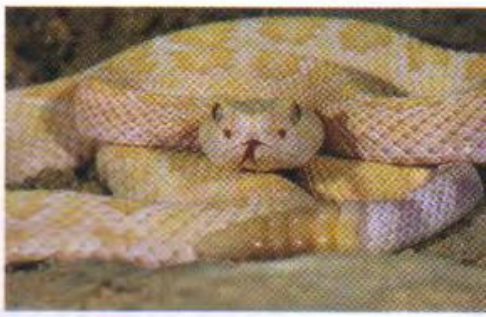


**FIG. 18-21** A cabeça de uma cobra cascavel possui detectores de radiação térmica, que permitem ao réptil localizar uma presa mesmo na escuridão total. *(David A. Northcott/ Corbis Images)*

## Exemplo 18-6

A Fig. 18-22 mostra a seção reta de uma parede feita com uma camada interna de madeira, de espessura $L_a$, uma camada externa de tijolos, de espessura $L_d$ ($= 2{,}0L_a$), e duas camadas externas de espessura e composição desconhecidas. A condutividade térmica da madeira é $k_a$ e a dos tijolos é $k_d$ ($= 5{,}0k_a$). A área $A$ da parede também é desconhecida. A condução térmica através da parede atingiu o regime estacionário; as únicas temperaturas conhecidas são $T_1 = 25°C$, $T_2 = 20°C$ e $T_5 = -10°C$. Qual é a temperatura $T_4$?

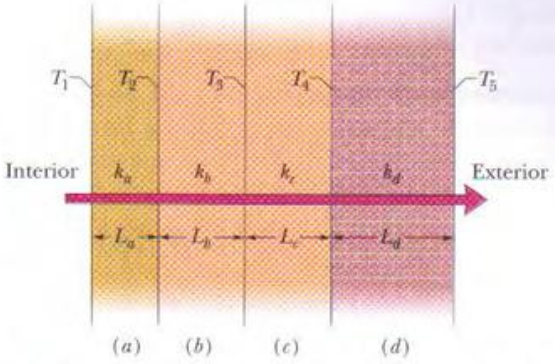



**FIG. 18-22** Uma parede de quatro camadas através da qual existe transferência de calor no regime estacionário.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A temperatura $T_4$ aparece na equação da taxa $P_d$ com a qual a energia térmica atravessa os tijolos (Eq. 18-32). Entretanto, não temos dados suficientes para calcular o valor de $T_4$ usando apenas a Eq. 18-32. (2) Como o regime é estacionário, a taxa de condução $P_d$ através dos tijolos é igual à taxa de condução $P_a$ através da madeira.

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 18-32 e a Fig. 18-22, podemos escrever

$$P_a = k_a A \frac{T_1 - T_2}{L_a} \quad \text{e} \quad P_d = k_d A \frac{T_4 - T_5}{L_d}.$$

Fazendo $P_a = P_d$ e explicitando $T_4$, obtemos

$$T_4 = \frac{k_a L_d}{k_d L_a}(T_1 - T_2) + T_5.$$

Fazendo $L_d = 2{,}0L_a$, $k_d = 5{,}0k_a$ e substituindo $T_1$, $T_2$ e $T_5$ por seus valores, obtemos

$$T_4 = \frac{k_a(2{,}0L_a)}{(5{,}0k_a)L_a}(25°C - 20°C) + (-10°C)$$

$$= -8{,}0°C. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 18-7 Aumente sua capacidade

Durante um passeio na floresta, você resolve fabricar gelo para o seu refrigerante. Infelizmente, a temperatura mínima do ar à noite é 6,0°C, uma temperatura que está acima do ponto de congelamento da água. Entretanto, como o céu de uma noite sem lua e sem nuvens se comporta como um radiador de corpo negro a uma temperatura $T_s = -23°C$, talvez você possa fabricar gelo permitindo que uma camada fina de água irradie energia para o céu. Para começar, você isola termicamente um recipiente do chão, colocando sob o recipiente uma camada de espuma de borracha. Em seguida, você despeja água no recipiente, formando uma camada fina e uniforme de massa $m = 4{,}5$ g, área $A = 9{,}0$ cm$^2$, profundidade $d = 5{,}0$ mm, emissividade $\varepsilon = 0{,}90$ e temperatura inicial 6,0°C. Determine o tempo necessário para a água congelar por radiação. É possível congelar a água antes do nascer do dia?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) A água não pode congelar a uma temperatura acima do ponto de congelamento. Assim, a radiação deve, em primeiro lugar, remover uma quantidade de energia $Q_1$ para reduzir a temperatura da água de 6,0°C para 0°C, a temperatura de congelamento. (2) Em seguida, a radiação deve remover uma quantidade de energia adicional $Q_2$ para congelar toda a água. (3) Durante esse processo a água também está absorvendo energia irradiada do céu. Queremos que a energia absorvida pela água seja menor que a energia irradiada.

***Resfriamento da água:*** De acordo com a Eq. 18-14 e a Tabela 18-3, para resfriar a água para 0°C é preciso uma perda de energia de

$$\begin{aligned} Q_1 &= cm(T_f - T_i) \\ &= (4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(4{,}5 \times 10^{-3}\ \text{kg})(0°\text{C} - 6{,}0°\text{C}) \\ &= -113\ \text{J}. \end{aligned}$$

Assim, 113 J devem ser irradiados pela água para que a temperatura caia para o ponto de congelamento.

***Congelamento da água:*** Usando a Eq. 18-16 ($Q = mL$) com o valor de $L$ igual a $L_F$, obtido na Eq. 18-18 ou na Tabela 18-4, e introduzindo um sinal negativo porque se trata de uma perda de energia, obtemos

$$\begin{aligned} Q_2 &= -mL_F = -(4{,}5 \times 10^{-3}\ \text{kg})(3{,}33 \times 10^5\ \text{J/kg}) \\ &= -1499\ \text{J}. \end{aligned}$$

A perda total de energia necessária é, portanto,

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = -113\ \text{J} - 1499\ \text{J} = -1612\ \text{J}.$$

***Radiação:*** Enquanto a água perde energia irradiando para o céu, também absorve energia irradiada pelo céu. Em um tempo total $t$, queremos que a energia resultante dessa troca seja uma energia perdida $Q_{\text{tot}}$, ou seja, queremos que a potência dessa troca seja

$$\text{potência} = \frac{\text{energia resultante}}{\text{tempo}} = \frac{Q_{\text{tot}}}{t}. \qquad (18\text{-}41)$$

A potência dessa troca de energia é também a taxa líquida $P_{\text{líq}}$ da radiação térmica, dada pela Eq. 18-40; assim, o tempo $t$ necessário para que a perda de energia seja $Q_{\text{tot}}$ é

$$t = \frac{Q}{P_{\text{líq}}} = \frac{Q}{\sigma \varepsilon A(T_s^4 - T^4)}. \qquad (18\text{-}42)$$

Embora a temperatura $T$ da água varie ligeiramente enquanto a água está esfriando, podemos supor que $T$ é aproximadamente igual à temperatura de congelamento, 273 K. Com $T_s = 250$ K, o denominador da Eq. 18-42 é

$$\begin{aligned} &(5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(0{,}90)(9{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &\times [(250\ \text{K})^4 - (273\ \text{K})^4] = -7{,}57 \times 10^{-2}\ \text{J/s}, \end{aligned}$$

e a Eq. 18-42 nos dá

$$\begin{aligned} t &= \frac{-1612\ \text{J}}{-7{,}57 \times 10^{-2}\ \text{J/s}} \\ &= 2{,}13 \times 10^4\ \text{s} = 5{,}9\ \text{h}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Como $t$ é menor do que a duração da noite, é possível congelar a água permitindo que irradie para o céu escuro. Na verdade, em algumas partes do mundo as pessoas usavam essa técnica muito antes do aparecimento dos refrigeradores elétricos.

## REVISÃO E RESUMO

**Temperatura; Termômetros** A temperatura é uma das grandezas fundamentais do SI, e está relacionada às nossas sensações de quente e frio. É medida com um termômetro, instrumento que contém uma substância com uma propriedade mensurável, como comprimento ou pressão, que varia de forma regular quando a substância se torna mais quente ou mais fria.

**Lei Zero da Termodinâmica** Quando um termômetro e um objeto são postos em contato entram em equilíbrio térmico após um certo tempo. Depois que o equilíbrio térmico é atingido a leitura do termômetro é tomada como sendo a temperatura do objeto. O processo fornece medidas úteis e coerentes de temperatura por causa da **lei zero da termodinâmica**: se dois corpos $A$ e $B$ estão separadamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo $T$ (o termômetro), $A$ e $B$ estão em equilíbrio térmico entre si.

**A Escala Kelvin de Temperatura** No SI, a temperatura é medida na **escala Kelvin**, que se baseia no *ponto triplo* da água (273,16 K). Outras temperaturas são definidas pelo uso de um *termômetro de gás a volume constante*, no qual uma amostra de gás é mantida a volume constante, de modo que a pressão é proporcional à a temperatura. Definimos a *temperatura* $T$ medida por um termômetro de gás como sendo

$$T = (273{,}16\ \text{K})\left(\lim_{\text{gás} \to 0} \frac{p}{p_3}\right). \qquad (18\text{-}6)$$

onde $T$ está em kelvins e $p_3$ e $p$ são as pressões do gás a 273,16 K e na temperatura que está sendo medida, respectivamente.

**As Escalas Celsius e Fahrenheit** A escala Celsius de temperatura é definida através da equação

$$T_C = T - 273{,}15°, \qquad (18\text{-}7)$$

com $T$ em kelvins. A escala Fahrenheit de temperatura é definida através da equação

$$T_F = \tfrac{9}{5} T_C + 32°. \qquad (18\text{-}8)$$

**Dilatação Térmica** Todos os objetos variam de tamanho quando a temperatura varia. Para uma variação de temperatura $\Delta T$, uma variação $\Delta L$ de qualquer dimensão linear $L$ é dada por

$$\Delta L = L\alpha\,\Delta T, \tag{18-9}$$

onde $\alpha$ é o **coeficiente de dilatação linear**. A variação $\Delta V$ do volume $V$ de um sólido ou de um líquido é dada por

$$\Delta V = V\beta\,\Delta T. \tag{18-10}$$

onde $\beta = 3\alpha$ é o coeficiente de dilatação volumétrica.

**Calor** Calor ($Q$) é a energia transferida de um sistema para o ambiente ou vice-versa em virtude de uma diferença de temperatura. O calor pode ser medido em **joules** (J), **calorias** (cal), **quilocalorias** (Cal ou kcal) ou **British thermal units** (Btu), onde

$$1\text{ cal} = 3{,}968 \times 10^{-3}\text{ Btu} = 4{,}1868\text{ J}. \tag{18-12}$$

**Capacidade Térmica e Calor Específico** Se uma quantidade de calor $Q$ é absorvida por um objeto, a variação de temperatura do objeto, $T_f - T_i$, está relacionada a $Q$ através da equação

$$Q = C(T_f - T_i), \tag{18-13}$$

onde $C$ é a **capacidade térmica** do objeto. Se o objeto tem massa $m$,

$$Q = cm(T_f - T_i), \tag{18-14}$$

onde $c$ é o **calor específico** do material de que é feito o objeto. O **calor específico molar** de um material é a capacidade térmica por mol. Um mol equivale a $6{,}02 \times 10^{23}$ unidades elementares do material.

**Calor de Transformação** O calor absorvido por um material pode mudar o estado físico do material, fazendo-o passar, por exemplo, do estado sólido para o estado líquido ou do estado líquido para o estado gasoso. A quantidade de energia por unidade de massa necessária para mudar o estado (mas não a temperatura) de um material particular é chamada de **calor de transformação** ($L$). Assim,

$$Q = Lm. \tag{18-16}$$

O **calor de vaporização** $L_V$ é a quantidade de energia por unidade de massa que deve ser fornecida para vaporizar um líquido ou que deve ser removida para condensar um gás. O **calor de fusão** $L_F$ é a quantidade de energia por unidade de massa que deve ser fornecida para fundir um sólido ou que deve ser removida para solidificar um líquido.

**Trabalho Associado a uma Variação de Volume** Um gás pode trocar energia com o ambiente através do trabalho. O trabalho $W$ realizado por um gás quando ao se expandir ou se contrair de um volume inicial $V_i$ para um volume final $V_f$ é dado por

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV. \tag{18-25}$$

A integração é necessária porque a pressão $p$ pode variar durante a variação de volume.

**Primeira Lei da Termodinâmica** A lei de conservação da energia para os processos termodinâmicos é expressa através da **primeira lei da termodinâmica**, que pode assumir duas formas:

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W \quad \text{(primeira lei)} \tag{18-26}$$

ou

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW \quad \text{(primeira lei)}. \tag{18-27}$$

onde $E_{\text{int}}$ é a energia interna do material, que depende apenas do estado do material (temperatura, pressão e volume), $Q$ é a energia trocada entre o sistema e o ambiente na forma de calor ($Q$ é positivo se o sistema absorve calor e negativo se o sistema libera calor) e $W$ é o trabalho realizado pelo sistema ($W$ é positivo se o sistema se expande contra uma força externa e negativo se o sistema se contrai sob o efeito de uma força externa). $Q$ e $W$ são grandezas *dependentes da trajetória*; $\Delta E_{\text{int}}$ é *independente da trajetória*.

**Aplicações da Primeira Lei** A primeira lei da termodinâmica pode ser aplicada a vários casos especiais:

*processos adiabáticos:* $Q = 0, \quad \Delta E_{\text{int}} = -W$

*processos a volume constante:* $W = 0, \quad \Delta E_{\text{int}} = Q$

*processos cíclicos:* $\Delta E_{\text{int}} = 0, \quad Q = W$

*expansões livres:* $Q = W = \Delta E_{\text{int}} = 0$

**Condução, Convecção e Radiação** A taxa $P_{\text{cond}}$ com a qual a energia é *conduzida* através de uma placa cujas faces são mantidas nas temperaturas $T_Q$ e $T_F$ é

$$P_{\text{cond}} = \frac{Q}{t} = kA\frac{T_Q - T_F}{L}. \tag{18-32}$$

onde $A$ e $L$ são a área e a espessura da placa e $k$ é a condutividade térmica do material.

A *convecção* acontece quando diferenças de temperatura provocam uma transferência de energia associada ao movimento em um fluido. A *radiação* é uma transferência de energia através de ondas eletromagnéticas. A taxa $P_{\text{rad}}$ com a qual um objeto emite energia por radiação térmica é dada por

$$P_{\text{rad}} = \sigma\varepsilon AT^4, \tag{18-38}$$

onde $\sigma$ ($= 5{,}6704 \times 10^{-8}\text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$) é a constante de Stefan-Boltzmann, $\varepsilon$ é a emissividade da superfície do objeto, $A$ é a área da superfície e $T$ é a temperatura de sua superfície (em kelvins). A taxa $P_{\text{abs}}$ com a qual um objeto absorve energia da radiação térmica do ambiente, quando este se encontra a uma temperatura uniforme $T_{\text{amb}}$ (em kelvins), é dada por

$$P_{\text{abs}} = \sigma\varepsilon AT_{\text{amb}}^4. \tag{18-39}$$

## PERGUNTAS

**1** Os materiais $A$, $B$ e $C$ são sólidos que estão em seus pontos de fusão. São necessários 200 J para fundir 4 kg do material $A$, 300 J para fundir 5 kg do material $B$ e 300 J para fundir 6 kg do material $C$. Ordene os materiais de acordo com seus calores de fusão, em ordem decrescente.

**2** A Fig. 18-23 mostra três escalas de temperatura lineares, com os pontos de congelamento e ebulição da água indicados. Ordene as três escalas de acordo com o tamanho do grau de cada uma, em ordem decrescente.

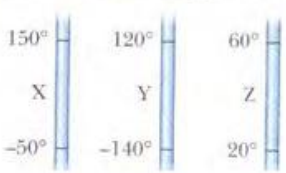



FIG. 18-23 Pergunta 2.

**3** O comprimento inicial $L$, a variação de temperatura $\Delta T$ e a variação de comprimento $\Delta L$ de quatro barras são mostrados na tabela. Ordene as barras de acordo com os coeficientes de expansão térmica, em ordem decrescente.

| Barra | $L$ (m) | $\Delta T$ (C°) | $\Delta L$ (m) |
|---|---|---|---|
| $a$ | 2 | 10 | $4 \times 10^{-4}$ |
| $b$ | 1 | 20 | $4 \times 10^{-4}$ |
| $c$ | 2 | 10 | $8 \times 10^{-4}$ |
| $d$ | 4 | 5 | $4 \times 10^{-4}$ |

**4** A Fig. 18-24 mostra três arranjos diferentes dos materiais 1, 2 e 3 para formar uma parede. As condutividades térmicas são $k_1 > k_2 > k_3$. O lado esquerdo da parede está 20 C° mais quente que o lado direito. Ordene os arranjos de acordo (a) com a taxa de condução de energia através da parede (no regime estacionário) e (b) com a diferença de temperatura entre as duas superfícies do material 1, em ordem decrescente.

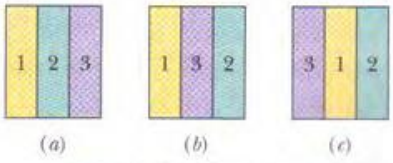



FIG. 18-24 Pergunta 4.

**5** A Fig. 18-25 mostra dois ciclos fechados no diagrama $p$-$V$ de um gás. As três partes do ciclo 1 têm o mesmo comprimento e forma que as do ciclo 2. Cada ciclo deve ser percorrido no sentido horário ou anti-horário (a) para que o trabalho líquido $W$ realizado pelo gás seja positivo e (b) para que a energia líquida transferida pelo gás sob a forma de calor $Q$ seja positiva?

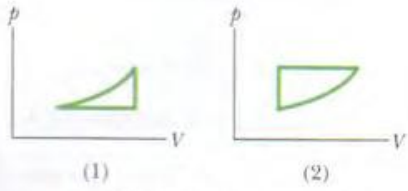



FIG. 18-25 Perguntas 5 e 6.

**6** Para que ciclo na Fig. 18-25, percorrido no sentido horário, (a) $W$ é maior e (b) $Q$ é maior?

**7** Um objeto quente é jogado em um recipiente termicamente isolado cheio de água, e se espera até que o objeto e a água entrem em equilíbrio térmico. O experimento é repetido com dois outros objetos quentes. Os três objetos têm a mesma massa e a mesma temperatura inicial. A massa e a temperatura inicial da água são iguais nos três experimentos. A Fig. 18-26 mostra os gráficos da temperatura $T$ do objeto e da água em função do tempo $t$ para os três experimentos. Ordene os gráficos de acordo com o calor específico do objeto, em ordem decrescente.

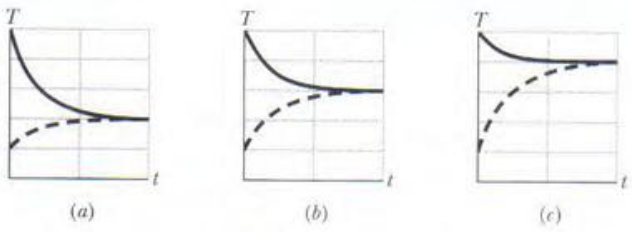



FIG. 18-26 Pergunta 7.

**8** Uma amostra $A$ de água e uma amostra $B$ de gelo, de massas iguais, são colocadas em um recipiente termicamente isolado, e se espera até que entrem em equilíbrio térmico. A Fig. 18-27*a* é um gráfico da temperatura $T$ das amostras em função do tempo $t$. (a) A temperatura do equilíbrio está acima, abaixo ou no ponto de congelamento da água? (b) Ao atingir o equilíbrio, o líquido congela parcialmente, congela totalmente ou não congela? (c) O gelo derrete parcialmente, derrete totalmente ou não derrete?

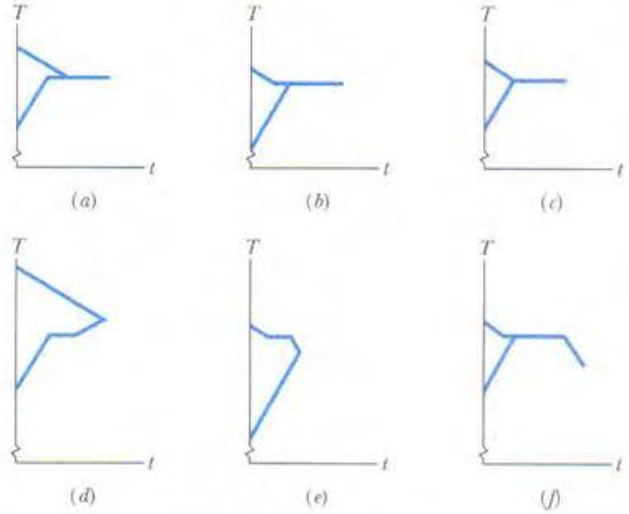



FIG. 18-27 Perguntas 8 e 9.

**9** Continuação da Pergunta 8: A Fig. 18-27 *b* a *f* mostra outros gráficos de $T$ em função de $t$, dos quais um ou mais são impossíveis. (a) Quais são os gráficos impossíveis e por quê? (b) Nos gráficos possíveis, a temperatura de equilíbrio está acima, abaixo ou no ponto de congelamento da água? (c) Nas situações possíveis, quando o sistema atinge o equilíbrio, o líquido congela parcialmente, congela totalmente ou não congela? O gelo derrete parcialmente, derrete totalmente ou não derrete?

**10** Um cubo maciço de lado $r$, uma esfera maciça de raio $r$ e um hemisfério maciço de raio $r$, todos feitos do mesmo material, são mantidos à temperatura de 300 K em um ambiente cuja temperatura é 350 K. Ordene os objetos de acordo com a taxa líquida com a qual a radiação térmica é trocada com o ambiente, em ordem decrescente.

**11** Três materiais diferentes de massas iguais são colocados, um de cada vez, em um congelador especial que pode extrair energia do material a uma certa taxa constante. Durante o processo de resfriamento cada material começa no estado líquido e termina no estado sólido; a Fig. 18-28 mostra a temperatura $T$ em função do tempo $t$. (a) Para o material 1, o calor específico no estado líquido é maior ou menor que no estado sólido? Ordene os materiais de acordo (b) com a temperatura do ponto de fusão, (c) com o calor específico no estado líquido, (d) com o calor específico no estado sólido e (e) com o calor de fusão, em ordem decrescente.

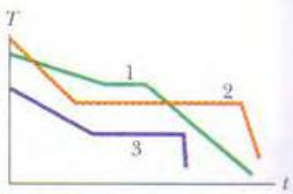



FIG. 18-28 Pergunta 11.

# PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

## seção 18-4 Medindo a Temperatura

•1 Um termômetro de gás é constituído por dois bulbos com gás imersos em recipientes com água, como mostra a Fig. 18-29. A diferença de pressão entre os dois bulbos é medida por um manômetro de mercúrio. Reservatórios apropriados, que não aparecem na figura, mantêm constantes os volumes de gás nos dois bulbos. Não há diferença de pressão quando os dois recipientes estão no ponto triplo da água. A diferença de pressão é 120 torr quando um recipiente está no ponto triplo e o outro está no ponto de ebulição da água, e é 90,0 torr quando um recipiente está no ponto triplo da água e o outro em uma temperatura desconhecida a ser medida. Qual é a temperatura desconhecida?

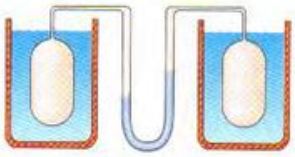


FIG. 18-29 Problema 1.

•2 Dois termômetros de gás a volume constante são construídos, um com nitrogênio e o outro com hidrogênio. Ambos contêm gás suficiente para que $p_3 = 80$ kPa. (a) Qual é a diferença de pressão entre os dois termômetros se os dois bulbos estão imersos em água fervente? (*Sugestão:* Veja a Fig. 18-6.) (b) Qual dos dois gases está a uma pressão mais alta?

•3 A temperatura de um gás é 373,15 K quando está no ponto de ebulição da água. Qual é o valor-limite da razão entre a pressão do gás no ponto de ebulição e a pressão no ponto triplo da água? (Suponha que o volume do gás é o mesmo nas duas temperaturas.)

## seção 18-5 As Escalas Celsius e Fahrenheit

•4 (a) Em 1964, a temperatura da aldeia de Oymyakon, na Sibéria, chegou a −71°C. Qual é o valor desta temperatura na escala Fahrenheit? (b) A maior temperatura registrada oficialmente nos Estados Unidos foi 134°F, no vale da Morte, Califórnia. Qual é o valor desta temperatura na escala Celsius?

•5 Em que temperatura a leitura na escala Fahrenheit é igual (a) a duas vezes a leitura na escala Celsius e (b) a metade da leitura na escala Celsius?

••6 Em uma escala linear de temperatura X, a água congela a −125,0°X e evapora a 375,0°X. Em uma escala linear de temperatura Y, a água congela a −70,00°Y e evapora a −30,00°Y. Uma temperatura de 50,00°Y corresponde a que temperatura na escala X?

••7 Em uma escala linear de temperatura X, a água evapora a −53,5°X e congela a −170°X. Quanto vale a temperatura de 340 K na escala X? (Aproxime o ponto de ebulição da água para 373 K.)

## seção 18-6 Dilatação Térmica

•8 Um mastro de alumínio tem 33 m de altura. De quanto seu comprimento aumenta quando a temperatura aumenta de 15 C°?

•9 Determine a variação de volume de uma esfera de alumínio com um raio inicial de 10 cm quando a esfera é aquecida de 0,0°C para 100°C.

•10 Uma barra feita de uma liga de alumínio tem um comprimento de 10,000 cm a 20,000°C e um comprimento de 10,015 cm no ponto de ebulição da água. (a) Qual é o comprimento da barra no ponto de congelamento da água? (b) Qual é a temperatura para a qual o comprimento da barra é 10,009 cm?

•11 Um furo circular em uma placa de alumínio tem 2,725 cm de diâmetro a 0,000°C. Qual é o diâmetro do furo quando a temperatura da placa é aumentada para 100,0°C?

•12 A 20°C, um cubo de bronze tem 30 cm de aresta. Qual é o aumento da área superficial do cubo quando ele é aquecido de 20°C para 75°C?

•13 Qual é o volume de uma bola de chumbo a 30,00°C se o volume da bola é 50,00 cm³ a 60,00°C?

••14 Quando a temperatura de um cilindro de metal é aumentada de 0,0°C para 100°C, seu comprimento aumenta de 0,23%. (a) Determine a variação percentual da massa específica. (b) De que metal é feito o cilindro? Consulte a Tabela 18-2.

••15 Uma xícara de alumínio com um volume de 100 cm³ está cheia de glicerina a 22°C. Que volume de glicerina é derramado se a temperatura da glicerina e da xícara aumenta para 28°C? (O coeficiente de dilatação volumétrica da glicerina é $5{,}1 \times 10^{-4}/\text{C}°$.)

••16 A 20°C, uma barra tem exatamente 20,05 cm de comprimento, de acordo com uma régua de aço. Quando a barra e a régua são colocadas em um forno a 270°C, a barra passa a medir 20,11 cm de acordo com a mesma régua. Qual é o coeficiente de expansão linear do material de que é feita a barra?

••17 Uma barra de aço tem 3,000 cm de diâmetro a 25,00°C. Um anel de latão tem um diâmetro interno de 2,992 cm a 25,00°C. Se os dois objetos são mantidos em equilíbrio térmico, a que temperatura a barra se ajusta perfeitamente ao furo?

••18 Quando a temperatura de uma moeda de cobre é aumentada de 100 C° o diâmetro aumenta de 0,18%. Com precisão de dois algarismos significativos, determine o aumento percentual (a) da área, (b) da espessura, (c) do volume e (d) da massa específica da moeda. (e) Calcule o coeficiente de dilatação linear da moeda.

••19 Um tubo de vidro vertical de comprimento $L = 1{,}280\,000$ m está cheio até a metade com um líquido a 20,000 000°C. De quanto a altura do líquido no tubo varia quando o tubo é aquecido para 30,000 000°C? Suponha que $\alpha_{\text{vidro}} = 1{,}000\,000 \times 10^{-5}/\text{K}$ e $\beta_{\text{líquido}} = 4{,}000\,000 \times 10^{-5}/\text{K}$.

••20 Em um certo experimento, uma pequena fonte radioativa deve se mover com velocidades selecionadas, extremamente baixas. Este movimento é conseguido prendendo a fonte a uma das extremidades de uma barra de alumínio e aquecendo a região central da barra de forma controlada. Se a parte aquecida da barra da Fig. 18-30 tem um comprimento $d = 2{,}00$ cm, a que taxa constante a temperatura da barra deve variar para que a fonte se mova com uma velocidade constante de 100 nm/s?

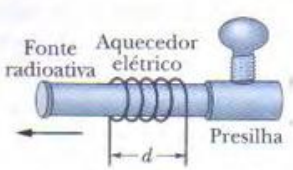



FIG. 18-30 Problema 20.

•••21 Como resultado de um aumento de temperatura de 32 C°, uma barra com uma rachadura no centro dobra para cima (Fig. 18-31). Se a distância fixa $L_0$ é 3,77 m e o coeficiente de dilatação linear da barra é $25 \times 10^{-6}/C°$, determine a altura $x$ do centro da barra.

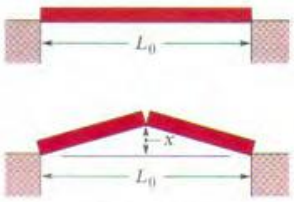



FIG. 18-31 Problema 21.

## seção 18-8 A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

•22 Uma certa substância tem uma massa por mol de 50,0 g/mol. Quando 314 J são adicionados em forma de calor a uma amostra de 30,0 g, a temperatura da amostra sobe de 25,0°C para 45,0°C. Quais são (a) o calor específico e (b) o calor específico molar da substância? (c) Quantos mols estão presentes na amostra?

•23 Um certo nutricionista aconselha as pessoas que querem perder peso a beber água gelada. Sua teoria é a de que o corpo deve queimar gordura suficiente para aumentar a temperatura da água de 0,00°C para a temperatura do corpo de 37,0°C. Quantos litros de água gelada uma pessoa precisa beber para queimar 454 g de gordura, supondo que para queimar esta quantidade de gordura 3500 Cal devem ser transferidas para a água? Por que não é recomendável seguir o conselho do nutricionista? (Um litro = $10^3$ cm$^3$. A massa específica da água é 1,00 g/cm$^3$.)

•24 Que massa de água permanece no estado líquido depois que 50,2 kJ são transferidos na forma de calor a partir de 260 g de água inicialmente no ponto de congelamento?

•25 Calcule a menor quantidade de energia, em joules, necessária para fundir 130 g de prata inicialmente a 15,0°C.

•26 Uma forma de evitar que os objetos que se encontram no interior de uma garagem congelem em uma noite fria de inverno, em que a temperatura cai abaixo do ponto de congelamento da água, é colocar uma banheira velha com água na garagem. Se a massa da água é 125 kg e a temperatura inicial é 20°C, (a) que energia a água deve transferir para o ambiente para congelar totalmente e (b) qual é a menor temperatura possível da água e do ambiente até que isso aconteça?

•27 Um pequeno aquecedor elétrico de imersão é usado para esquentar 100 g de água, com o objetivo de preparar uma xícara de café solúvel. Trata-se de um aquecedor de "200 watts" (esta é a taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica). Calcule o tempo necessário para aquecer a água de 23,0°C para 100°C, desprezando as perdas de calor.

•28 Que massa de manteiga, que possui um valor calórico de 6,0 Cal/g (= 6000 cal/g), equivale à variação de energia potencial gravitacional de um homem de 73,0 kg que sobe do nível do mar para o alto do monte Everest, a 8,84 km de altura? Suponha que o valor médio de g durante a escalada é 9,80 m/s$^2$.

••29 Que massa de vapor a 100°C deve ser misturada com 150 g de gelo no ponto de fusão, em um recipiente isolado termicamente, para produzir água a 50°C?

••30 Um tacho de cobre de 150 g contém 220 g de água, e ambos estão a 20,0°C. Um cilindro de cobre de 300 g, muito quente, é jogado na água, fazendo a água ferver e transformando 5,0 g da água em vapor. A temperatura final do sistema é de 100°C. Despreze a transferência de energia para o ambiente. (a) Qual é a energia (em calorias) transferida para a água em forma de calor? (b) Qual é a energia transferida para o tacho? (c) Qual é a temperatura inicial do cilindro?

••31 *Versão não-métrica:* (a) Quanto tempo um aquecedor de água de $2,0 \times 10^5$ Btu/h leva para elevar a temperatura de 40 galões de água de 70°F para 100°F? *Versão métrica:* (b) Quanto tempo um aquecedor de água de 59 kW leva para elevar a temperatura de 150 litros de água de 21°C para 38°C?

••32 Duas amostras, $A$ e $B$, estão a diferentes temperaturas quando são colocadas em contato em um recipiente termicamente isolado até entrarem em equilíbrio térmico. A Fig. 18-32*a* mostra as temperaturas $T$ das duas amostras em função do tempo $t$. A amostra $A$ tem uma massa de 5,0 kg; a amostra $B$ tem uma massa de 1,5 kg. A Fig. 18-32*b* é um gráfico do material da amostra $B$ que indica a variação de temperatura $\Delta T$ que o material sofre quando recebe uma energia $Q$ na forma de calor. A variação $\Delta T$ está plotada em função da energia $Q$ por unidade de massa do material, e a escala vertical é definida por $\Delta T_s = 4,0C°$. Qual é o calor específico da amostra $A$?

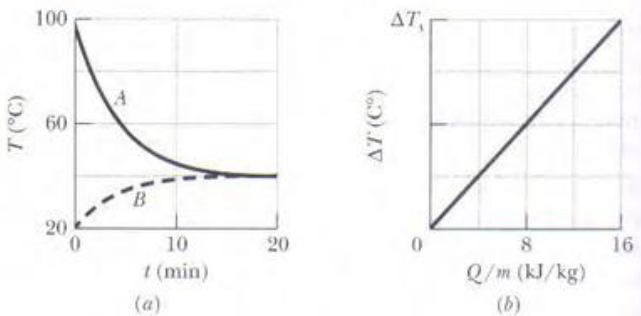



FIG. 18-32 Problema 32.

••33 Em um aquecedor solar a radiação do Sol é absorvida pela água que circula em tubos em um coletor situado no telhado. A radiação solar penetra no coletor através de uma cobertura transparente e aquece a água dos tubos; essa água é bombeada para um tanque de armazenamento. Suponha que a eficiência global do sistema é de 20% (ou seja, 80% da energia solar incidente são perdidos). Que área de coleta é necessária para aumentar a temperatura de 200 L de água no tanque de 20°C para 40°C em 1,0 h se a intensidade da luz solar incidente é 700 W/m$^2$?

••34 Uma amostra de 0,400 kg é colocada em um sistema de resfriamento que remove calor a uma taxa constante. A Fig. 18-33 indica a temperatura $T$ da amostra em função do tempo $t$; a escala do eixo horizontal é definida por $t_s$ = 80,0 min. A amostra congela durante o processo. O calor específico da amostra no estado líquido inicial é 3000 J/kg · K. Determine (a) o calor de fusão da amostra e (b) o calor específico na fase sólida.

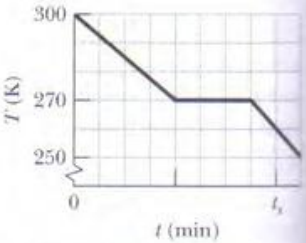



FIG. 18-33 Problema 34.

••35 Uma garrafa térmica contém 130 cm$^3$ de café a 80,0°C. Um cubo de gelo de 12,0 g à temperatura de fusão é usado para esfriar o café. De quantos graus o café esfria depois que todo o gelo derrete e o equilíbrio térmico é atingido? Trate o café como se fosse água pura e despreze as trocas de energia com o ambiente.

••36 Uma amostra de 0,530 kg de água e uma amostra de gelo são colocadas em um recipiente termicamente isolado. O recipiente também contém um dispositivo que transfere calor da

água para o gelo a uma taxa constante $P$, até que o equilíbrio térmico seja estabelecido. As temperaturas $T$ da água e do gelo são mostradas na Fig. 18-34 em função do tempo $t$; a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 80{,}0$ min. (a) Qual é a taxa $P$? (b) Qual é a massa inicial de gelo no recipiente? (c) Quando o equilíbrio térmico é atingido, qual é a massa do gelo produzido?

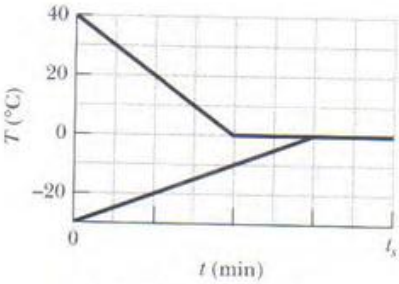


FIG. 18-34 Problema 36.

••37 O álcool etílico tem um ponto de ebulição de 78,0°C, um ponto de congelamento de −114°C, um calor de vaporização de 879 kJ/kg, um calor de fusão de 109 kJ/kg e um calor específico de 2,43 kJ/kg · K. Quanta energia deve ser removida de 0,510 kg de álcool etílico que está inicialmente na forma de gás a 78,0°C para que ele se torne um sólido a −114°C?

••38 O calor específico de uma substância varia com a temperatura de acordo com a equação $c = 0{,}20 + 0{,}14T + 0{,}023T^2$, com $T$ em °C e $c$ em cal/g · K. Determine a energia necessária para aumentar a temperatura de 2,0 g desta substância de 5,0°C para 15°C.

••39 Uma pessoa faz chá gelado misturando 500 g de chá quente (que se comporta como água pura) com a mesma massa de gelo no ponto de fusão. Suponha que a troca de energia entre a mistura e o ambiente é desprezível. Se a temperatura inicial do chá é $T_i = 90$°C, qual é (a) a temperatura da mistura $T_f$ e (b) a massa $m_f$ do gelo remanescente quando o equilíbrio térmico é atingido? Se $T_i = 70$°C, qual é o valor (c) de $T_f$ e (d) de $m_f$ quando o equilíbrio térmico é atingido?

•••40 *Pingentes de gelo.* A água cobre a superfície de um pingente de gelo ativo (em processo de crescimento) e forma um tubo curto e estreito na extremidade do eixo central (Fig. 18-35). Como a temperatura da interface água-gelo é 0°C, a água do tubo não pode perder energia para os lados do pingente ou para a ponta do tubo, porque não há variação de temperatura nessas direções. A água pode perder energia e congelar apenas transferindo energia para cima (através de uma distância $L$) até o alto do pingente, onde a temperatura $T_r$ pode ser menor que 0°C. Suponha que $L = 0{,}12$ m e $T_r = -5$°C. Suponha também que a seção reta do tubo e do pingente é $A$. Qual é, em termos de $A$, (a) a taxa com a qual a energia é transferida para cima e (b) a taxa com a qual a massa é convertida de água para gelo no alto do tubo central? (c) Qual é a velocidade com a qual o pingente se move para baixo por causa do congelamento da água? A condutividade térmica do gelo é 0,400 W/m · K e a massa específica da água é 1000 kg/m³.

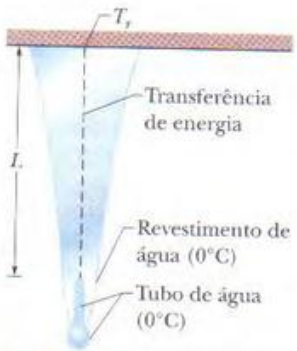


FIG. 18-35 Problema 40.

•••41 (a) Dois cubos de gelo de 50 g são misturados com 200 g de água em um recipiente termicamente isolado. Se a água está inicialmente a 25°C e o gelo foi removido de um congelador a −15°C, qual é a temperatura final em equilíbrio térmico? (b) Qual é a temperatura final se é usado apenas um cubo de gelo?

•••42 Um anel de cobre de 20,0 g a 0,000°C tem um diâmetro interno $D = 2{,}540\ 00$ cm. Uma esfera de alumínio a 100,0°C tem um diâmetro $d = 2{,}545\ 08$ cm. A esfera é colocada acima do anel (Fig. 18-36) até que os dois atinjam o equilíbrio térmico, sem perda de calor para o ambiente. A esfera se ajusta exatamente ao anel na temperatura do equilíbrio. Qual é a massa da esfera?

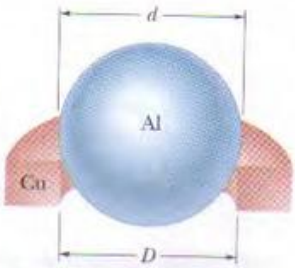


FIG. 18-36 Problema 42.

## seção 18-11 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica

•43 Um gás em uma câmara fechada passa pelo ciclo mostrado no diagrama $p$-$V$ da Fig. 18-37. A escala do eixo horizontal é definida por $V_s = 4{,}0$ m³. Calcule a energia líquida adicionada ao sistema em forma de calor durante um ciclo completo.

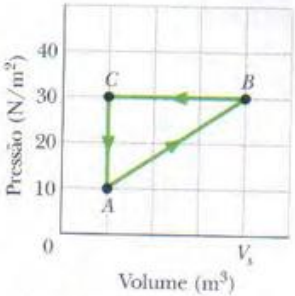


FIG. 18-37 Problema 43.

•44 Um trabalho de 200 J é realizado sobre um sistema, e uma quantidade de calor de 70,0 cal é removida do sistema. Qual é o valor (incluindo o sinal) (a) de $W$, (b) de $Q$ e (c) de $\Delta E_{int}$?

•45 Na Fig. 18-38 uma amostra de gás se expande de $V_0$ para $4{,}0V_0$ enquanto a pressão diminui de $p_0$ para $p_0/4{,}0$. Se $V_0 = 1{,}0$ m³ e $p_0 = 40$ Pa, qual é o trabalho realizado pelo gás se a pressão varia com o volume de acordo (a) com a trajetória $A$, (b) com a trajetória $B$ e (c) com a trajetória $C$?

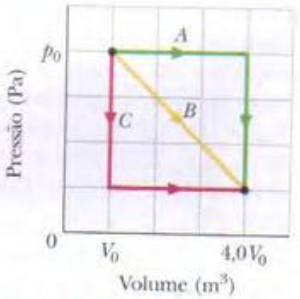
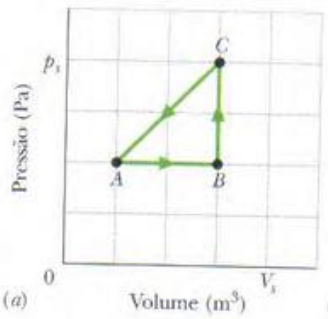


FIG. 18-38 Problema 45.

•46 Um sistema termodinâmico passa do estado $A$ para o estado $B$, do estado $B$ para o estado $C$ e de volta para o estado $A$, como mostra o diagrama $p$-$V$ da Fig. 18-39*a*. A escala do eixo vertical é definida por $p_s = 40$ Pa, e a escala do eixo horizontal é definida por $V_s = 4{,}0$ m³. (a)−(g) Complete a tabela da Fig. 18-39*b* introduzindo um sinal positivo, um sinal negativo ou um zero nas células indicadas. (h) Qual é o trabalho líquido realizado pelo sistema em um ciclo $ABCA$?




| | $Q$ | $W$ | $\Delta E_{int}$ |
|---|---|---|---|
| $A \rightarrow B$ | (a) | (b) | + |
| $B \rightarrow C$ | + | (c) | (d) |
| $C \rightarrow A$ | (e) | (f) | (g) |

FIG. 18-39 Problema 46.

••47 A Fig. 18-40 mostra um ciclo fechado de um gás (a figura não foi desenhada em escala). A variação da energia interna do

gás ao passar de *a* para *c* ao longo da trajetória *abc* é −200 J. Quando o gás passa de *c* para *d* recebe 180 J na forma de calor. Mais 80 J são recebidos quando o gás passa de *d* para *a*. Qual é o trabalho realizado sobre o gás quando ele passa de *c* para *d*?

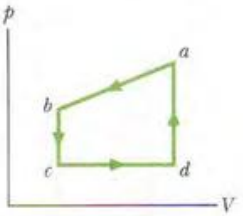


FIG. 18-40 Problema 47.

••48 Uma amostra de gás passa pelo ciclo *abca* mostrado no diagrama *p-V* da Fig. 18-41. O trabalho líquido realizado é +1,2 J. Ao longo da trajetória *ab* a variação da energia interna é +3,0 J, e o valor absoluto do trabalho realizado é 5,0 J. Ao longo da trajetória *ca* a energia transferida para o gás na forma de calor é +2,5 J. Qual é a energia transferida na forma de calor ao longo (a) da trajetória *ab* e (b) da trajetória *bc*?

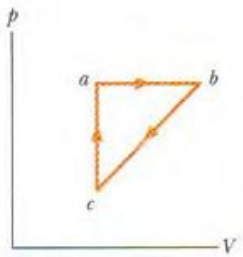


FIG. 18-41 Problema 48.

••49 Quando um sistema passa do estado *i* para o estado *f* seguindo a trajetória *iaf* da Fig. 18-42, $Q = 50$ cal e $W = 20$ cal. Ao longo da trajetória *ibf*, $Q = 36$ cal. (a) Quanto vale $W$ ao longo da trajetória *ibf*? (b) Se $W = -13$ cal na trajetória de retorno *fi*, quanto vale $Q$ nesta trajetória? (c) Se $E_{int,i} = 10$ cal, qual é o valor de $E_{int,f}$? Se $E_{int,b} = 22$ cal, qual é o valor de $Q$ (d) na trajetória *ib* e (e) na trajetória *bf*?

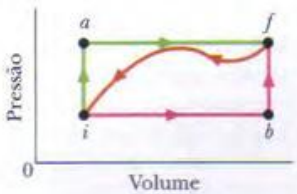


FIG. 18-42 Problema 49.

••50 Um gás em uma câmara passa pelo ciclo mostrado na Fig. 18-43. Determine a energia transferida pelo sistema na forma de calor durante o processo *CA* se a energia adicionada como calor $Q_{AB}$ durante o processo *AB* é 20,0 J, nenhuma energia é transferida como calor durante o processo *BC* e o trabalho líquido realizado durante o ciclo é 15,0 J.

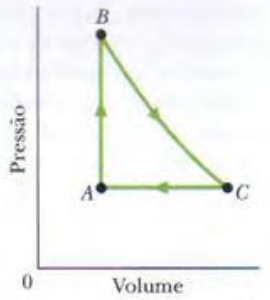


FIG. 18-43 Problema 50.

## seção 18-12 Mecanismos de Transferência de Calor

•51 Considere a placa da Fig. 18-18. Suponha que $L = 25{,}0$ cm, $A = 90{,}0$ cm² e que o material é cobre. Se $T_Q = 125°C$, $T_F = 10{,}0°C$ e um regime estacionário é atingido, determine a taxa de condução de calor através da placa.

•52 Se você se expusesse por alguns momentos ao espaço sideral longe do Sol e sem um traje espacial (como fez um astronauta no filme *2001: Uma Odisséia no Espaço*), sentiria o frio do espaço, ao irradiar muito mais energia que a absorvida do ambiente. (a) Com que taxa você perderia energia? (b) Quanta energia você perderia em 30 s? Suponha que sua emissividade é 0,90 e estime outros dados necessários para os cálculos.

•53 Uma barra cilíndrica de cobre de 1,2 m de comprimento e 4,8 cm² de seção reta é bem isolada e não perde energia através da superfície. A diferença de temperatura entre as extremidades é 100 C°, já que uma está imersa em uma mistura de água e gelo e a outra em uma mistura de água e vapor. (a) Com que taxa a energia é conduzida pela barra? (b) Com que taxa o gelo derrete na extremidade fria?

•54 O teto de uma casa em uma cidade de clima frio deve ter uma resistência térmica $R$ de 30 m² · K/W. Para isso, qual deve ser a espessura de um revestimento (a) de espuma de poliuretano e (b) de prata?

•55 Uma esfera com 0,500 m de raio, cuja emissividade é 0,850, está a 27,0°C em um local onde a temperatura ambiente é 77,0°C. Com que taxa a esfera (a) emite e (b) absorve radiação térmica? (c) Qual é a taxa líquida de troca de energia da esfera?

••56 Um cilindro maciço de raio $r_1 = 2{,}5$ cm, comprimento $h_1 = 5{,}0$ cm, emissividade 0,850 e temperatura 30°C está suspenso em um ambiente de temperatura 50°C. (a) Qual é a taxa líquida $P_1$ de transferência de radiação térmica do cilindro? (b) Se o cilindro é esticado até que seu raio seja $r_2 = 0{,}50$ cm, sua taxa líquida de transferência de radiação térmica passa a ser $P_2$. Qual é a razão $P_2/P_1$?

••57 Na Fig. 18-44*a*, duas barras retangulares iguais de metal são soldadas nas extremidades e mantidas a uma temperatura $T_1 = 0°C$ do lado esquerdo e uma temperatura $T_2 = 100°C$ do lado direito. Em 2,0 min, 10 J são conduzidos a uma taxa constante do lado direito para o lado esquerdo. Que tempo seria necessário para conduzir 10 J se as placas fossem soldadas lado a lado como na Fig. 18-44*b*?

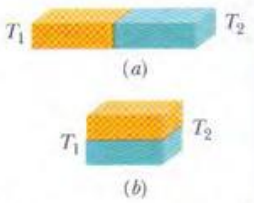


FIG. 18-44 Problema 57.

••58 A Fig. 18-45 mostra uma parede feita de três camadas de espessuras $L_1$, $L_2 = 0{,}700L_1$ e $L_3 = 0{,}350L_1$. As condutividades térmicas são $k_1$, $k_2 = 0{,}900k_1$ e $k_3 = 0{,}800k_1$. As temperaturas do lado esquerdo e do lado direito da parede são $T_Q = 30{,}0°C$ e $T_F = -15{,}0°C$, respectivamente. O sistema está no regime estacionário. (a) Qual é a diferença de temperatura $\Delta T_2$ na camada 2 (entre o lado esquerdo e o lado direito da camada)? Se o valor de $k_2$ fosse $1{,}10k_1$, (b) a taxa de condução de energia através da parede seria maior, menor ou igual à anterior, e (c) qual seria o valor de $\Delta T_2$?

FIG. 18-45 Problema 58.

••59 (a) Qual é a taxa de perda de energia em watts por metro quadrado através de uma janela de vidro de 3,0 mm de espessura se a temperatura externa é −20°F e a temperatura interna é +72°F? (b) Uma janela para tempestades, feita com a mesma espessura de vidro, é instalada do lado de fora da primeira, com um espaço de 7,5 cm entre as duas janelas. Qual é a nova taxa de perda de energia se a condução é o único mecanismo importante de perda de energia?

••60 A vespa gigante *Vespa mandarinia japonica* se alimenta de abelhas japonesas. Entretanto, se uma vespa tenta invadir uma colmeia centenas de abelhas formam rapidamente uma bola em torno da vespa para detê-la. As abelhas não picam, mordem, esmagam ou sufocam a vespa; limitam-se a aquecê-la, aumentando sua temperatura do valor normal de 35°C para 47°C ou 48°C, um valor que é mortal para a vespa, mas não para as abelhas (Fig. 18-46). Suponha o seguinte: 500 abelhas formam uma bola de raio $R = 2{,}0$ cm durante um intervalo de tempo $t = 20$ min, o mecanismo principal de perda de energia da bola é a radiação térmica, a superfície da bola tem uma emissividade $\varepsilon = 0{,}80$ e a

temperatura da bola é uniforme. Qual é a quantidade de energia que uma abelha precisa produzir, em média, durante os 20 min para manter a temperatura da bola em 47°C?

FIG. 18-46 Problema 60. *(©Dr. Masato Ono, Tamagawa University)*

••61 A Fig. 18-47 mostra uma parede feita de quatro camadas, de condutividades térmicas $k_1 = 0{,}060\ \text{W/m} \cdot \text{K}$, $k_3 = 0{,}040\ \text{W/m} \cdot \text{K}$ e $k_4 = 0{,}12\ \text{W/m} \cdot \text{K}$ ($k_2$ não é conhecida). As espessuras das camadas são $L_1 = 1{,}5$ cm, $L_3 = 2{,}8$ cm e $L_4 = 3{,}5$ cm ($L_2$ não é conhecida). As temperaturas conhecidas são $T_1 = 30°\text{C}$, $T_{12} = 25°\text{C}$ e $T_4 = -10°\text{C}$. A transferência de energia está no regime estacionário. Qual é o valor da temperatura $T_{34}$?

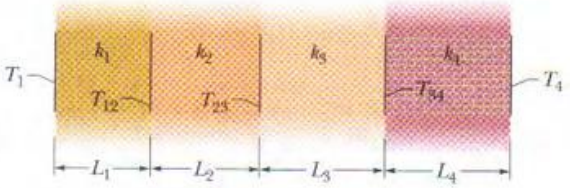



FIG. 18-47 Problema 61.

••62 *Aglomerações de pingüins.* Para suportar o frio da Antártica os pingüins-imperadores se aglomeram (Fig. 18-48). Suponha que um pingüim é um cilindro circular de altura $h = 1{,}1$ m e com uma área da base $a = 0{,}34\ \text{m}^2$. Seja $P_i$ a taxa com a qual um pingüim isolado irradia energia para o ambiente (através das superfícies superior e lateral); nesse caso, $NP_i$ é a taxa com a qual $N$ pingüins iguais e separados irradiam energia. Se os pingüins se aglomeram para formar um *cilindro único* de altura $h$ e área da base $Na$, o cilindro irradia com uma taxa $P_u$. Se $N = 1000$, determine (a) o valor da razão $P_u/NP_i$ e (b) a redução percentual da perda de energia devido à aglomeração.

FIG. 18-48 Problema 62. *(Alain Torterotot/Peter Arnold, Inc.)*

••63 Formou-se gelo em um pequeno lago, e o regime estacionário foi atingido com o ar acima do gelo a −5,0°C e o fundo do lago a 4,0°C. Se a profundidade total do *gelo* + *água* é 1,4 m, qual é a espessura do gelo? (Suponha que as condutividades térmicas do gelo e da água são 0,40 e 0,12 cal/m · C° · s, respectivamente.)

••64 *Efeito Leidenfrost.* Quando se deixa cair uma gota de água em uma frigideira cuja temperatura está entre 100°C e 200°C a gota dura menos de 1 s. Entretanto, se a temperatura da frigideira é maior a gota pode durar vários minutos, um efeito que recebeu o nome de um médico alemão que foi um dos primeiros a investigar o fenômeno. O efeito se deve à formação de uma fina camada de ar e vapor de água que separa a gota do metal (Fig. 18-49). Suponha que a distância entre a gota e a frigideira é $L = 0{,}100$ mm e que a gota tem a forma de um cilindro de altura $h = 1{,}50$ mm e área da base $A = 4{,}00 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$. Suponha também que a frigideira é mantida a uma temperatura constante $T_f = 300°\text{C}$ e que a temperatura da gota é 100°C. A massa específica da água é $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, e a condutividade térmica da camada que separa a gota da frigideira é $k = 0{,}026\ \text{W/m} \cdot \text{K}$. (a) Com que taxa a energia é conduzida da frigideira para a gota? (b) Se a condução é a principal forma de transmissão de energia da frigideira para a gota, quanto tempo a gota leva para evaporar?

FIG. 18-49 Problema 64.

••65 Um camada de gelo de 5,0 cm de espessura se formou na superfície de uma caixa-d'água em um dia frio de inverno (Fig. 18-50). O ar acima do gelo está a −10°C. Calcule a taxa de formação da placa de gelo em cm/h. Suponha que a condutividade térmica do gelo é 0,0040 cal/s · cm · C° e que a massa específica é 0,92 g/cm³. Suponha também que a transferência de energia através das paredes e do fundo do tanque pode ser deprezada.

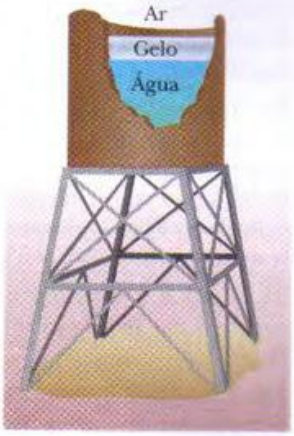



FIG. 18-50 Problema 65.

•••66 *Resfriamento de bebidas por evaporação.* Uma bebida pode ser mantida fresca, mesmo em um dia quente, se for colocada em um recipiente poroso de cerâmica embebida em água. Suponha que a energia perdida por evaporação seja igual à energia recebida em conseqüência da troca de radiação através da superfície superior e das superfícies laterais do recipiente. O recipiente e a bebida estão a uma temperatura $T = 15°\text{C}$, a temperatura ambiente é $T_{amb} = 32°\text{C}$ e o recipiente é um cilindro de raio $r = 2{,}2$ cm e altura $h = 10$ cm. Suponha que a emissividade é $\varepsilon = 1$ e despreze outras trocas de energia. Qual é a taxa $dm/dt$ de perda de massa de água do recipiente, em g/s?

## Problemas Adicionais

67 Na extrusão de chocolate frio através de um tubo, o êmbolo que empurra o chocolate realiza trabalho. O trabalho por unidade de massa do chocolate é igual a $p/\rho$, onde $p$ é a diferença entre a pressão aplicada e a pressão no local onde o chocolate sai do tubo, e $\rho$ é a massa específica do chocolate. Em vez de aumentar a temperatura, este trabalho funde a manteiga de cacau do choco-

late, cujo calor de fusão é 150 kJ/kg. Suponha que todo o trabalho é consumido na fusão e que a manteiga de cacau constitui 30% da massa do chocolate. Que porcentagem da manteiga de cacau é fundida durante a extrusão se $p = 5{,}5$ MPa e $\rho = 1200$ kg/m$^3$?

**68** Em uma série de experimentos, um bloco $B$ é colocado em um recipiente termicamente isolado em contato com um bloco $A$, que tem a mesma massa que o bloco $B$. Em cada experimento o bloco $B$ está inicialmente a uma certa temperatura $T_B$, mas a temperatura do bloco $A$ varia de experimento para experimento. Suponha que $T_f$ represente a temperatura final dos dois blocos ao atingirem o equilíbrio térmico. A Fig. 18-51 mostra a temperatura $T_f$ em função da temperatura inicial $T_A$ para um certo intervalo de valores possíveis de $T_A$, de $T_{A1} = 0$ K até $T_{A2} = 500$ K. A escala do eixo vertical é definida por $T_{fs} = 400$ K. Quais são (a) a temperatura $T_B$ e (b) a razão $c_B/c_A$ entre os calores específicos dos blocos?

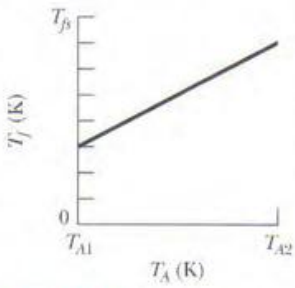


FIG. 18-51 Problema 68.

**69** Uma amostra de 0,300 kg é colocada em uma geladeira que remove calor a uma taxa constante de 2,81 W. A Fig. 18-52 mostra a temperatura $T$ da amostra em função do tempo $t$. A escala de temperatura é definida por $T_s = 30$°C, e a escala de tempo é definida por $t_s = 20$ min. Qual é o calor específico da amostra?

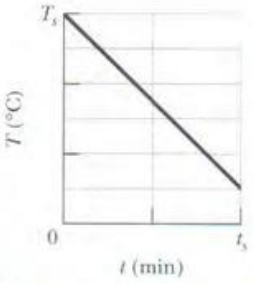


FIG. 18-52 Problema 69.

**70** Calcule o calor específico de um metal a partir dos dados a seguir. Um recipiente feito do metal tem uma massa de 3,6 kg e contém 14 kg de água. Um pedaço de 1,8 kg do metal, inicialmente à temperatura de 180°C, é mergulhado na água. O recipiente e a água estão inicialmente a uma temperatura de 16,0°C, e a temperatura final do sistema é 18,0°C.

**71** Qual é o aumento de volume de um cubo de alumínio com 5,00 cm de lado quando o cubo é aquecido de 10,0°C para 60,0°C?

**72** Uma barra de cobre, uma barra de alumínio e uma barra de latão, todas com 6,00 m de comprimento e 1,00 cm de diâmetro, são colocadas em contato pelas extremidades, com a barra de alumínio no meio. A extremidade livre da barra de cobre é mantida no ponto de ebulição da água, e a extremidade livre da barra de latão é mantida no ponto de congelamento da água. Qual é a temperatura, no regime estacionário, (a) da junção cobre-alumínio e (b) da junção alumínio-latão?

**73** Uma amostra de gás sofre uma transição de um estado inicial $a$ para um estado final $b$ por três diferentes trajetórias (processos), como mostra o diagrama $p$-$V$ da Fig. 18-53, onde $V_b = 5{,}00V_i$. A energia transferida para o gás como calor no processo 1 é $10p_iV_i$. Em termos de $p_iV_i$, quais são (a) a energia transferida para o gás como calor no processo 2 e (b) a variação da energia interna do gás no processo 3?

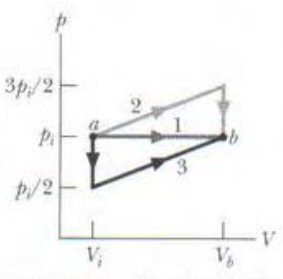


FIG. 18-53 Problema 73.

**74** A taxa média com a qual a energia chega à superfície do solo na América do Norte é 54,0 mW/m$^2$, e a condutividade térmica média das rochas próximas da superfície é 2,50 W/m · K. Supondo que a temperatura da superfície é de 10,0°C, determine a temperatura a uma profundidade de 35,0 km (perto da base da crosta). Ignore o calor gerado pela presença de elementos radioativos.

**75** A temperatura de um disco de Pyrex varia de 10,0°C para 60,0°C. O raio inicial do disco é 8,00 cm e a espessura inicial é 0,500 cm. Tome esses dados como sendo exatos. Qual é a variação do volume do disco? (Veja a Tabela 18-2.)

**76** Em certa casa com aquecimento solar, a energia proveniente do Sol é armazenada em barris com água. Em cinco dias seguidos no inverno, em que o tempo permanece nublado, $1{,}00 \times 10^6$ kcal são necessárias para manter o interior da casa a 22,0°C. Supondo que a água dos barris está a 50,0°C e que a água tem uma massa específica de $1{,}00 \times 10^3$ kg/m$^3$, que volume de água é necessário?

**77** Uma amostra de gás se expande de uma pressão inicial de 10 Pa e um volume inicial de 1,0 m$^3$ para um volume final de 2,0 m$^3$. Durante a expansão, a pressão e o volume estão relacionados pela equação $p = aV^2$, onde $a = 10$ N/m$^8$. Determine o trabalho realizado pelo gás durante a expansão.

**78** (a) Calcule a taxa com a qual o calor do corpo atravessa a roupa de um esquiador em regime estacionário, a partir dos seguintes dados: a área da superfície do corpo é 1,8 m$^2$; a roupa tem 1,0 cm de espessura; a temperatura da pele é 33°C; a temperatura da superfície externa da roupa é 1,0°C; a condutividade térmica da roupa é 0,040 W/m · K. (b) Se, após uma queda, a roupa do esquiador fica encharcada de água, cuja condutividade térmica é 0,60 W/m · K, por que fator a taxa de condução é multiplicada?

**79** A Fig. 18-54 mostra um ciclo fechado a que um gás é submetido. De $c$ até $b$, 40 J deixam o gás em forma de calor. De $b$ até $a$, 130 J deixam o gás em forma de calor, e o valor absoluto do trabalho realizado pelo gás é 80 J. De $a$ até $c$, 400 J são recebidos pelo gás na forma de calor. Qual é o trabalho realizado pelo gás de $a$ até $c$? (*Sugestão:* É preciso levar em conta os sinais dos dados fornecidos.)

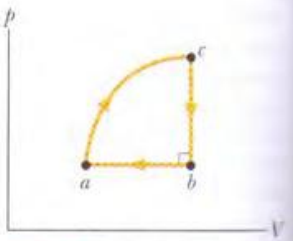


FIG. 18-54 Problema 79.

**80** Uma vidraça tem exatamente 20 cm por 30 cm a 10°C. De quanto aumenta sua área quando a temperatura aumenta para 40°C, supondo que pode se expandir livremente?

**81** Um lingote de 2,50 kg de alumínio é aquecido até 92,0°C e mergulhado em 8,00 kg de água a 5,00°C. Supondo que o sistema amostra-água está termicamente isolado, qual é a temperatura de equilíbrio do sistema?

**82** A Fig. 18-55*a* mostra um cilindro com gás, fechado por um êmbolo móvel. O cilindro é mantido submerso em uma mistura de gelo e água. O êmbolo é empurrado para baixo *rapidamente* da posição 1 para a posição 2 e mantido na posição 2 até que o gás esteja novamente à temperatura da mistura de gelo e água; em seguida, é erguido *lentamente* de volta para a posição 1. A Fig. 18-55*b* é um diagrama $p$-$V$ do processo. Se 100 g de gelo são derretidos durante o ciclo, qual é o trabalho que foi realizado *sobre* o gás?

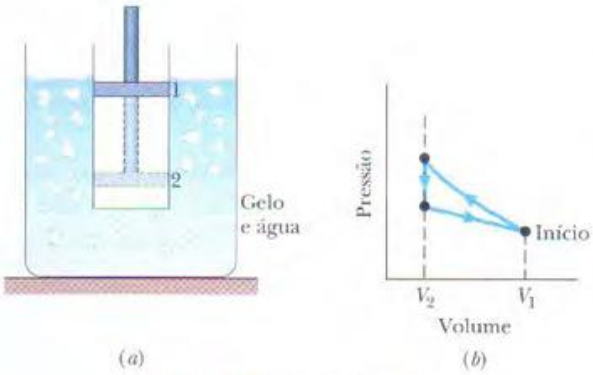



FIG. 18-55 Problema 82.

**83** A temperatura de um cubo de gelo de 0,700 kg é reduzida para −150°C. Em seguida, é fornecido calor ao cubo, mantendo-o termicamente isolado do ambiente. A transferência total é de 0,6993 MJ. Suponha que o valor de $c_{gelo}$ que aparece na Tabela 18-3 é válido para temperaturas de −150°C a 0°C. Qual é a temperatura final da água?

**84** Uma barra de aço a 25,0°C é fixada nas duas extremidades e resfriada. A que temperatura a barra se rompe? Use a Tabela 12-1.

**85** Suponha que você intercepte $5,0 \times 10^{-3}$ da energia irradiada por uma esfera quente que tem um raio de 0,020 m, uma emissividade de 0,80 e uma temperatura de 500 K na superfície. Qual é a quantidade de energia que você intercepta em 2,0 min?

**86** Três barras retilíneas de mesmo comprimento, feitas de alumínio, Invar e aço, todas a 20,0°C, formam um triângulo eqüilátero com pinos articulados nos vértices. A que temperatura o ângulo oposto à barra de Invar é 59,95°? As fórmulas trigonométricas necessárias estão no Apêndice E, e os dados necessários estão na Tabela 18-2.

**87** É possível derreter um bloco de gelo esfregando-o em outro bloco de gelo. Qual é o trabalho, em joules, necessário para derreter 1,00 g de gelo?

**88** Um termômetro de massa 0,0550 kg e calor específico 0,837 kJ/kg · K indica 15,0°C. O termômetro é totalmente imerso em 0,300 kg de água por tempo suficiente para ficar à mesma temperatura que a água. Se o termômetro indica 44,4°C, qual era a temperatura da água antes da introdução do termômetro?

**89** Um novato só pode entrar para o semi-secreto clube "300 F"* da Estação Polar Amundsen-Scott, no Pólo Sul, quando a temperatura do lado de fora está abaixo de −70°C. Em um dia como esse o novato tem que fazer uma sauna e depois correr ao ar livre usando apenas sapatos. (Naturalmente, fazer isso é muito perigoso, mas o ritual é um protesto contra os riscos da exposição ao frio.)

Suponha que, ao sair da sauna, a temperatura da pele do novato seja 102°F e que as paredes, teto e piso da base estejam a uma temperatura de 30°C. Estime a área da superfície do novato e suponha que a emissividade da pele é 0,80. (a) Qual é a taxa líquida, $P_{liq}$, com a qual o novato perde energia através da troca de radiação térmica com o aposento? Em seguida, suponha que, ao ar livre, metade da área da superfície do recruta troca energia térmica com o céu à temperatura de −25°C e que a outra metade troca radiação térmica com a neve e o solo à temperatura de −80°C. Qual é a taxa líquida com a qual o recruta perde energia através da troca de radiação térmica (b) com o céu e (c) com a neve e o solo?

*O nome se refere a uma diferença de 300°F entre a temperatura da sauna e a temperatura do lado de fora da base. (N.T.)

**90** Uma placa retangular de vidro mede inicialmente 0,200 m por 0,300 m. O coeficiente de expansão linear do vidro é $9,00 \times 10^{-6}$/K. Qual é a variação da área da placa se a temperatura aumenta de 20,0 K?

**91** Um atleta precisa perder peso e decide "puxar ferro". (a) Quantas vezes um peso de 80,0 kg deve ser levantado a uma altura de 1,00 m para queimar 0,50 kg de gordura, supondo que essa quantidade de gordura equivale a 3500 Cal? (b) Se o peso for levantado uma vez a cada 2,00 s, quanto tempo será necessário?

**92** Os icebergs do Atlântico Norte constituem um grande perigo para os navios; por causa deles, as distâncias das rotas marítimas sofrem um aumento da ordem de 30% durante a temporada de icebergs. Já se tentou destruir os icebergs usando explosivos, bombas, torpedos, balas de canhão, aríetes e cobrindo-os com fuligem. Suponha que a fusão direta de um iceberg, através da instalação de fontes de calor no gelo, seja tentada. Que quantidade de energia em forma de calor é necessária para derreter 10% de um iceberg com uma massa de 200 000 toneladas métricas? (1 tonelada métrica = 1000 kg.)

**93** Uma amostra de gás se expande de $V_1 = 1,0$ m³ e $p_1 = 40$ Pa para $V_2 = 4,0$ m³ e $p_2 = 10$ Pa seguindo a trajetória $B$ do diagrama $p$-V da Fig. 18-56. Em seguida, o gás é comprimido de volta para $V_1$, seguindo a trajetória $A$ ou a trajetória $C$. Calcule o trabalho líquido realizado pelo gás para o ciclo completo ao longo (a) da trajetória $BA$ e (b) da trajetória $BC$.

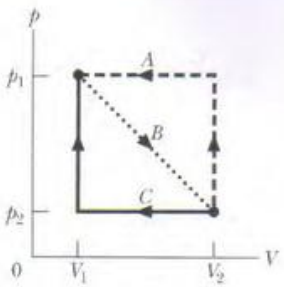



FIG. 18-56 Problema 93.

**94** Logo depois que a Terra se formou o calor liberado pelo decaimento de elementos radioativos aumentou a temperatura interna média de 300 para 3000 K, valor que permanece até hoje. Supondo que o coeficiente de dilatação volumétrica médio é $3,0 \times 10^{-5}$ K$^{-1}$, de quanto o raio do planeta aumentou desde a sua formação?

**95** A Fig. 18-57 mostra um ciclo fechado de um gás. A variação da energia interna ao longo da trajetória $ca$ é −160 J. A energia transferida para o gás como calor é 200 J ao longo da trajetória $ab$ e 40 J ao longo da trajetória $bc$. Qual é o trabalho realizado pelo gás ao longo (a) da trajetória $abc$ e (b) da trajetória $ab$?

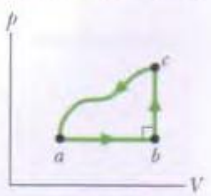



FIG. 18-57 Problema 95.

**96** O diagrama $p$-$V$ da Fig. 18-58 mostra duas trajetórias ao longo das quais uma amostra de gás pode passar do estado $a$ para o estado $b$, onde $V_b = 3,0V_1$. A trajetória 1 requer que uma energia igual a $5,0p_1V_1$ seja transferida ao gás na forma de calor. A trajetória 2 requer que uma energia igual a $5,5p_1V_1$ seja transferida ao gás na forma de calor. Qual é a razão $p_2/p_1$?

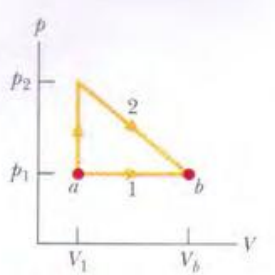



FIG. 18-58 Problema 96.

UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

**97** Um cubo de $6{,}0 \times 10^{-6}$ m de aresta e emissividade 0,75, à temperatura de $-100°C$, flutua no espaço sideral, onde a temperatura é $-150°C$. Qual é a taxa líquida de transferência da radiação térmica do cubo?

**98** O *calorímetro de fluxo* é um dispositivo usado para medir o calor específico dos líquidos. O líquido que passa pelo calorímetro, com uma vazão conhecida, recebe energia, na forma de calor, a uma taxa conhecida. A medida da diferença de temperatura resultante entre os pontos de entrada e de saída do líquido permite determinar o calor específico do líquido. Suponha que um líquido de massa específica 0,85 g/cm$^3$ passa por um calorímetro de fluxo com uma vazão de 8,0 cm$^3$/s. Quando um aquecedor elétrico é usado para fornecer energia ao líquido a uma taxa de 250 W, uma diferença de temperatura de 15 C° é estabelecida no regime estacionário entre os pontos de entrada e de saída. Qual é o calor específico do líquido?

**99** Um objeto com uma massa de 6,00 kg cai de uma altura de 50,0 m e, através de uma ligação mecânica, faz girar uma hélice que agita 0,600 kg de água. Suponha que a energia potencial gravitacional inicial do objeto é totalmente transferida para a energia térmica da água, que está inicialmente a 15,0°C. Qual é o aumento de temperatura da água?

# A Teoria Cinética dos Gases

19

Tom Branch/Photo Researchers

*Quando uma garrafa de champanha, cerveja ou qualquer outra bebida com gás é aberta, uma névoa se forma em torno da boca da garrafa e parte do líquido espirra para fora. Na fotografia, a névoa é a nuvem branca que envolve a rolha, e os respingos são os riscos no interior da nuvem.*

*O que produz a névoa que aparece no ar quando uma garrafa de bebida gasosa é aberta?*

A resposta está neste capítulo.

## 19-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos tópicos principais da termodinâmica é a física dos gases. Um gás é formado de átomos (isolados ou unidos em moléculas) que ocupam totalmente o volume do recipiente em que se encontram e exercem pressão sobre suas paredes. Muitas vezes podemos atribuir uma temperatura única a um gás confinado. Essas três propriedades de um gás (volume, pressão e temperatura) estão relacionadas ao movimento dos átomos. O volume é resultado da liberdade que os átomos têm para se espalhar por todo o recipiente, a pressão é causada por colisões dos átomos com as paredes do recipiente e a temperatura está associada à energia cinética dos átomos. A **teoria cinética dos gases**, o foco deste capítulo, relaciona volume, pressão e temperatura de um gás ao movimento dos átomos.

A teoria cinética dos gases tem muitas aplicações práticas. Os engenheiros automobilísticos estudam a queima do combustível vaporizado (um gás) nos motores dos carros. Os engenheiros de alimentos medem a taxa de produção do gás de fermentação que faz o pão crescer quando está sendo assado. Os engenheiros da indústria de bebidas procuram entender como o gás produz um "colarinho" em um copo de chope. Os engenheiros biomédicos tentam calcular o tempo mínimo que um mergulhador deve levar para subir à superfície para não correr o risco de que bolhas de nitrogênio se formem no sangue. Os meteorologistas investigam os efeitos das trocas de calor entre os oceanos e a atmosfera sobre as condições do tempo.

O primeiro passo em nossa discussão da teoria cinética dos gases tem a ver com a medição da quantidade de gás presente em uma amostra, que é feita usando o número de Avogadro.

## 19-2 | O Número de Avogadro

Quando estamos lidando com átomos e moléculas faz sentido medir o tamanho das amostras em mols. Fazendo isso, temos certeza de que estamos comparando amostras que contêm o mesmo número de átomos e moléculas. O *mol*, uma das sete unidades fundamentais do SI, é definido da seguinte forma:

> Um mol é o número de átomos em uma amostra de 12 g de carbono 12.

A pergunta óbvia é a seguinte: "Quantos átomos ou moléculas existem em um mol?" A resposta foi obtida experimentalmente. Como vimos no Capítulo 18, ela é a seguinte:

$$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \quad \text{(número de Avogadro)}. \tag{19-1}$$

onde $\text{mol}^{-1}$ representa o inverso do mol ou "por mol", e mol é o símbolo da unidade mol. O número $N_A$ é chamado de **número de Avogadro** em homenagem ao cientista italiano Amedeo Avogadro (1776-1856), um dos primeiros a concluir que todos os gases que ocupam o mesmo volume nas mesmas condições de temperatura e pressão contêm o mesmo número de átomos ou moléculas.

O número de mols $n$ contidos em uma amostra de qualquer substância é igual à razão entre o número de moléculas $N$ da amostra e o número de moléculas $N_A$ em 1 mol:

$$n = \frac{N}{N_A}. \tag{19-2}$$

(*Atenção:* Como os três símbolos desta equação podem ser facilmente confundidos, certifique-se de que compreendeu bem o que significam, para evitar problemas futuros.) Podemos calcular o número de mols $n$ em uma amostra a partir da massa $M_{am}$ da amostra e da *massa molar* $M$ (a massa de um mol) ou da massa molecular $m$ (a massa de uma molécula):

$$n = \frac{M_{am}}{M} = \frac{M_{am}}{mN_A}. \quad (19\text{-}3)$$

Na Eq. 19-3 usamos o fato de que a massa $M$ de 1 mol é o produto da massa $m$ de uma molécula pelo número de moléculas $N_A$ em 1 mol:

$$M = mN_A. \quad (19\text{-}4)$$

**TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

***Tática 1:*** *Número de Avogadro de Quê?* Na Eq. 19-1, o número de Avogadro está expresso em $mol^{-1}$, que é o inverso do mol ou 1/mol; a unidade do numerador não está indicada. Nada nos impede de indicar explicitamente no numerador qual é a unidade envolvida em cada situação específica. Assim, por exemplo, se a unidade elementar é um átomo, podemos escrever $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ átomos/mol. Se a unidade elementar é uma molécula, podemos escrever $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas/mol. Esta forma de proceder ajuda a tornar mais claro qual é a unidade básica usada como referência.

## 19-3 | Gases Ideais

Nosso objetivo neste capítulo é explicar as propriedades macroscópicas de um gás (como, por exemplo, sua pressão e temperatura) em termos das moléculas que o constituem. Surge, porém, um problema. De que gás estamos falando? Seria ele hidrogênio, oxigênio, metano ou, talvez, hexafluoreto de urânio? Eles são todos diferentes. As medidas mostram, porém, que se colocarmos 1 mol de vários gases em recipientes de mesmo volume e mantivermos os gases à mesma temperatura, as pressões medidas serão quase iguais. Se repetirmos as medidas com concentrações dos gases cada vez menores, essas pequenas diferenças das pressões medidas tendem a desaparecer. Medidas mais precisas mostram que, em baixas concentrações, todos os gases reais obedecem à relação

$$pV = nRT \quad \text{(lei dos gases ideais)}, \quad (19\text{-}5)$$

onde $p$ é a pressão absoluta (e não a manométrica), $n$ é o número de mols do gás e $T$ é a temperatura em kelvins. O fator $R$ é chamado de **constante dos gases ideais**, e possui o mesmo valor para todos os gases:

$$R = 8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}. \quad (19\text{-}6)$$

A Eq. 19-5 é a chamada **lei dos gases ideais**. Contanto que a concentração do gás seja baixa, essa lei se aplica a qualquer gás ou mistura de gases. (No caso de uma mistura, $n$ é o número total de mols na mistura.)

Podemos escrever a Eq. 19-5 de outra forma, em termos de uma constante $k$ chamada **constante de Boltzmann**, definida como

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{6{,}02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (19\text{-}7)$$

De acordo com a Eq. (19-7), $R = kN_A$. Assim, de acordo com a Eq. 19-2 ($n = N/N_A$), temos:

$$nR = Nk. \quad (19\text{-}8)$$

Substituindo esta relação na Eq. 19-5, obtemos uma segunda expressão para a lei dos gases ideais:

$$pV = NkT \quad \text{(lei dos gases ideais)}. \quad (19\text{-}9)$$

(*Atenção:* Note a diferença entre as duas expressões da lei dos gases ideais. A Eq. 19-5 envolve o número de mols, $n$, enquanto a Eq. 19-9 envolve o número de moléculas, $N$.)

FIG. 19-1 Um vagão-tanque esmagado da noite para o dia. *(Cortesia de www.Houston.RailFan.net)*

O leitor pode estar se perguntando: "O que é, afinal, um gás *ideal* e por que ele é importante?" A resposta está na simplicidade da lei (Eqs. 19-5 e 19-9) que governa as propriedades macroscópicas de um gás ideal. Usando essa lei, como veremos em seguida, podemos deduzir muitas das propriedades de um gás. Embora não exista na natureza um gás com as propriedades exatas de um gás ideal, todos os gases reais se aproximam do estado ideal em concentrações suficientemente baixas, ou seja, em condições nas quais as moléculas estão tão distantes umas das outras que praticamente não interagem. Assim, o conceito de gás ideal nos permite obter informações úteis a respeito do comportamento-limite dos gases reais.

Uma equipe de faxina estava usando vapor d'água para limpar o interior do vagão-tanque da Fig. 19-1. Como ainda não haviam terminado o trabalho no final do expediente, fecharam as válvulas do vagão e foram embora. Quando voltaram na manhã seguinte, descobriram que as grossas paredes de aço do vagão tinham sido esmagadas, como se uma criatura gigantesca de um filme de ficção científica classe B tivesse pisado no vagão durante a noite.

A Eq. 19-9 fornece uma explicação para o que aconteceu com o vagão. Quando o vagão estava sendo lavado seu interior estava cheio de vapor quente, que é um gás de moléculas de água. A equipe de faxina deixou o vapor dentro do tanque quando fechou as válvulas do vagão no final do expediente. Nessa ocasião, a pressão no interior do tanque era igual à pressão atmosférica, porque as válvulas tinham permanecido abertas durante a limpeza. Quando o vagão esfriou durante a noite, o vapor esfriou e a maior parte se transformou em água, o que significa que tanto o número $N$ de moléculas de gás quanto a temperatura $T$ do gás diminuíram. Assim, o lado direito da Eq. 19-9 diminuiu e, como o volume $V$ se manteve constante, a pressão $p$ do lado esquerdo também diminuiu. Em algum momento durante a noite a pressão do gás no interior do vagão ficou tão baixa que a pressão atmosférica foi suficiente para esmagar as paredes de aço do vagão. A equipe de faxina poderia ter evitado o acidente deixando as válvulas abertas, para que o ar entrasse no vagão e mantivesse a pressão interna igual à pressão atmosférica.

## Trabalho Realizado por um Gás Ideal a Temperatura Constante

Suponha que um gás ideal seja introduzido em um cilindro com um êmbolo, como o do Capítulo 18. Suponha também que permitimos que o gás se expanda de um volume inicial $V_i$ para um volume final $V_f$, mantendo constante a temperatura $T$ do gás. Um processo desse tipo, a *temperatura constante*, é chamado de **expansão isotérmica** (e o processo inverso é chamado de **compressão isotérmica**).

Em um diagrama $p$-$V$, uma *isoterma* é uma curva que liga pontos de mesma temperatura. Assim, ela é o gráfico da pressão em função do volume para um gás cuja temperatura $T$ é mantida constante. Para $n$ mols de um gás ideal, ela é o gráfico da equação

$$p = nRT\frac{1}{V} = (\text{constante})\frac{1}{V}. \tag{19-10}$$

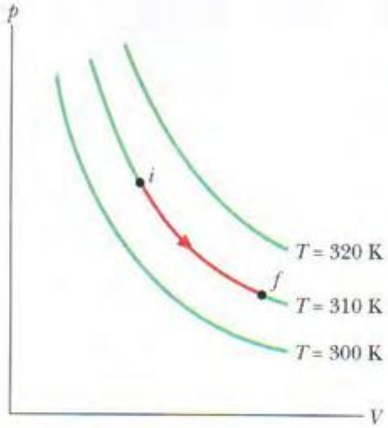



FIG. 19-2 Três isotermas em um diagrama $p$-$V$. A trajetória mostrada na isoterma central representa uma expansão isotérmica de um gás de um estado inicial $i$ para um estado final $f$. A trajetória de $f$ para $i$ na mesma isoterma representa o processo inverso, ou seja, uma compressão isotérmica.

A Fig. 19-2 mostra três isotermas, cada uma correspondendo a um valor diferente (constante) de $T$. (Observe que os valores de $T$ das isotermas aumentam para cima e para a direita.) A expansão isotérmica do gás do estado $i$ para o estado $f$ à temperatura constante de 310 K está indicada na isoterma do meio.

Para determinar o trabalho realizado por um gás ideal durante uma expansão isotérmica, começamos com a Eq. 18-25,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV. \tag{19-11}$$

Esta é uma expressão geral para o trabalho realizado durante qualquer variação de volume de um gás. No caso de um gás ideal, podemos usar a Eq. 19-5 ($pV = nRT$) para eliminar $p$, obtendo

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV. \qquad (19\text{-}12)$$

Como estamos supondo que se trata de uma expansão isotérmica, $T$ é constante, de modo que podemos colocá-la do lado de fora do sinal de integração e escrever

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT\,[\ln V]_{V_i}^{V_f}. \qquad (19\text{-}13)$$

Calculando o valor da expressão entre colchetes nos limites indicados e usando a relação $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, obtemos

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico).} \qquad (19\text{-}14)$$

Lembre-se de que o símbolo ln indica que se trata de um logaritmo *natural*, de base $e$.

No caso de uma expansão, $V_f$ é maior do que $V_i$, de modo que a razão $V_f/V_i$ na Eq. 19-14 é maior que 1. O logaritmo natural de um número maior do que 1 é positivo e, portanto, como era de se esperar, o trabalho $W$ realizado por um gás ideal durante uma expansão isotérmica é positivo. No caso de uma compressão, $V_f$ é menor que $V_i$, de modo que a razão entre os volumes na Eq. 19-14 é menor que 1. Assim, como era de se esperar, o logaritmo natural nesta equação (e, portanto, o trabalho $W$) é negativo.

## Trabalho Realizado a Volume Constante e a Pressão Constante

A Eq. 19-14 não permite calcular o trabalho $W$ realizado por um gás ideal em *qualquer* processo termodinâmico; ela só pode ser usada quando a temperatura é mantida constante. Se a temperatura varia, a variável $T$ da Eq. 19-12 não pode ser colocada do lado de fora do sinal de integração, como na Eq. 19-13, de modo que não é possível obter a Eq. 19-14.

Entretanto, podemos sempre voltar à Eq. 19-11 para determinar o trabalho $W$ realizado por um gás ideal (ou qualquer outro gás) durante qualquer processo, como os processos a volume constante e a pressão constante. Se o volume do gás é constante, a Eq. 19-11 nos dá

$$W = 0 \quad \text{(processo a volume constante).} \qquad (19\text{-}15)$$

Se, em vez disso, o volume varia enquanto a pressão $p$ do gás é mantida constante, a Eq. 19-11 se torna

$$W = p(V_f - V_i) = p\,\Delta V \quad \text{(processo a pressão constante).} \qquad (19\text{-}16)$$

**TESTE 1** Um gás ideal tem uma pressão inicial de 3 unidades de pressão e um volume inicial de 4 unidades de volume. A tabela mostra a pressão final e o volume final do gás (nas mesmas unidades) em cinco processos. Que processos começam e terminam na mesma isoterma?

| | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 12 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| *V* | 1 | 2 | 7 | 3 | 12 |

## Exemplo 19-1

Um cilindro contém 12 L de oxigênio a 20°C e 15 atm. A temperatura é aumentada para 35°C e o volume é reduzido para 8,5 L. Qual é a pressão final do gás em atmosferas? Suponha que o gás é ideal.

**IDÉIA-CHAVE** Como o gás é ideal, sua pressão, volume, temperatura e número de mols estão relacionados pela lei dos gases ideais, tanto no estado inicial $i$ como no estado final $f$ (após as variações).

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 19-5, temos:

$$p_i V_i = nRT_i \quad \text{e} \quad p_f V_f = nRT_f.$$

Dividindo a segunda equação pela primeira e explicitando $p_f$, obtemos

$$p_f = \frac{p_i T_f V_i}{T_i V_f}. \qquad (19\text{-}17)$$

Observe que não há necessidade de converter os volumes inicial e final de litros para metros cúbicos, já que os fatores de conversão são multiplicativos e se cancelam na Eq. 19-17. O mesmo se aplica aos fatores de conversão da pressão de atmosferas para pascals. Por outro lado, para converter as temperaturas dadas para kelvins temos que somar constantes que não se cancelam e, portanto, devem ser levadas em consideração. Assim, devemos escrever

$$T_i = (273 + 20)\ \text{K} = 293\ \text{K}$$

e

$$T_f = (273 + 35)\ \text{K} = 308\ \text{K}.$$

Substituindo os valores conhecidos na Eq. 19-17, obtemos

$$p_f = \frac{(15\ \text{atm})(308\ \text{K})(12\ \text{L})}{(293\ \text{K})(8{,}5\ \text{L})} = 22\ \text{atm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 19-2

Um mol de oxigênio (trate-o como um gás ideal) se expande a uma temperatura constante $T$ de 310 K de um volume inicial $V_i$ de 12 L para um volume final $V_f$ de 19 L. Qual é o trabalho realizado pelo gás durante a expansão?

**IDÉIA-CHAVE** Em geral calculamos o trabalho integrando a pressão do gás em relação ao volume do gás, usando a Eq. 19-11. Entretanto, como neste caso o gás é ideal e a expansão é isotérmica, essa integração leva à Eq. 19-14.

***Cálculo:*** Podemos escrever:

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$= (1\ \text{mol})(8{,}31\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(310\ \text{K}) \ln \frac{19\ \text{L}}{12\ \text{L}}$$

$$= 1180\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A expansão está indicada no diagrama $p$-$V$ da Fig. 19-3. O trabalho realizado pelo gás durante a expansão é representado pela área sob a curva *if*.

É fácil mostrar que se a expansão for revertida, com o gás sofrendo uma compressão isotérmica de 19 L para 12 L, o trabalho realizado pelo gás será −1180 J. Assim, uma força externa teria que realizar um trabalho de 1180 J sobre o gás para comprimi-lo.

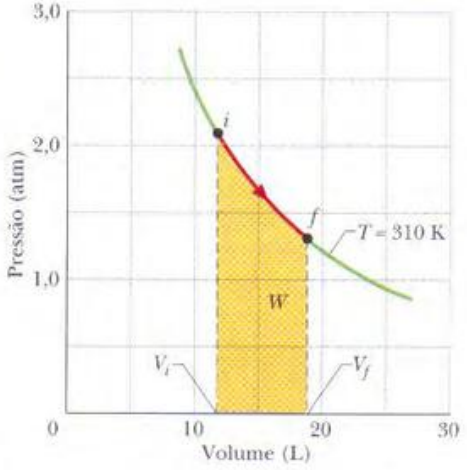



FIG. 19-3 A área sombreada representa o trabalho realizado por 1 mol de oxigênio ao se expandir de $V_i$ para $V_f$ a uma temperatura constante de 310 K.

## 19-4 | Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática

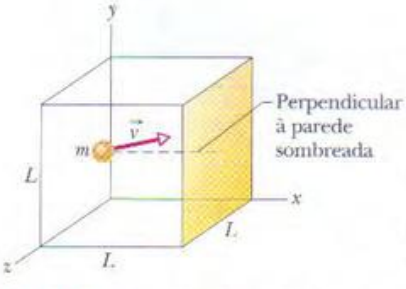



FIG. 19-4 Uma caixa cúbica de aresta $L$, com $n$ mols de um gás ideal. Uma molécula de massa $m$ e velocidade $\vec{v}$ está prestes a colidir com a parede sombreada de área $L^2$. É mostrada também uma reta perpendicular a essa parede.

Vamos passar agora ao nosso primeiro problema de teoria cinética dos gases. Considere $n$ mols de um gás ideal em uma caixa cúbica de volume $V$, como na Fig. 19-4. As paredes da caixa são mantidas a uma temperatura $T$. Qual é a relação entre a pressão $p$ exercida pelo gás sobre as paredes da caixa e a velocidade das moléculas?

As moléculas de gás no interior da caixa estão se movendo em todas as direções e com várias velocidades, colidindo umas com as outras e ricocheteando nas paredes como bolas em uma quadra de *squash*. Vamos ignorar (por enquanto) as colisões das moléculas umas com as outras e considerar apenas as colisões elásticas com as paredes.

A Fig. 19-4 mostra uma molécula de gás típica, de massa $m$ e velocidade $\vec{v}$, que está prestes a colidir com a parede sombreada. Como estamos supondo que as colisões das moléculas com as paredes são elásticas, quando essa molécula colide com a parede a única componente de sua velocidade que muda é a componente $x$, que troca de sinal. Isso significa que a única componente do momento que muda é a componente $x$, que sofre uma variação

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x.$$

Assim, o momento $\Delta p_x$ transferido para a parede pela molécula durante a colisão é $2mv_x$. (Como neste livro o símbolo $p$ é usado para representar tanto o momento como a pressão, precisamos tomar cuidado e observar que neste caso $p$ representa o momento e é uma grandeza vetorial.)

A molécula da Fig. 19-4 se choca várias vezes com a parede sombreada. O intervalo de tempo $\Delta t$ entre colisões é o tempo que a molécula leva para se deslocar até a parede oposta e voltar (percorrendo uma distância $2L$), movendo-se com uma velocidade $v_x$. Assim, $\Delta t$ é igual a $2L/v_x$. (Note que este resultado é válido mesmo que a molécula colida com outras paredes no caminho, já que essas paredes são paralelas a $x$ e, portanto, não podem mudar o valor de $v_x$.) Assim, a taxa média com a qual o momento é transmitido para a parede sombreada é dada por

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

De acordo com a segunda lei de Newton ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$), a taxa com a qual o momento é transferido para a parede é a força que age sobre a parede. Para determinar a força total devemos somar as contribuições de todas as moléculas que colidem com a parede, levando em conta a possibilidade de que tenham velocidades diferentes. Dividindo o módulo da força total $F_x$ pela área da parede ($= L^2$), temos a pressão $p$ a que é submetida a parede, onde agora e no resto da discussão $p$ representa pressão. Assim, usando a expressão de $\Delta p_x/\Delta t$, podemos escrever essa pressão na forma

$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{mv_{x1}^2/L + mv_{x2}^2/L + \cdots + mv_{xN}^2/L}{L^2}$$

$$= \left(\frac{m}{L^3}\right)(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2), \qquad (19\text{-}18)$$

onde $N$ é o número de moléculas que existem na caixa.

Como $N = nN_A$, o segundo fator entre parênteses da Eq. 19-18 possui $nN_A$ parcelas. Podemos substituir esta soma por $nN_A(v_x^2)_{méd}$, onde $(v_x^2)_{méd}$ é o valor médio do quadrado da componente $x$ da velocidade de todas as moléculas. Nesse caso, a Eq. 19-18 se torna

$$p = \frac{nmN_A}{L^3}(v_x^2)_{méd}.$$

Entretanto, $mN_A$ é a massa molar $M$ do gás (ou seja, a massa de 1 mol do gás. Como, além disso, $L^3$ é o volume do gás, temos:

$$p = \frac{nM(v_x^2)_{méd}}{V}. \qquad (19\text{-}19)$$

Para qualquer molécula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como há muitas moléculas e elas estão todas se movendo em direções aleatórias, os valores médios dos quadrados das componentes da velocidade são iguais, de modo que $v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$. Assim, a Eq.19-19 se torna

$$p = \frac{nM(v^2)_{méd}}{3V}. \qquad (19\text{-}20)$$

A raiz quadrada de $(v^2)_{méd}$ é uma espécie de velocidade média, conhecida como **velocidade média quadrática** das moléculas e representada pelo símbolo $v_{rms}$.* Para calcular a velocidade média quadrática elevamos as velocidades das moléculas ao quadrado, obtemos a média de todas as velocidades e extraímos a raiz quadrada do resultado. Fazendo $\sqrt{(v^2)_{méd}} = v_{rms}$ podemos escrever a Eq. 19-20 na forma

*Do inglês *root mean square*, que significa valor médio quadrático. (N.T.)

**TABELA 19-1**

**Algumas Velocidades Médias Quadráticas à Temperatura Ambiente ($T$ = 300 K)[a]**

| Gás | Massa Molar ($10^{-3}$ kg/mol) | $v_{rms}$ (m/s) |
|---|---|---|
| Hidrogênio ($H_2$) | 2,02 | 1920 |
| Hélio (He) | 4,0 | 1370 |
| Vapor d'água ($H_2O$) | 18,0 | 645 |
| Nitrogênio ($N_2$) | 28,0 | 517 |
| Oxigênio ($O_2$) | 32,0 | 483 |
| Dióxido de carbono ($CO_2$) | 44,0 | 412 |
| Dióxido de enxofre ($SO_2$) | 64,1 | 342 |

[a]Por conveniência, a temperatura ambiente muitas vezes é tomada como sendo 300 K (27°C), que é uma temperatura relativamente quente.

$$p = \frac{nMv_{rms}^2}{3V}. \tag{19-21}$$

A Eq. 19-21 representa bem o espírito da teoria cinética dos gases, mostrando como a pressão de um gás (uma grandeza macroscópica) depende da velocidade das moléculas que o compõem (uma grandeza microscópica).

Podemos inverter a Eq. 19-21 e usá-la para calcular $v_{rms}$. Combinando a Eq. 19-21 com a lei dos gases ideais ($pV = nRT$), temos:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{19-22}$$

A Tabela 19-1 mostra algumas velocidades médias quadráticas calculadas usando a Eq. 19-22. As velocidades são surpreendentemente elevadas. Para moléculas de hidrogênio à temperatura ambiente (300 K), a velocidade média quadrática é 1920 m/s ou 6900 km/h, maior que a de uma bala de fuzil! Na superfície do Sol, onde a temperatura é $2 \times 10^6$ K, a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio seria 82 vezes maior que na temperatura ambiente, se não fosse pelo fato de que em velocidades tão altas as moléculas não sobrevivem a colisões com outras moléculas. Lembre-se também de que a velocidade média quadrática é apenas uma espécie de velocidade média; muitas moléculas se movem muito mais depressa e outras muito mais devagar que esse valor.

A velocidade do som em um gás está intimamente ligada à velocidade média quadrática das moléculas. Em uma onda sonora, a perturbação é passada de molécula para molécula através de colisões. A onda não pode se mover mais depressa que a velocidade "média" das moléculas. Na verdade, a velocidade do som deve ser um pouco menor que a velocidade "média" das moléculas, porque nem todas as moléculas estão se movendo na mesma direção que a onda. Assim, por exemplo, à temperatura ambiente a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio e de nitrogênio é 1920 m/s e 517 m/s, respectivamente. A velocidade do som nos dois gases a essa temperatura é 1350 m/s e 350 m/s, respectivamente.

O leitor pode estar se perguntando: se as moléculas se movem tão depressa, por que levo quase um minuto para sentir o cheiro quando alguém abre um vidro de perfume do outro lado da sala? A resposta é que, como discutiremos na Seção 19-6, apesar de terem uma velocidade elevada as moléculas do perfume se afastam lentamente do vidro por causa das colisões com outras moléculas, que as impedem de seguir uma trajetória retilínea.

**Exemplo 19-3**

São dados cinco números: 5, 11, 32, 67 e 89.

(a) Qual é o valor médio $n_{méd}$ desses números?

***Cálculo:*** O valor médio é dado por

$$n_{méd} = \frac{5+11+32+67+89}{5} = 40{,}8. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o valor médio quadrático $n_{rms}$ desses números?

***Cálculo:*** O valor médio quadrático é dado por

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{5^2+11^2+32^2+67^2+89^2}{5}} = 52{,}1. \qquad \text{(Resposta)}$$

O valor médio quadrático é maior que o valor médio porque os números maiores, ao serem elevados ao quadrado, pesam mais no resultado final. Para mostrar que isso é verdade vamos substituir o maior dos cinco números, 89, por 300. O valor médio do novo conjunto de cinco números (como o leitor pode calcular) é 2,0 vezes maior que o valor médio anterior, enquanto o valor médio quadrático é 2,7 vezes maior que o valor médio quadrático anterior.

## 19-5 | Energia Cinética de Translação

Vamos considerar novamente uma molécula de um gás ideal que se move no interior da caixa da Fig. 19-4, mas agora vamos supor que sua velocidade varia quando colide com outras moléculas. A energia cinética de translação da molécula em um

dado instante é $\frac{1}{2}mv^2$. A energia cinética de translação *média* em um certo intervalo de observação é

$$K_{méd} = (\tfrac{1}{2}mv^2)_{méd} = \tfrac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \tfrac{1}{2}mv_{rms}^2, \quad (19\text{-}23)$$

onde estamos supondo que a velocidade média da molécula durante o tempo de observação é igual à velocidade média das moléculas do gás em um dado instante. (Desde que a energia total do gás não esteja variando e que a molécula seja observada por um tempo suficiente, esta hipótese é válida.) Substituindo o valor de $v_{rms}$ dado pela Eq. 19-22, obtemos:

$$K_{méd} = (\tfrac{1}{2}m)\frac{3RT}{M}.$$

Entretanto, $M/m$, a massa molar dividida pela massa de uma molécula, é simplesmente o número de Avogadro. Assim,

$$K_{méd} = \frac{3RT}{2N_A}.$$

Usando a Eq. 19-7 ($k = R/N_A$), podemos escrever:

$$K_{méd} = \tfrac{3}{2}kT. \quad (19\text{-}24)$$

Esta equação nos diz algo inesperado:

**Em uma dada temperatura $T$, todas as moléculas de um gás ideal, independentemente de suas massas, têm a mesma energia cinética de translação média, $\frac{3}{2}kT$. Quando medimos a temperatura de um gás também estamos medindo a energia cinética de translação média de suas moléculas.**

**TESTE 2** Uma mistura de gases contém moléculas dos tipos 1, 2 e 3, com massas moleculares $m_1 > m_2 > m_3$. Ordene os três tipos de acordo (a) com a energia cinética média e (b) com a velocidade média quadrática, em ordem decrescente.

## 19-6 | Livre Caminho Médio*

Vamos continuar o estudo do movimento das moléculas em um gás ideal. A Fig. 19-5 mostra a trajetória de uma molécula típica no interior do gás, sofrendo mudanças abruptas tanto do módulo como da orientação da velocidade ao colidir elasticamente com outras moléculas. Entre duas colisões a molécula se move em linha reta com velocidade constante. Embora a figura mostre as outras moléculas como se estivessem paradas, elas também estão se movendo.

Um parâmetro útil para descrever esse movimento aleatório é o **livre caminho médio** $\lambda$ das moléculas. Como o nome indica, $\lambda$ é a distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões. Esperamos que $\lambda$ varie inversamente com $N/V$, o número de moléculas por unidade de volume (ou concentração de moléculas). Quanto maior o valor de $N/V$, maior deve ser o número de colisões e menor o livre caminho médio. Também esperamos que $\lambda$ varie inversamente algum parâmetro associado ao tamanho das moléculas, como o diâmetro $d$, por exemplo. (Se as moléculas fossem pontuais, como supusemos até agora, não sofreriam colisões e o livre caminho médio seria infinito.) Assim, quanto maiores forem as moléculas, menor deve ser o livre caminho médio. Podemos até prever que $\lambda$ deve variar (inversamente) com o *quadrado* do diâmetro da molécula, já que é a seção de choque de uma molécula, e não o diâmetro, que determina sua área efetiva como alvo.

Na verdade, o livre caminho médio é dado pela seguinte expressão:

FIG. 19-5 Uma molécula se movendo no interior de um gás, colidindo com outras moléculas do gás. Embora as outras moléculas sejam mostradas como estacionárias, também estão se movendo de forma semelhante.

*A designação caminho livre médio também é encontrada na literatura. (N.E.)

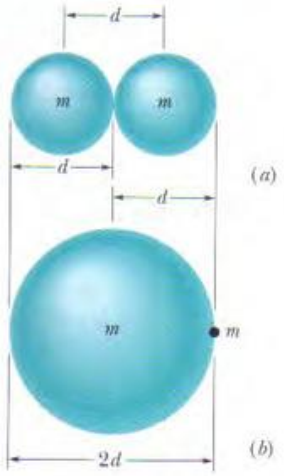



FIG. 19-6 (*a*) Uma colisão acontece quando os centros de duas moléculas ficam a uma distância $d$, onde $d$ é o diâmetro das moléculas. (*b*) Uma representação equivalente, porém mais conveniente, é pensar na molécula em movimento como tendo um *raio* $d$ e em todas as outras moléculas como pontos. A condição para que aconteça uma colisão permanece a mesma.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\, N/V} \qquad \text{(livre caminho médio).} \tag{19-25}$$

Para justificar a Eq. 19-25, concentramos a atenção em uma única molécula e supomos que, como na Fig. 19-5, a molécula está se movendo com velocidade constante $v$ e que todas as outras moléculas estão em repouso. Mais tarde, vamos dispensar esta última hipótese.

Supomos ainda que as moléculas são esferas de diâmetro $d$. Uma colisão ocorre, portanto, se os centros de duas moléculas chegam a uma distância $d$ um do outro, como na Fig. 19-6*a*. Uma outra forma de descrever a situação é supor que o *raio* da nossa molécula é $d$ e todas as outras moléculas são pontuais, como na Fig. 19-6*b*. Isso não muda o critério para uma colisão e facilita a análise matemática do problema.

Ao ziguezaguear pelo gás, nossa molécula varre um pequeno cilindro de seção reta $\pi d^2$ entre colisões sucessivas. Em intervalo de tempo $\Delta t$ a molécula percorre uma distância $v\Delta t$, onde $v$ é a sua velocidade. Assim, alinhando todos os pequenos cilindros varridos no intervalo $\Delta t$ formamos um cilindro composto (Fig. 19-7) de comprimento $v\Delta t$ e volume $(\pi d^2)(v\Delta t)$. Nesse caso, o número de colisões que acontecem em um intervalo de tempo $\Delta t$ é igual ao número de moléculas (pontuais) no interior desse cilindro.

Como $N/V$ é o número de moléculas por unidade de volume, o número de moléculas no interior do cilindro é $N/V$ vezes o volume do cilindro, ou $(N/V)(\pi d^2 v\Delta t)$. Este é também o número de colisões que acontecem no intervalo $\Delta t$. O livre caminho médio é o comprimento da trajetória (e do cilindro) dividido por este número:

$$\lambda = \frac{\text{distância percorrida em } \Delta t}{\text{número de colisões em } \Delta t} \approx \frac{v\,\Delta t}{\pi d^2 v\,\Delta t\, N/V}$$

$$= \frac{1}{\pi d^2\, N/V}. \tag{19-26}$$

FIG. 19-7 No intervalo de tempo $\Delta t$, a molécula em movimento varre um cilindro de comprimento $v\,\Delta t$ e raio $d$.

Esta equação é apenas aproximada, porque se baseia na hipótese de que todas as moléculas, exceto uma, estão em repouso. Na verdade, *todas* as moléculas estão em movimento; quando este fato é levado em consideração o resultado é a Eq. 19-25. Note que ela difere da Eq. 19-26 (aproximada) apenas por um fator de $1/\sqrt{2}$.

A aproximação da Eq. 19-26 tem a ver com os dois símbolos $v$ que cancelamos. O $v$ do numerador é $v_{méd}$, a velocidade média das moléculas *em relação ao recipiente*. O $v$ do denominador é $v_{rel}$, a velocidade média de nossa molécula *em relação às outras moléculas*, que também estão se movendo. É esta última velocidade média que determina o número de colisões. Um cálculo detalhado, levando em conta a distribuição de velocidades das moléculas, nos dá $v_{rel} = \sqrt{2}v_{méd}$; esta é origem do fator $\sqrt{2}$.

O livre caminho médio das moléculas de ar ao nível do mar é cerca de 0,1 $\mu$m. A uma altitude de 100 km o ar é tão rarefeito que o livre caminho médio chega a 16 cm. A 300 km o livre caminho médio é da ordem de 20 km. Um problema enfrentado pelos cientistas que estudam a física e a química da atmosfera superior em laboratório é a falta de recipientes suficientemente grandes para conter amostras de gás nas condições em que se encontram nas camadas superiores da atmosfera. O estudo das concentrações de freon, dióxido de carbono e ozônio na atmosfera superior é de importância vital para o controle da poluição.

**TESTE 3** Um mol de um gás $A$, cujas moléculas têm um diâmetro $2d_0$ e uma velocidade média $v_0$, é colocado em um certo recipiente. Um mol de um gás $B$, cujas moléculas têm um diâmetro $d_0$ e uma velocidade média $2v_0$ (as moléculas do gás $B$ são menores e mais rápidas), é colocado em um recipiente igual. Qual dos gases tem a maior taxa média de colisões?

**Exemplo 19-4**

(a) Qual é o livre caminho médio $\lambda$ de moléculas de oxigênio à temperatura $T = 300$ K e a uma pressão $p = 1{,}0$ atm? Suponha que o diâmetro das moléculas é $d = 290$ pm e que o gás é ideal.

**IDÉIA-CHAVE** Cada molécula de oxigênio se move entre outras moléculas de oxigênio *em movimento*, descrevendo uma trajetória em ziguezague por causa das colisões. Assim, o livre caminho médio é dado pela Eq. 19-25.

***Cálculo:*** Para aplicar a Eq. 19-25 precisamos conhecer o número de moléculas por unidade de volume, $N/V$. Como estamos supondo que se trata de um gás ideal, podemos usar a lei dos gases ideais na forma da Eq. 19-9 ($pV = NkT$) para escrever $N/V = p/kT$. Substituindo este valor na Eq. 19-25, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \, N/V} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 \, p}$$

$$= \frac{(1{,}38\times10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{\sqrt{2}\pi(2{,}9\times10^{-10}\ \text{m})^2\,(1{,}01\times10^{5}\ \text{Pa})}$$

$$= 1{,}1\times10^{-7}\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde a cerca de 380 vezes o diâmetro de uma molécula de oxigênio.

(b) Suponha que a velocidade média das moléculas de oxigênio é $v = 450$ m/s. Qual é o tempo médio $t$ entre colisões para qualquer molécula? Qual é a freqüência $f$ das colisões?

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Entre colisões, a molécula percorre, em média, o livre caminho médio $\lambda$ com velocidade $v$. (2) A freqüência das colisões é o inverso do tempo $t$ entre colisões.

***Cálculos:*** De acordo com a primeira idéia-chave, o tempo médio entre colisões é

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{1{,}1\times10^{-7}\ \text{m}}{450\ \text{m/s}}$$

$$= 2{,}44\times10^{-10}\ \text{s} \approx 0{,}24\ \text{ns}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que, em média, uma molécula de oxigênio passa menos de um quarto de nanossegundo sem sofrer colisões.

De acordo com a segunda idéia-chave, a freqüência das colisões é

$$f = \frac{1}{t} = \frac{1}{2{,}44\times10^{-10}\ \text{s}} = 4{,}1\times10^{9}\ \text{s}^{-1}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que, em média, uma molécula de oxigênio sofre cerca de 4 bilhões de colisões por segundo.

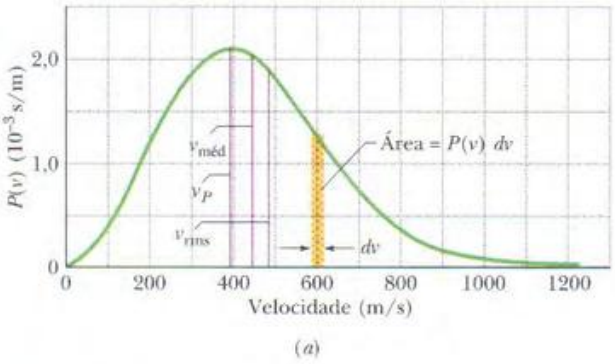
## 19-7 | A Distribuição de Velocidades das Moléculas

A velocidade média quadrática $v_{rms}$ nos dá uma idéia geral das velocidades das moléculas de um gás a uma dada temperatura. Em muitos casos, porém, estamos interessados em informações mais detalhadas, como, por exemplo, qual é a porcentagem de moléculas com velocidade maior que $v_{rms}$? Qual é a porcentagem de moléculas com velocidade maior que o dobro de $v_{rms}$? Para responder a esse tipo de pergunta precisamos saber de que forma os possíveis valores da velocidade estão distribuídos pelas moléculas. A Fig. 19-8*a* mostra esta distribuição para moléculas de oxigênio à temperatura ambiente ($T = 300$ K); na Fig. 19-8*b* este resultado é comparado com a distribuição de velocidades a uma temperatura $T = 80$ K.

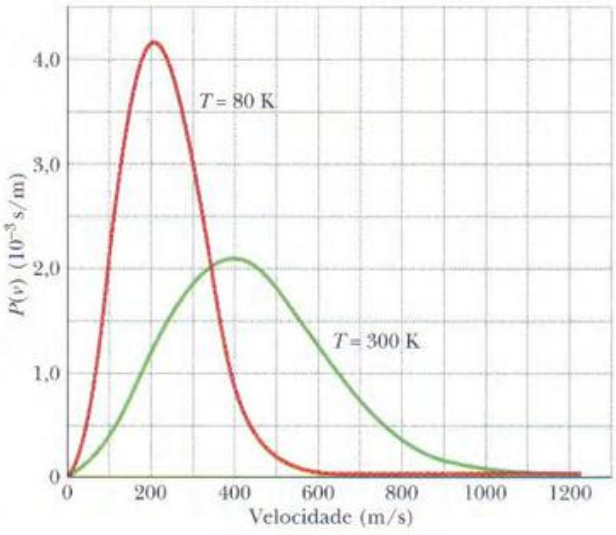
Em 1852, o físico escocês James Clerk Maxwell calculou a distribuição de velocidades das moléculas de um gás. O resultado que obteve, conhecido como **lei de distribuição de velocidades de Maxwell**, foi o seguinte:

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}. \qquad (19\text{-}27)$$

onde $M$ é a massa molar do gás, $R$ é a constante dos gases ideais, $T$ é a temperatura do gás e $v$ é a velocidade escalar da molécula. Gráficos desta função estão plotados nas Figs. 19-8*a* e 19-8*b*. A grandeza $P(v)$ da Eq. 19-27 e da Fig. 19-8 é uma *função distribuição de probabilidade*: para uma dada velocidade $v$, o produto $P(v)dv$ (uma grandeza adimensional) é a fração de moléculas cujas velocidades estão no intervalo $dv$ no entorno de $v$.




(*a*)




(*b*)

**FIG. 19-8** (*a*) A distribuição de velocidades de Maxwell para moléculas de oxigênio a uma temperatura $T = 300$ K. As três velocidades características estão indicadas. (*b*) As curvas para 300 K e 80 K. Note que as moléculas se movem mais devagar quando a temperatura é menor. Como se trata de distribuições de probabilidade, a área sob as curvas é igual à unidade.

Como está mostrado na Fig. 19-8*a*, esta fração é igual à área de uma faixa de altura $P(v)$ e largura $dv$. A área total sob a curva da distribuição corresponde à fração das moléculas cujas velocidades estão entre zero e infinito. Como todas as moléculas estão nesta categoria, o valor desta área total é igual à unidade, ou seja,

$$\int_0^\infty P(v)\,dv = 1. \tag{19-28}$$

A fração (frac) de moléculas com velocidades no intervalo, digamos, de $v_1$ a $v_2$, é, portanto,

$$\text{frac} = \int_{v_1}^{v_2} P(v)\,dv. \tag{19-29}$$

## Velocidade Média, Velocidade Média Quadrática e Velocidade Mais Provável

Em princípio, podemos determinar a **velocidade média** $v_{méd}$ das moléculas de um gás da seguinte forma: em primeiro lugar, *ponderamos* cada valor de $v$ na distribuição, ou seja, multiplicamos $v$ pela fração $P(v)dv$ de moléculas cujas velocidades estão em um intervalo infinitesimal $dv$ no entorno de $v$; em seguida, somamos todos esses valores de $v\,P(v)dv$. O resultado é $v_{méd}$. Na prática, isso equivale a calcular

$$v_{méd} = \int_0^\infty v\,P(v)\,dv. \tag{19-30}$$

Substituindo $P(v)$ pelo seu valor, dado pela Eq. 19-27, e usando a integral 20 da lista de integrais do Apêndice E, obtemos

$$v_{méd} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad \text{(velocidade média)}. \tag{19-31}$$

Analogamente, a média dos quadrados das velocidades, $(v^2)_{méd}$, pode ser calculada usando a equação

$$(v^2)_{méd} = \int_0^\infty v^2\,P(v)\,dv. \tag{19-32}$$

Substituindo $P(v)$ por seu valor, dado pela Eq. 19-27, e usando a integral 16 da lista de integrais do Apêndice E, obtemos

$$(v^2)_{méd} = \frac{3RT}{M}. \tag{19-33}$$

A raiz quadrada de $(v^2)_{méd}$ é a velocidade média quadrática $v_{rms}$. Assim,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(velocidade média quadrática)}, \tag{19-34}$$

o que está de acordo com a Eq. 19-22.

A **velocidade mais provável** $v_P$ é a velocidade para a qual $P(v)$ é máxima (veja a Fig. 19-8*a*). Para calcular $v_P$, fazemos $dP/dv = 0$ (a inclinação da curva na Fig. 19-8*a* é zero no ponto em que a curva passa pelo máximo) e explicitamos $v$. Fazendo isso, obtemos

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(velocidade mais provável)}. \tag{19-35}$$

É mais provável que uma molécula tenha uma velocidade $v_P$ do que qualquer outra velocidade, mas algumas moléculas têm velocidades muito maiores que $v_P$. Essas moléculas estão na *cauda de altas velocidades* de uma curva de distribuição como a da Fig. 19-8*a*. Devemos ser gratos por essas poucas moléculas de alta velocidade, já que são elas que tornam possível a chuva e a luz solar (sem as quais não existiríamos). Vejamos por quê.

***Chuva*** A distribuição das moléculas de água, digamos, em um lago no verão pode ser representada por uma curva como a da Fig. 19-8*a*. A maioria das moléculas não possui energia cinética suficiente para escapar da superfície da água. Entretanto, algumas moléculas muito rápidas, com velocidades na cauda de altas velocidades da curva de distribuição, podem escapar. São essas moléculas de água que evaporam, tornando possível a existência das nuvens e da chuva.

Quando as moléculas de água muito rápidas deixam a superfície de um lago, levando energia com elas, a temperatura do lago não muda porque este recebe calor das vizinhanças. Outras moléculas velozes, produzidas através de colisões, ocupam rapidamente o lugar das moléculas que partiram, e a distribuição de velocidades permanece a mesma.

***Luz solar*** Suponha agora que a curva de distribuição da Fig. 19-8*a* se refira a prótons no centro do Sol. A energia do Sol se deve a um processo de fusão nuclear que começa com a união de dois prótons. Entretanto, os prótons se repelem porque possuem cargas elétricas de mesmo sinal, e prótons com a velocidade média não possuem energia cinética suficiente para vencer a repulsão e se aproximar o suficiente para que a fusão ocorra. Entretanto, prótons muito rápidos, na cauda de altas velocidades da curva de distribuição, podem se fundir, e é por isso que o Sol brilha.

## Exemplo 19-5

Um cilindro de oxigênio é mantido à temperatura ambiente (300 K). Qual é a fração das moléculas cuja velocidade está no intervalo de 599 a 601 m/s? A massa molar $M$ do oxigênio é 0,0320 kg/mol.

**IDÉIAS-CHAVE**

1. As velocidades das moléculas estão distribuídas em uma larga faixa de valores, com a distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27.
2. A fração de moléculas cuja velocidade está em um intervalo infinitesimal $dv$ é $P(v)dv$.
3. No caso de um intervalo finito, a fração pode ser determinada integrando $P(v)$ para o intervalo.
4. Entretanto, o intervalo $\Delta v = 2$ m/s do problema pode ser considerado muito pequeno em comparação com a velocidade $v = 600$ m/s no centro do intervalo.

***Cálculos:*** Como $\Delta v$ é pequeno, podemos evitar a integração usando para a fração o valor aproximado

$$\text{frac} = P(v)\,\Delta v = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}\,\Delta v.$$

O gráfico da função $P(v)$ aparece na Fig. 19-8*a*. A área total entre a curva e o eixo horizontal representa a fração total de moléculas (igual à unidade). A área da faixa amarela sombreada representa a fração que queremos calcular.

Para determinar o valor de frac, escrevemos

$$\text{frac} = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v), \tag{19-36}$$

onde

$$A = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} = \left(\frac{0{,}0320\ \text{kg/mol}}{(2\pi)(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}\right)^{3/2}$$
$$= 2{,}92 \times 10^{-9}\ \text{s}^3/\text{m}^3$$

e $$B = -\frac{Mv^2}{2RT} = -\frac{(0{,}0320\ \text{kg/mol})(600\ \text{m/s})^2}{(2)(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}$$
$$= -2{,}31.$$

Substituindo $A$ e $B$ na Eq. 19-36, obtemos

$$\text{frac} = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v)$$
$$= (4\pi)(2{,}92 \times 10^{-9}\ \text{s}^3/\text{m}^3)(600\ \text{m/s})^2(e^{-2{,}31})(2\ \text{m/s})$$
$$= 2{,}62 \times 10^{-3}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, à temperatura ambiente, 0,262% das moléculas de oxigênio têm velocidades no pequeno intervalo de 599 a 601 m/s. Se a faixa amarela da Fig. 19-8*a* fosse desenhada na escala deste problema, a largura seria difícil de ver a olho nu.

## Exemplo 19-6

A massa molar $M$ do oxigênio é 0,0320 kg/mol.

(a) Qual é a velocidade média $v_{méd}$ das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente (300 K)?

**IDÉIA-CHAVE** Para calcular a velocidade média, devemos ponderar a velocidade $v$ com a função de distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27 e integrar a expressão resultante para todas as velocidades possíveis (ou seja, de 0 a $\infty$).

***Cálculo:*** Isso nos leva à Eq. 19-31, segundo a qual

$$v_{méd} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$
$$= \sqrt{\frac{8(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}{\pi(0{,}0320\ \text{kg/mol})}}$$
$$= 445\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está indicado na Fig. 19-8*a*.

(b) Qual é a velocidade média quadrática $v_{rms}$ a 300 K?

**IDÉIA-CHAVE** Para determinar $v_{rms}$ precisamos primeiro calcular $(v^2)_{méd}$ ponderando $v^2$ com a função de distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27 e integrando a expressão para todas as velocidades possíveis. Em seguida, calculamos a raiz quadrada do resultado.

***Cálculo:*** Isso nos leva à Eq. 19-34, segundo a qual

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$
$$= \sqrt{\frac{3(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}{0{,}0320\ \text{kg/mol}}}$$
$$= 483\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado, indicado na Fig. 19-8*a*, é maior que $v_{méd}$ porque as velocidades mais altas influenciam mais o resultado quando integramos os valores de $v^2$ do que quando integramos os valores de $v$.

(c) Qual é a velocidade mais provável $v_P$ a 300 K?

**IDÉIA-CHAVE** A velocidade $v_P$ corresponde ao máximo da função de distribuição $P(v)$, que obtemos fazendo $dP/dv = 0$ e explicitando $v$.

***Cálculo:*** Isso nos leva à Eq. 19-35, segundo a qual

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$
$$= \sqrt{\frac{2(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}{0{,}0320\ \text{kg/mol}}}$$
$$= 395\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está indicado na Fig. 19-8*a*.

## 19-8 | Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal

Nesta seção vamos obter, a partir de considerações a respeito do movimento das moléculas, uma expressão para a energia interna $E_{int}$ de um gás ideal. Em outras palavras, vamos obter uma expressão para a energia associada aos movimentos aleató-

rios dos átomos ou moléculas de um gás. Em seguida, usaremos essa expressão para calcular os calores específicos molares de um gás ideal.

## Energia Interna $E_{int}$

Vamos, inicialmente, supor que nosso gás ideal é um *gás monoatômico* (formado por átomos isolados e não por moléculas), como o hélio, o neônio e o argônio. Vamos supor também que a energia interna $E_{int}$ de nosso gás ideal é simplesmente a soma das energias cinéticas de translação dos átomos. (De acordo com a teoria quântica, átomos isolados não possuem energia cinética de rotação.)

A energia cinética de translação média de um átomo depende apenas da temperatura do gás, e é dada pela Eq. 19-24 ($K_{méd} = \frac{3}{2}kT$). Uma amostra de $n$ mols de um gás monoatômico contém $nN_A$ átomos. A energia interna $E_{int}$ da amostra é, portanto,

$$E_{int} = (nN_A)K_{méd} = (nN_A)(\tfrac{3}{2}kT). \qquad (19\text{-}37)$$

De acordo com a Eq. 19-7 ($k = R/N_A$), esta equação pode ser escrita na forma

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \quad \text{(gás ideal monoatômico)}. \qquad (19\text{-}38)$$

A energia interna $E_{int}$ de um gás ideal é função *apenas* da temperatura do gás; não depende de outras variáveis.

A partir da Eq. 19-38, podemos calcular o calor específico molar de um gás ideal. Na verdade, vamos deduzir duas expressões, uma para o caso em que o volume do gás permanece constante e outra para o caso em que a pressão permanece constante. Os símbolos usados para esses dois calores específicos molares são $C_V$ e $C_P$, respectivamente. (Por tradição, a letra $C$ maiúscula é usada em ambos os casos, embora $C_V$ e $C_P$ sejam tipos de calor específico e não de capacidade térmica.)

## Calor Específico Molar a Volume Constante

A Fig. 19-9*a* mostra $n$ mols de um gás ideal a uma pressão $p$ e a uma temperatura $T$, confinados em um cilindro de volume $V$ fixo. Este *estado inicial i* do gás está assinalado no diagrama $p$-$V$ da Fig. 19-9*b*. Suponha que adicionamos uma pequena quantidade de energia $Q$ ao gás na forma de calor, aumentando lentamente a temperatura do recipiente. A temperatura do gás aumenta para $T + \Delta T$ e a pressão aumenta para $p + \Delta p$, levando o gás ao *estado final f*. Nesse tipo de experimento observamos que o calor $Q$ está relacionado à variação de temperatura $\Delta T$ através da equação

$$Q = nC_V\,\Delta T \quad \text{(volume constante)}, \qquad (19\text{-}39)$$

onde $C_V$ é uma constante chamada **calor específico molar a volume constante**. Substituindo esta expressão de $Q$ na primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. 18-26 ($\Delta E_{int} = Q - W$), obtemos

$$\Delta E_{int} = nC_V\Delta T - W. \qquad (19\text{-}40)$$

Como o volume do recipiente é constante, o gás não pode se expandir e, portanto, não pode realizar trabalho. Assim, $W = 0$ e a Eq. 19-40 nos fornece

$$C_V = \frac{\Delta E_{int}}{n\,\Delta T}. \qquad (19\text{-}41)$$

De acordo com a Eq. 19-38, a variação da energia interna é

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T. \qquad (19\text{-}42)$$

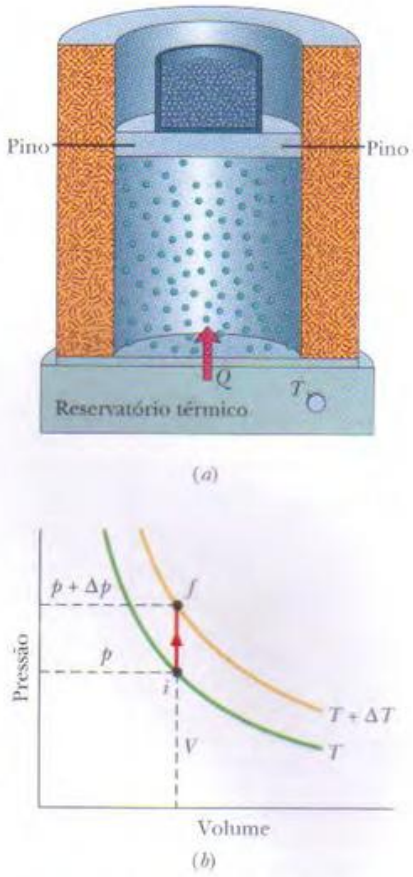



**FIG. 19-9** (*a*) A temperatura de um gás ideal é aumentada de $T$ para $T + \Delta T$ em um processo a volume constante. É adicionado calor, mas nenhum trabalho é realizado. (*b*) O processo em um diagrama $p$-$V$.

**TABELA 19-2**

**Calores Específicos Molares a Volume Constante**

| Molécula | Exemplo | | $C_V$ (J/mol · K) |
|---|---|---|---|
| Monoatômica | Ideal | | $\frac{3}{2}R = 12{,}5$ |
| | Real | He | 12,5 |
| | | Ar | 12,6 |
| Diatômica | Ideal | | $\frac{5}{2}R = 20{,}8$ |
| | Real | $N_2$ | 20,7 |
| | | $O_2$ | 20,8 |
| Poliatômica | Ideal | | $3R = 24{,}9$ |
| | Real | $NH_4$ | 29,0 |
| | | $CO_2$ | 29,7 |

Substituindo este resultado na Eq. 19-41, obtemos

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12{,}5\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gás monoatômico)}. \tag{19-43}$$

Como se pode ver na Tabela 19-2, esta previsão da teoria cinética (para gases ideais) concorda muito bem com os resultados experimentais para gases monoatômicos reais, o caso que estamos considerando. Os valores (teóricos e experimentais) de $C_V$ para *gases diatômicos* (com moléculas de dois átomos) e *gases poliatômicos* (com moléculas de mais de dois átomos) são maiores que para gases monoatômicos, por razões que serão mencionadas na Seção 19-9.

Podemos agora generalizar a Eq. 19-38 para a energia interna de qualquer gás ideal substituindo $3R/2$ por $C_V$ para obter

$$E_{\text{int}} = nC_VT \quad \text{(qualquer gás ideal)}. \tag{19-44}$$

Esta equação se aplica não só a um gás ideal monoatômico, mas também a gases diatômicos e poliatômicos, desde que seja usado o calor correto de $C_V$. Como na Eq. 19-38, a energia interna do gás depende da temperatura, mas não da pressão ou da densidade.

De acordo com a Eq. 19-41 ou a Eq. 19-44, quando um gás ideal confinado em um recipiente sofre uma variação de temperatura $\Delta T$, podemos escrever a variação resultante da energia interna na forma

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T \quad \text{(gás ideal, qualquer processo)}. \tag{19-45}$$

Esta equação nos diz o seguinte:

> Uma variação da energia interna $E_{\text{int}}$ de um gás ideal confinado depende apenas da variação de temperatura do gás; ela *não depende* do tipo de processo responsável pela variação de temperatura.

Considere, por exemplo, as três trajetórias entre as duas isotermas no diagrama $p$-$V$ da Fig. 19-10. A trajetória 1 representa um processo a volume constante. A trajetória 2 representa um processo a pressão constante (que vamos discutir em seguida). A trajetória 3 representa um processo no qual nenhum calor é trocado com o ambiente (este caso será discutido na Seção 19-11). Embora os valores do calor $Q$ e do trabalho $W$ associados a essas três trajetórias sejam diferentes, o que também acontece com $p_f$ e $V_f$, os valores de $\Delta E_{\text{int}}$ associados às três trajetórias são iguais e são dados pela Eq. 19-45, uma vez que envolvem a mesma variação de temperatura $\Delta T$. Assim, independentemente da trajetória seguida entre $T$ e $T + \Delta T$, podemos *sempre* usar a trajetória 1 e a Eq. 19-45 para calcular $\Delta E_{\text{int}}$ com mais facilidade.

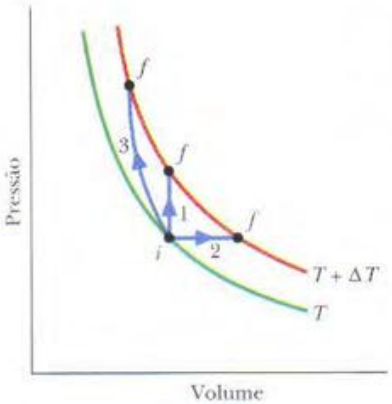



**FIG. 19-10** Três trajetórias representando três processos diferentes que levam um gás ideal de um estado inicial $i$, à temperatura $T$, a um estado final $f$, à temperatura $T + \Delta T$. A variação $\Delta E_{\text{int}}$ da energia interna do gás é a mesma para os três processos e para quaisquer outros que resultem na mesma variação de temperatura.

## Calor Específico Molar a Pressão Constante

Vamos supor agora que a temperatura de nosso gás ideal aumenta do mesmo valor $\Delta T$, mas agora a energia necessária (o calor $Q$) é fornecida mantendo o gás a uma pressão constante. Uma forma de fazer isso na prática é mostrada na Fig. 19-11*a*; o diagrama $p$-$V$ do processo aparece na Fig. 19-11*b*. A partir de experimentos como esse, constatamos que o calor $Q$ está relacionado à variação de temperatura $\Delta T$ através da equação

$$Q = nC_p\,\Delta T \quad \text{(pressão constante)}. \tag{19-46}$$

onde $C_p$ é uma constante chamada de **calor específico molar a pressão constante**. O valor de $C_p$ é sempre *maior* do que o do calor específico molar a volume constante $C_V$, já que, nesse caso, a energia é usada não só para aumentar a temperatura do gás, mas também para realizar trabalho (levantar o êmbolo da Fig. 19-11*a*).

Para obter uma relação entre os calores específicos molares $C_p$ e $C_V$, começamos com a primeira lei da termodinâmica (Eq. 18-26):

$$\Delta E_{int} = Q - W. \tag{19-47}$$

Em seguida, substituímos os termos da Eq. 19-47 por seus valores. O valor de $E_{int}$ é dado pela Eq. 19-45. O valor de $Q$ é dado pela Eq. 19-46. Para obter o valor de $W$ observamos que, como a pressão permanece constante, a Eq. 19-16 nos diz que $W = p\,\Delta V$. Assim, usando a equação dos gases ideais ($pV = nRT$), podemos escrever

$$W = p\,\Delta V = nR\,\Delta T. \tag{19-48}$$

Fazendo essas substituições na Eq. 19-47 e dividindo ambos os membros por $n\,\Delta T$, obtemos

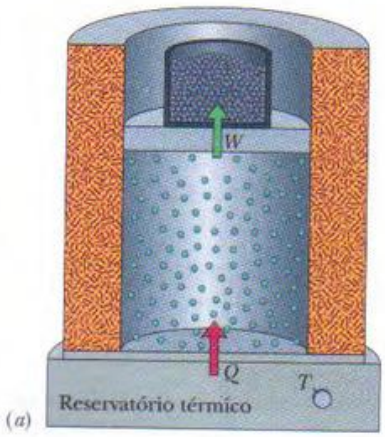
$$C_V = C_p - R$$

e, portanto,

$$C_p = C_V + R. \tag{19-49}$$

Esta previsão da teoria cinética dos gases está de acordo com os resultados experimentais, não só para gases monoatômicos mas para gases em geral, desde que estejam suficientemente rarefeitos para poderem ser tratados como ideais.

O lado esquerdo da Fig. 19-12 mostra os valores relativos de $Q$ para um gás monoatômico submetido a um aquecimento a volume constante ($Q = \frac{3}{2} nR\,\Delta T$) e a pressão constante ($Q = \frac{5}{2} nR\,\Delta T$). Observe que, no segundo caso, o valor de $Q$ é maior por causa de $W$, o trabalho realizado pelo gás durante a expansão. Observe também que no aquecimento a volume constante a energia fornecida em forma de calor é usada apenas para aumentar a energia interna, enquanto no aquecimento a pressão constante a energia fornecida em forma de calor é repartida entre a energia interna e o trabalho.



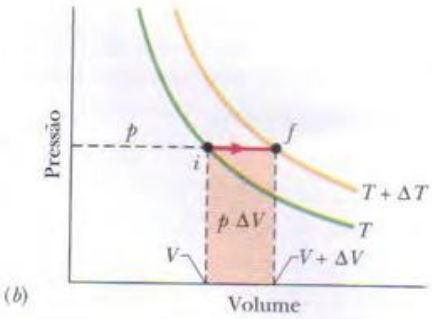
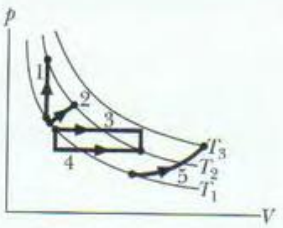




**FIG. 19-11** (*a*) A temperatura de um gás ideal é aumentada de $T$ para $T + \Delta T$ em um processo a pressão constante. É adicionado calor e é realizado trabalho para levantar o êmbolo. (*b*) O processo em um diagrama $p$-$V$. O trabalho $p\,\Delta V$ é dado pela área sombreada.

**TESTE 4** A figura mostra cinco trajetórias de um gás em um diagrama $p$-$V$. Ordene as trajetórias de acordo com a variação da energia interna do gás, em ordem decrescente.



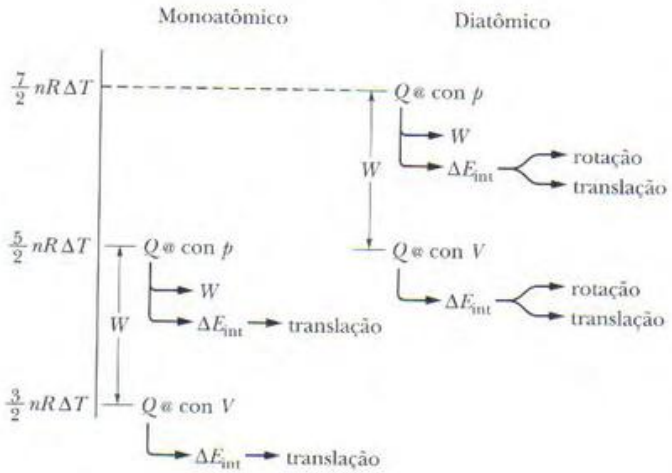




**FIG. 19-12** Valores relativos de $Q$ para um gás monoatômico (lado esquerdo) e para um gás diatômico (lado direito) submetido a um processo a pressão constante ("con $p$") ou a volume constante ("con $V$"). A transformação de energia em trabalho $W$ e energia interna $\Delta E_{int}$ é indicada esquematicamente.

**Exemplo 19-7 Aumente sua capacidade**

Uma bolha de 5,00 mols de hélio está submersa em água a uma certa profundidade quando a água (e, portanto, o hélio) sofre um aumento de temperatura $\Delta T$ de 20,0 C° a pressão constante. Em conseqüência, a bolha se expande. O hélio é monoatômico e se comporta como um gás ideal.

(a) Qual é a energia recebida pelo hélio na forma de calor durante esse aumento de temperatura?

**IDÉIA-CHAVE** A quantidade de calor $Q$ está relacionada à variação de temperatura $\Delta T$ através do calor específico molar do gás.

***Cálculos:*** Como a pressão $p$ é mantida constante durante o processo de aquecimento, devemos usar o calor específico molar a pressão constante $C_P$ e a Eq. 19-46,

$$Q = nC_p \Delta T, \qquad (19\text{-}50)$$

para determinar $Q$. Para calcular $C_P$ usamos a Eq. 19-49, segundo a qual para qualquer gás ideal $C_P = C_V + R$. Além disso, de acordo com a Eq. 19-43, para qualquer gás *monoatômico* (como o hélio, neste caso) $C_V = \frac{3}{2}R$. Assim, a Eq. 19-50 nos dá

$$Q = n(C_V + R)\Delta T = n(\tfrac{3}{2}R + R)\Delta T = n(\tfrac{5}{2}R)\Delta T$$
$$= (5{,}00 \text{ mol})(2{,}5)(8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(20{,}0 \text{ C°})$$
$$= 2077{,}5 \text{ J} \approx 2080 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do hélio durante o aumento de temperatura?

**IDÉIA-CHAVE** Como a bolha se expande, este não é um processo a volume constante. Entretanto, o hélio está confinado (à bolha). Assim, a variação $\Delta E_{int}$ é a mesma que *ocorreria* em um processo a volume constante com a mesma variação de temperatura $\Delta T$.

***Cálculo:*** Podemos encontrar facilmente a variação $\Delta E_{int}$ a volume constante usando a Eq. 19-45:

$$\Delta E_{int} = nC_V \Delta T = n(\tfrac{3}{2}R)\Delta T$$
$$= (5{,}00 \text{ mol})(1{,}5)(8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(20{,}0 \text{ C°})$$
$$= 1246{,}5 \text{ J} \approx 1250 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é o trabalho $W$ realizado pelo hélio ao se expandir contra a pressão da água ao redor durante o aumento de temperatura?

**IDÉIAS-CHAVE** O trabalho realizado por *qualquer* gás que se expande contra a pressão do ambiente é dado pela Eq. 19-11, segundo a qual devemos integrar o produto $p\,dV$. Quando a pressão é constante (como neste caso), a equação pode ser simplificada para $W = p\,\Delta V$. Quando o gás é *ideal* (como neste caso), podemos usar a lei dos gases ideais (Eq. 19-5) para escrever $p\,\Delta V = nR\,\Delta T$.

***Cálculo:*** O resultado é

$$W = nR\Delta T$$
$$= (5{,}00 \text{ mol})(8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(20{,}0 \text{ C°})$$
$$= 831 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

***Outra solução:*** Como já conhecemos $Q$ e $\Delta E_{int}$, podemos resolver este problema de outra forma. A idéia é aplicar a primeira lei da termodinâmica à variação de energia do gás, escrevendo

$$W = Q - \Delta E_{int} = 2077{,}5 \text{ J} - 1246{,}5 \text{ J}$$
$$= 831 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

***As transferências de energia:*** Vamos acompanhar as transferências de energia. Dos 2077,5 J transferidos ao hélio como calor $Q$, 831 J são usados para realizar o trabalho $W$ envolvido na expansão e 1246,5 J para aumentar a energia interna $E_{int}$, que, para um gás monoatômico, envolve apenas a energia cinética dos átomos em seus movimentos de translação. Esses vários resultados estão indicados no lado esquerdo da Fig. 19-12.

## 19-9 | Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares

Como mostra a Tabela 19-2, a previsão de que $C_V = \frac{3}{2}R$ é confirmada pelos resultados experimentais no caso dos gases monoatômicos, mas não no caso dos gases diatômicos e poliatômicos. Vamos tentar explicar a diferença considerando a possibilidade de que a energia interna das moléculas com mais de um átomo exista em outras formas além da energia cinética de translação.

A Fig. 19-13 mostra as configurações do hélio (uma molécula *monoatômica*, com um único átomo), do oxigênio (uma molécula *diatômica*, com dois átomos) e do metano (uma molécula *poliatômica*). De acordo com esses modelos, os três tipos de molécula podem ter movimentos de translação (movendo-se, por exemplo, para a esquerda e para a direita e para cima e para baixo) e movimentos de rotação (gi-

rando em torno de um eixo, como um pião). Além disso, as moléculas diatômicas e poliatômicas podem ter movimentos oscilatórios, com os átomos se aproximando e se afastando, como se estivessem presos a molas.

Para levar em conta todas as formas pelas quais a energia pode ser armazenada em um gás, James Clerk Maxwell propôs o teorema da **equipartição da energia**:

> Toda molécula tem um certo número $f$ de *graus de liberdade*, que são formas independentes pelas quais a molécula pode armazenar energia. A cada grau de liberdade está associada (em média) uma energia de $\frac{1}{2}kT$ por molécula (ou $\frac{1}{2}RT$ por mol).

Vamos aplicar o teorema aos movimentos de translação e rotação das moléculas da Fig. 19-13. (Os movimentos oscilatórios serão discutidos na próxima seção.) Para os movimentos de translação, referimos as posições das moléculas do gás a um sistema de coordenadas $xyz$. Em geral as moléculas possuem componentes da velocidade em relação aos três eixos. Isso significa que as moléculas de gases de todos os tipos têm três graus de liberdade de translação (três formas independentes de se deslocar como um todo) e, em média, uma energia correspondente de $3(\frac{1}{2}kT)$ por molécula.

Para o movimento de rotação, imagine que a origem do sistema de coordenadas $xyz$ está no centro de cada molécula na Fig. 19-13. Em um gás, cada molécula deveria poder girar com uma componente da velocidade angular em relação a cada um dos três eixos, de modo que cada gás deveria possuir ter três graus de liberdade de rotação e, em média, uma energia adicional de $3(\frac{1}{2}kT)$ por molécula. *Entretanto*, os experimentos mostram que isso é verdade apenas para moléculas poliatômicas. De acordo com a *teoria quântica*, a física que lida com movimentos e energias permitidos de átomos e moléculas, uma molécula de um gás monoatômico não gira e, portanto, não possui energia de rotação (um átomo isolado não pode girar como um pião). Uma molécula diatômica pode girar como um pião em torno de eixos perpendiculares à reta que liga os dois átomos (esses eixos são mostrados na Fig. 19-13*b*), mas não em torno da reta que liga os dois átomos. Assim, uma molécula diatômica tem apenas dois graus de liberdade de rotação e uma energia rotacional de apenas $2(\frac{1}{2}kT)$ por molécula.

Para estender nossa análise de calores específicos molares ($C_P$ e $C_V$, na Seção 19-8) a gases ideais diatômicos e poliatômicos, é necessário substituir a Eq. 19-38 ($E_{int} = \frac{3}{2}nRT$) por $E_{int} = (f/2)nRT$, onde $f$ é o número de graus de liberdade indicado na Tabela 19-3. Fazendo isso, obtemos a equação

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4{,}16f \text{ J/mol} \cdot \text{K}, \qquad (19\text{-}51)$$

que se reduz (como seria de se esperar) à Eq. 19-43 no caso de gases monoatômicos ($f = 3$). Como mostra a Tabela 19-2, os valores obtidos usando esta equação também estão de acordo com os resultados experimentais no caso de gases diatômicos ($f = 5$), mas são menores que os valores experimentais no caso de gases poliatômicos ($f = 6$).

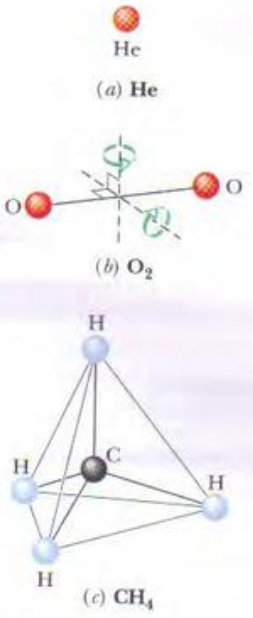



*FIG. 19-13* *Modelos de moléculas* usados na teoria cinética dos gases: (*a*) hélio, uma molécula monoatômica típica; (*b*) oxigênio, uma molécula diatômica típica; (*c*) metano, uma molécula poliatômica típica. As esferas representam átomos, e os segmentos de reta representam ligações químicas. Dois eixos de rotação são mostrados para a molécula de oxigênio.

**TABELA 19-3**

**Graus de Liberdade de Várias Moléculas**

| Molécula | Exemplo | Graus de Liberdade | | | Calor Específico Molar | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | De translação | De rotação | Total ($f$) | $C_V$ (Eq. 19-51) | $C_P = C_V + R$ |
| Monoatômica | He | 3 | 0 | 3 | $\frac{3}{2}R$ | $\frac{5}{2}R$ |
| Diatômica | $O_2$ | 3 | 2 | 5 | $\frac{5}{2}R$ | $\frac{7}{2}R$ |
| Poliatômica | $CH_4$ | 3 | 3 | 6 | $3R$ | $4R$ |

## Exemplo 19-8 Aumente sua capacidade

Transferimos 1000 J para um gás diatômico, permitindo que se expanda com a pressão mantida constante. As moléculas do gás podem girar, mas não oscilam. Que parte dos 1000 J é convertida em energia interna do gás? Dessa parte, que parcela corresponde a $\Delta K_{tran}$ (energia cinética associada ao movimento de translação das moléculas) e que parcela corresponde a $\Delta K_{rot}$ (energia cinética associada ao movimento de rotação)?

**IDÉIAS-CHAVE**

1. A transferência de energia na forma de calor a um gás a pressão constante está relacionada ao aumento de temperatura resultante através da Eq. 19-46 ($Q = nC_p\Delta T$).
2. De acordo com a Fig. 19-12 e a Tabela 19-3, como o gás é diatômico e as moléculas não oscilam, $C_P = \frac{7}{2}R$.
3. O aumento $\Delta E_{int}$ da energia interna é o mesmo que ocorreria em um processo a volume constante que resultasse no mesmo aumento de temperatura $\Delta T$. Assim, de acordo com a Eq. 19-45, $\Delta E_{int} = nC_V\Delta T$. De acordo com a Fig. 19-12 e a Tabela 19-3, $C_V = \frac{5}{2}R$.
4. Para os mesmos valores de $n$ e $\Delta T$, $\Delta E_{int}$ é maior para um gás diatômico que para um gás monoatômico porque é necessária uma energia adicional para fazer os átomos girarem.

***Aumento da energia interna:*** Vamos primeiro calcular a variação de temperatura $\Delta T$ devido à transferência de energia na forma de calor. De acordo com a Eq. 19-46, com $C_P = \frac{7}{2}R$, temos:

$$\Delta T = \frac{Q}{\frac{7}{2}nR}. \qquad (19\text{-}52)$$

Em seguida, calculamos $\Delta E_{int}$ a partir da Eq. 19-45, usando o calor específico molar a volume constante $C_V(= \frac{5}{2}R)$ e o mesmo valor de $\Delta T$. Como se trata de um gás diatômico, vamos chamar essa variação de $\Delta E_{int,dia}$. De acordo com a Eq. 19-45, temos:

$$\Delta E_{int,dia} = nC_V\,\Delta T = n\tfrac{5}{2}R\left(\frac{Q}{\frac{7}{2}nR}\right) = \tfrac{5}{7}Q$$

$$= 0{,}71428Q = 714{,}3\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, cerca de 71% da energia transferida para o gás são convertidos em energia interna. O resto é convertido no trabalho necessário para aumentar o volume do gás.

***Aumento da energia cinética:*** Se aumentássemos a temperatura de um *gás monoatômico* (com o mesmo valor de $n$) do valor dado pela Eq. 19-52, a energia interna aumentaria de um valor menor, que vamos chamar de $\Delta E_{int,mon}$, porque não haveria rotações envolvidas. Para calcular esse valor menor ainda podemos usar a Eq. 19-45, mas agora devemos usar o valor de $C_V$ para um gás monoatômico ($C_V = \frac{3}{2}R$). Assim,

$$\Delta E_{int,mon} = n\tfrac{3}{2}R\,\Delta T.$$

Substituindo o valor de $\Delta T$ dado pela Eq. 19-52, obtemos

$$\Delta E_{int,mon} = n\tfrac{3}{2}R\left(\frac{Q}{n\frac{7}{2}R}\right) = \tfrac{3}{7}Q$$

$$= 0{,}42857Q = 428{,}6\text{ J}.$$

No caso de um gás monoatômico, toda esta energia está associada à energia cinética de translação dos átomos, que é a única energia cinética presente. O importante a notar é que no caso de um gás diatômico com os mesmos valores de $n$ e $\Delta T$, a mesma quantidade de energia é transferida para o movimento de translação das moléculas. O resto de $\Delta E_{int,dia}$ (ou seja, os 285,7 J restantes) vai para o movimento de rotação das moléculas. Assim, no caso do gás diatômico,

$$\Delta K_{trans} = 428{,}6\text{ J} \quad \text{e} \quad \Delta K_{rot} = 285{,}7\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## Exemplo 19-9

Uma sala de volume $V$ está cheia de ar (que vamos considerar um gás ideal diatômico) a uma temperatura $T_1$. Quando uma lareira é acesa, a temperatura do ar aumenta para $T_2$. Qual é a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do ar na sala?

**IDÉIAS-CHAVE** Quando a temperatura do ar aumenta a pressão $p$ do ar no interior da sala não muda, permanecendo igual à pressão do ar do lado de fora. Isso acontece porque como a sala não está hermeticamente fechada, o ar não está confinado. Quando a temperatura aumenta as moléculas de ar escapam por várias aberturas e, portanto, o número de mols $n$ de ar no interior da sala diminui. Assim, *não podemos* usar a Eq. 19-45 ($\Delta E_{int} = nC_V\Delta T$) para determinar $\Delta E_{int}$, pois para isso seria necessário que $n$ se mantivesse constante. Entretanto, *podemos* relacionar a energia interna $E_{int}$ em qualquer instante com $n$ e com a temperatura $T$ através da Eq. 19-34 ($E_{int} = nC_VT$).

***Cálculos:*** De acordo com a Eq. 19-44, temos:

$$\Delta E_{int} = \Delta(nC_VT) = C_V\,\Delta(nT).$$

Usando a Eq. 19-5 ($pV = nRT$), podemos substituir $nT$ por $pV/R$, obtendo

$$\Delta E_{int} = C_V\Delta\left(\frac{pV}{R}\right).$$

Como $p$, $V$ e $R$ são constantes, isso nos dá

$$\Delta E_{int} = 0, \qquad \text{(Resposta)}$$

embora a temperatura tenha variado.

Por que a sala é mais confortável a uma temperatura maior? Existem pelo menos dois fatores envolvidos: (1) Você troca radiação eletromagnética (radiação térmica) com as superfícies da sala, e (2) você troca energia com as moléculas de ar que colidem com o seu corpo. Quando a temperatura da sala aumenta, (1) a quantidade de radiação térmica emitida pelas superfícies e absorvida pelo seu corpo aumenta, e (2) a quantidade de energia que você ganha através de colisões de moléculas de ar com o seu corpo também aumenta.

## 19-10 | Efeitos Quânticos

Podemos melhorar a concordância da teoria cinética dos gases com os resultados experimentais incluindo as oscilações dos átomos nos gases de moléculas diatômicas ou poliatômicas. Assim, por exemplo, os dois átomos da molécula de $O_2$ da Fig. 19-13*b* podem oscilar se aproximando e se afastando um do outro, como se estivessem unidos por uma mola. Os experimentos mostram, porém, que essas oscilações ocorrem apenas em temperaturas elevadas, ou seja, o movimento oscilatório é "ligado" apenas quando a energia das moléculas do gás atinge valores relativamente altos. Os movimentos de rotação apresentam um comportamento semelhante, só que em temperaturas mais baixas.

A Fig. 19-14 ajuda a visualizar esse comportamento dos movimentos de rotação e oscilação. A razão $C_V/R$ do hidrogênio ($H_2$), um gás diatômico, está plotada em função da temperatura, com a temperatura em uma escala logarítmica para cobrir várias ordens de grandeza. Abaixo de 80 K, $C_V/R = 1{,}5$. Este resultado sugere que apenas os três graus de liberdade de translação do hidrogênio estão envolvidos no calor específico.

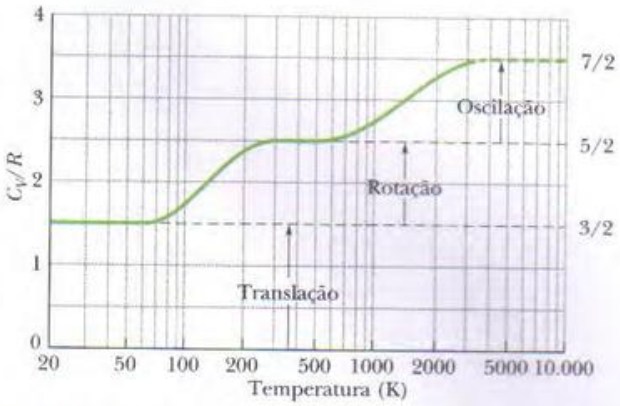



FIG. 19-14 Curva de $C_V/R$ em função da temperatura para o hidrogênio (um gás diatômico). Como existe uma energia mínima para as rotações e oscilações, apenas as translações são possíveis em temperaturas muito baixas. Quando a temperatura aumenta, começam as rotações. As oscilações começam em temperaturas ainda maiores.

Quando a temperatura aumenta o valor de $C_V/R$ aumenta gradualmente para 2,5, o que sugere que dois graus de liberdade adicionais estão envolvidos. A teoria quântica mostra que esses dois graus de liberdade estão associados ao movimento de rotação das moléculas do hidrogênio e que esse movimento requer uma certa quantidade mínima de energia. Em temperaturas muito baixas (abaixo de 80 K), as moléculas não têm energia suficiente para girar. Quando a temperatura passa de 80 K, primeiro umas poucas moléculas e depois mais e mais moléculas ganham energia suficiente para girar, e $C_V/R$ aumenta até que todas estejam girando e $C_V/R = 2{,}5$.

Analogamente, a teoria quântica mostra que o movimento oscilatório das moléculas requer uma certa quantidade mínima (maior) de energia. Essa quantidade mínima não é atingida até que as moléculas cheguem a uma temperatura por volta de 1000 K, como mostra a Fig. 19-14. Quando a temperatura passa de 1000 K, mais e mais moléculas têm energia suficiente para oscilar e $C_V/R$ aumenta até que todas estejam oscilando, e $C_V/R = 3{,}5$. (Na Fig. 19-14, a curva do gráfico é interrompida em 3200 K porque a essa temperatura os átomos de uma molécula de hidrogênio oscilam tanto que a ligação entre os átomos se rompe e a molécula se *dissocia*, dando origem a dois átomos independentes.)

## 19-11 | A Expansão Adiabática de um Gás Ideal

Vimos na Seção 17-4 que as ondas sonoras se propagam no ar e em outros gases como uma série de compressões e expansões; essas variações do meio de transmissão ocorrem tão depressa que não há tempo para que a energia seja transferida de um ponto do meio a outro em forma de calor. Como vimos na Seção 18-11, um processo para o qual $Q = 0$ é um *processo adiabático*. Podemos assegurar que $Q = 0$ executando o processo rapidamente (como no caso das ondas sonoras) ou execu-

tando-o (rapidamente ou não) em um recipiente bem isolado termicamente. Vamos ver o que a teoria cinética dos gases tem a dizer sobre os processos adiabáticos.

A Fig. 19-15*a* mostra nosso cilindro isolado de sempre, agora contendo um gás ideal e repousando em uma base isolante. Removendo parte da massa que está sobre o êmbolo, podemos permitir que o gás se expanda adiabaticamente. Quando o volume aumenta, tanto a pressão como a temperatura diminuem. Provaremos a seguir que a relação entre a pressão e a temperatura durante um processo adiabático é dada por

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \qquad \text{(processo adiabático)}, \tag{19-53}$$

onde $\gamma = C_p/C_V$, a razão entre os calores específicos molares do gás. Em um diagrama $p$-$V$ como o da Fig. 19-15*b*, o processo ocorre ao longo de uma curva (chamada *adiabática*) cuja equação é $p = (\text{constante})/V^{\gamma}$. Como o gás passa de um estado inicial $i$ para um estado final $f$, podemos escrever a Eq. 19-53 como

$$p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \qquad \text{(processo adiabático)}. \tag{19-54}$$

Para escrever a equação de um processo adiabático em termos de $T$ e $V$ usamos a equação dos gases ideais ($pV = nRT$) para eliminar $p$ da Eq. 19-53, obtendo

$$\left(\frac{nRT}{V}\right)V^{\gamma} = \text{constante}.$$

Como $n$ e $R$ são constantes, podemos escrever esta equação na forma

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \qquad \text{(processo adiabático)}, \tag{19-55}$$

onde a constante é diferente da que aparece na Eq. 19-53. Quando o gás passa de um estado inicial $i$ para um estado final $f$, podemos escrever a Eq. 19-55 na forma

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad \text{(processo adiabático)}. \tag{19-56}$$

O estudo dos processos adiabáticos permite explicar a formação de uma névoa (como na fotografia de abertura deste capítulo) quando uma garrafa de champanha ou outra bebida com gás é aberta. Na parte superior do recipiente de qualquer bebida gasosa existe uma mistura de dióxido de carbono e vapor d'água. Como a pressão do gás é maior que a pressão atmosférica, o gás se expande para fora do recipiente quando este é aberto. Assim, o volume do gás aumenta, mas isso significa que o gás deve realizar trabalho contra a atmosfera. Como a expansão é rápida, ela é adiabática, e a única fonte de energia para o trabalho é a energia interna do gás. Como a energia interna diminui, a temperatura do gás também decresce, o que faz o vapor d'água presente no gás se condensar em gotículas. (Observe que, de acordo com a Eq. 19-56, a temperatura diminui em qualquer expansão adiabática: $V_f$ é maior que $V_i$, portanto $T_f$ deve ser menor que $T_i$.)

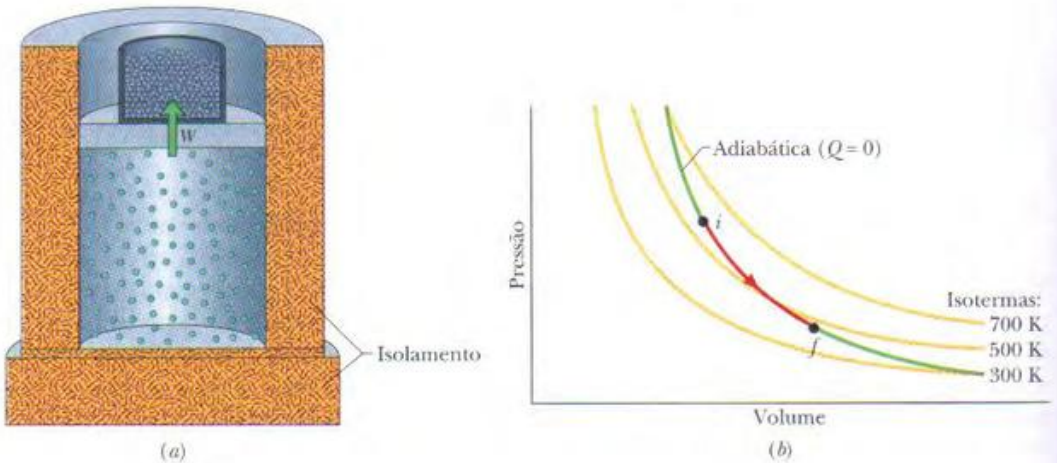



FIG. 19-15 (*a*) O volume de um gás ideal é aumentado reduzindo o peso aplicado ao êmbolo. O processo é adiabático ($Q = 0$). (*b*) O processo se desenvolve de $i$ para $f$ ao longo de uma adiabática do diagrama $p$-$V$.

## Demonstração da Eq. 19-53

Suponha que você remova algumas esferas do êmbolo da Fig. 19-15*a*, permitindo que o gás ideal empurre para cima o êmbolo e as esferas restantes e, assim, aumente seu volume de um valor infinitesimal $dV$. Como a variação de volume é pequena, podemos supor que a pressão $p$ do gás sobre o êmbolo permanece constante durante a variação. Esta suposição permite dizer que o trabalho $dW$ realizado pelo gás durante o aumento de volume é igual a $pdV$. De acordo com a Eq. 18-27, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma

$$dE_{\text{int}} = Q - p\,dV. \tag{19-57}$$

Como o gás está termicamente isolado (e, portanto, a expansão é adiabática), podemos fazer $Q = 0$. De acordo com a Eq. 19-45, podemos também substituir $dE_{\text{int}}$ por $nC_V\,dT$. Com essas substituições e após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$n\,dT = -\left(\frac{p}{C_V}\right)dV. \tag{19-58}$$

De acordo com a lei dos gases ideais ($pV = nRT$), temos:

$$p\,dV + V\,dp = nR\,dT. \tag{19-59}$$

Substituindo $R$ por $C_P - C_V$ na Eq. 19-59, obtemos

$$n\,dT = \frac{p\,dV + V\,dp}{C_p - C_V}. \tag{19-60}$$

Igualando as Eqs. 19-58 e 19-60 e reagrupando os termos, temos:

$$\frac{dp}{p} + \left(\frac{C_p}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = 0.$$

Substituindo a razão entre os calores específicos molares por $\gamma$ e integrando (veja a integral 5 do Apêndice E), obtemos

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{constante}.$$

Escrevendo o lado esquerdo como $\ln pV^\gamma$ e tomando o antilogaritmo de ambos os membros, obtemos

$$pV^\gamma = \text{constante}. \tag{19-61}$$

## Expansões Livres

Como vimos na Seção 18-11, uma expansão livre de um gás é um processo adiabático que não envolve trabalho realizado pelo gás ou sobre o gás, nem variação da energia interna do gás. Uma expansão livre é, portanto, muito diferente do tipo de processo adiabático descrito pelas Eqs. 19-53 a 19-61, em que há trabalho realizado e a energia interna varia. Essas equações, portanto, *não* se aplicam a uma expansão livre, embora essa expansão seja adiabática.

Lembre-se também de que, em uma expansão livre, o gás está em equilíbrio apenas nos pontos inicial e final; assim, podemos plotar apenas esses pontos, mas não a expansão propriamente dita, em um diagrama $p$-$V$. Além disso, como $\Delta E_{\text{int}} = 0$, a temperatura do estado final deve ser a mesma do estado inicial. Assim, os pontos inicial e final em um diagrama $p$-$V$ devem estar sobre a mesma isoterma, e em vez da Eq. 19-56, temos

$$T_i = T_f \qquad \text{(expansão livre)}. \tag{19-62}$$

Se supomos também que o gás é ideal (de modo que $pV = nRT$), como não há variação de temperatura o produto $pV$ não pode variar. Assim, em vez da Eq. 19-53, uma expansão livre envolve a relação

$$p_iV_i = p_fV_f \qquad \text{(expansão livre)}. \tag{19-63}$$

## Exemplo 19-10

No Exemplo 19-2, 1 mol de oxigênio (considerado um gás ideal) se expande isotermicamente (a 310 K) de um volume inicial de 12 L para um volume final de 19 L.

(a) Qual seria a temperatura final se o gás tivesse se expandido adiabaticamente até esse mesmo volume final? O oxigênio ($O_2$) é um gás diatômico e, nesse caso, possui rotação, mas não oscilação.

**IDÉIAS-CHAVE**

1. Ao se expandir contra a pressão do ambiente, um gás realiza trabalho.
2. Quando o processo é adiabático (não existe troca de calor com o ambiente), então a energia necessária para o trabalho provém da energia interna do gás.
3. Como a energia interna diminui, a temperatura $T$ também diminui.

***Cálculos:*** Podemos relacionar as temperaturas e volumes iniciais e finais usando a Eq. 19-56:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}. \qquad (19\text{-}64)$$

Como as moléculas são diatômicas e possuem rotação, mas não oscilação, podemos usar os calores específicos molares da Tabela 19-3. Assim,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1{,}40.$$

Explicitando $T_f$ e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$T_f = \frac{T_i V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(310\,\text{K})(12\,\text{L})^{1,40-1}}{(19\,\text{L})^{1,40-1}}$$

$$= (310\,\text{K})\left(\tfrac{12}{19}\right)^{0,40} = 258\,\text{K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais seriam a temperatura final e a pressão final se o gás tivesse se expandido livremente para o novo volume a partir de uma pressão de 2,0 Pa?

**IDÉIA-CHAVE** A temperatura não varia em uma expansão livre.

***Cálculo:*** Como a temperatura não varia,

$$T_f = T_i = 310\,\text{K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos calcular a nova pressão usando a Eq. 19-63, que nos dá

$$p_f = p_i \frac{V_i}{V_f} = (2{,}0\,\text{Pa})\frac{12\,\text{L}}{19\,\text{L}} = 1{,}3\,\text{Pa}. \qquad \text{(Resposta)}$$

## TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 2: Um Resumo Gráfico de Quatro Processos em Gases*** Neste capítulo discutimos quatro processos especiais aos quais um gás ideal pode ser submetido. Um exemplo de cada um desses processos (para um gás monoatômico ideal) é mostrado na Fig. 19-16, e algumas características associadas aparecem na Tabela 19-4, incluindo dois nomes de processos (isobárico e isocórico) que não são usados neste livro, mas que o leitor talvez encontre em outros textos.

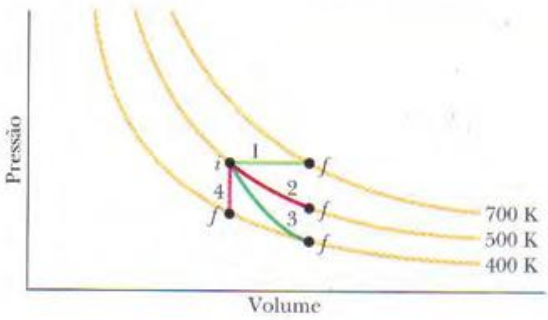



FIG. 19-16 Diagrama $p$-$V$ representando quatro processos especiais para um gás monoatômico ideal.

**TABELA 19-4**

**Quatro Processos Especiais**

| Trajetória na Fig. 19-16 | Grandeza Constante | Nome do Processo | Alguns Resultados Especiais ($\Delta E_{int} = Q - W$ e $\Delta E_{int} = nC_V\Delta T$ para todas as trajetórias) |
|---|---|---|---|
| 1 | $p$ | Isobárico | $Q = nC_p\Delta T; W = p\Delta V$ |
| 2 | $T$ | Isotérmico | $Q = W = nRT\ln(V_f/V_i); \Delta E_{int} = 0$ |
| 3 | $pV^\gamma$, $TV^{\gamma-1}$ | Adiabático | $Q = 0; \quad W = -\Delta E_{int}$ |
| 4 | $V$ | Isocórico | $Q = \Delta E_{int} = nC_V\Delta T; \quad W = 0$ |

**TESTE 5** Ordene as trajetórias 1, 2 e 3 da Fig. 19-16 de acordo com a quantidade de energia transferida para o gás na forma de calor, em ordem decrescente.

## REVISÃO E RESUMO

**Teoria Cinética dos Gases** A *teoria cinética dos gases* relaciona as propriedades *macroscópicas* dos gases (como, por exemplo, pressão e temperatura) às propriedades *microscópicas* das moléculas do gás (como, por exemplo, velocidade e energia cinética).

**Número de Avogadro** Um mol de uma substância contém $N_A$ (*número de Avogadro*) unidades elementares (em geral átomos ou moléculas), onde $N_A$ é uma constante física cujo valor experimental é

$$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \quad \text{(número de Avogadro)}. \tag{19-1}$$

A massa molar $M$ de uma substância é a massa de um mol da substância, e está relacionada à massa $m$ de uma molécula da substância através da equação

$$M = mN_A. \tag{19-4}$$

O número de mols $n$ em uma amostra de massa $M_{am}$, que contém $N$ moléculas, é dado por

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M_{am}}{M} = \frac{M_{am}}{mN_A}. \tag{19-2, 19-3}$$

**Gás Ideal** Um *gás ideal* é um gás para o qual a pressão $p$, o volume $V$ e a temperatura $T$ estão relacionados através da equação

$$pV = nRT \quad \text{(lei dos gases ideais)}. \tag{19-5}$$

onde $n$ é o número de mols do gás e $R$ é uma constante (8,31 J/mol · K) chamada **constante dos gases ideais**. A lei dos gases ideais também pode ser escrita na forma

$$pV = NkT, \tag{19-9}$$

onde $k$ é a **constante de Boltzmann**, dada por

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}. \tag{19-7}$$

**Trabalho em uma Variação de Volume Isotérmica** O trabalho realizado por um gás ideal durante uma variação **isotérmica** (a temperatura constante) de um volume $V_i$ para um volume $V_f$ é dado por

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico)}. \tag{19-14}$$

**Pressão, Temperatura e Velocidade Molecular** A pressão exercida por $n$ mols de um gás ideal, em termos da velocidade de suas moléculas, é dada por

$$p = \frac{nMv_{rms}^2}{3V}, \tag{19-21}$$

onde $v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{méd}}$ é a **velocidade média quadrática** das moléculas do gás. De acordo com a Eq. 19-5,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{19-22}$$

**Temperatura e Energia Cinética** A energia cinética de translação média $K_{méd}$ por molécula em um gás ideal é dada por

$$K_{méd} = \tfrac{3}{2}kT. \tag{19-24}$$

**Livre Caminho Médio** O *livre caminho médio* $\lambda$ de uma molécula em um gás é a distância média percorrida pela molécula entre duas colisões sucessivas, e é dado por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}, \tag{19-25}$$

onde $N/V$ é o número de moléculas por unidade de volume e $d$ é o diâmetro da molécula.

**Distribuição de Velocidades de Maxwell** A *distribuição de velocidades de Maxwell* $P(v)$ é uma função tal que $P(v)\,dv$ é a *fração* de moléculas com velocidades em um intervalo $dv$ no entorno da velocidade $v$:

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}. \tag{19-27}$$

Três medidas da distribuição de velocidades das moléculas de um gás são

$$v_{méd} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{(velocidade média)}. \tag{19-31}$$

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(velocidade mais provável)}. \tag{19-35}$$

e a velocidade média quadrática é definida pela Eq. 19-22.

**Calores Específicos Molares** O calor específico molar $C_V$ de um gás a volume constante é definido como

$$C_V = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{\Delta E_{int}}{n\,\Delta T}, \tag{19-39, 19-41}$$

onde $Q$ é o calor cedido ou absorvido por uma amostra de $n$ mols de um gás, $\Delta T$ é a variação de temperatura resultante e $\Delta E_{int}$ é a variação de energia interna. Para um gás ideal monoatômico,

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12{,}5\ \text{J/mol·K}. \tag{19-43}$$

O calor específico molar $C_P$ de um gás a pressão constante é definido como

$$C_p = \frac{Q}{n\,\Delta T}, \tag{19-46}$$

onde $Q$, $n$ e $\Delta T$ têm as mesmas definições que para $C_V$. $C_P$ também é dado por

$$C_p = C_V + R. \tag{19-49}$$

Para $n$ mols de um gás ideal,

$$E_{int} = nC_VT \quad \text{(gás ideal)}. \tag{19-44}$$

Se $n$ mols de um gás ideal confinado sofrem uma variação de temperatura $\Delta T$ devido a *qualquer* processo, a variação da energia interna do gás é dada por

$$\Delta E_{int} = nC_V\,\Delta T \quad \text{(gás ideal, qualquer processo)}, \tag{19-45}$$

onde deve ser usado o valor apropriado de $C_V$, de acordo com o tipo de gás ideal.

**Graus de Liberdade e $C_V$** Podemos determinar $C_V$ usando o *teorema de equipartição da energia*, segundo o qual a cada *grau de liberdade* de uma molécula (ou seja, cada forma independente de armazenar energia) está associada (em média) uma energia de

$\frac{1}{2}kT$ por molécula ($=\frac{1}{2}RT$ por mol). Se $f$ é o número de graus de liberdade, $E_{int} = \frac{f}{2}nRT$ e

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4{,}16f \text{ J/mol·K}. \quad (19\text{-}51)$$

Para gases monoatômicos, $f = 3$ (três graus de liberdade de translação); para gases diatômicos, $f = 5$ (três graus de translação e dois de rotação).

**Processo Adiabático** Quando um gás ideal sofre uma lenta variação de volume adiabática (uma variação para a qual $Q = 0$), a pressão e o volume estão relacionados através da equação

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad \text{(processo adiabático)}. \quad (19\text{-}53)$$

onde $\gamma$ ($= C_P/C_V$) é a razão entre os calores específicos molares do gás. Para uma expansão livre, porém, $pV$ = constante.

## PERGUNTAS

**1** Para um aumento de temperatura $\Delta T_1$, uma certa quantidade de um gás ideal requer 30 J quando aquecido a volume constante e 50 J quando aquecido a pressão constante. Qual é o trabalho realizado pelo gás na segunda situação?

**2** O ponto na Fig. 19-17*a* representa o estado inicial de um gás, e a reta vertical que passa pelo ponto divide o diagrama *p-V* em regiões 1 e 2. Para os seguintes processos, determine se o trabalho *W* realizado pelo gás é positivo, negativo ou nulo: (a) o gás se move para cima ao longo da reta vertical, (b) o gás se move para baixo ao longo da linha vertical, (c) o gás se move para um ponto qualquer da região 1 e (d) o gás se move para um ponto qualquer da região 2.

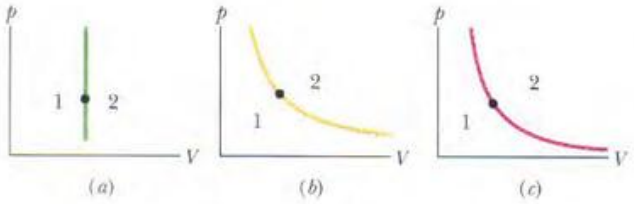



FIG. 19-17 Perguntas 2, 4 e 6.

**3** Para quatro situações de um gás ideal, a tabela mostra a energia $Q$ absorvida ou cedida pelo gás em forma de calor e o trabalho $W$ realizado pelo gás ou o trabalho $W_s$ realizado sobre o gás, todos em joules. Ordene as quatro situações em termos da variação de temperatura do gás, em ordem decrescente.

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| $Q$ | −50 | +35 | −15 | +20 |
| $W$ | −50 | +35 | | |
| $W_s$ | | | −40 | +40 |

**4** O ponto da Fig. 19-17*b* representa o estado inicial de um gás, e a isoterma que passa pelo ponto divide o diagrama *p-V* em duas regiões, 1 e 2. Para os processos a seguir, determine se a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás é positiva, negativa ou nula: (a) o gás se move para cima ao longo da isoterma, (b) o gás se move para baixo ao longo da isoterma, (c) o gás se move para qualquer ponto da região 1 e (d) o gás se move para qualquer ponto da região 2.

**5** Uma certa quantidade de calor deve ser transferida para 1 mol de um gás ideal monoatômico (a) a pressão constante e (b) a volume constante, e para 1 mol de um gás diatômico (c) a pressão constante e (d) a volume constante. A Fig. 19-18 mostra quatro trajetórias de um ponto inicial para um ponto final em um diagrama *p-V*. Que trajetória corresponde a que processo? (e) As moléculas do gás diatômico estão girando?

FIG. 19-18 Pergunta 5.

**6** O ponto da Fig. 19-17*c* representa o estado inicial de um gás, e a adiabática que passa pelo ponto divide o diagrama *p-V* nas regiões 1 e 2. Para os processos a seguir, determine se o calor $Q$ correspondente é positivo, negativo ou nulo: (a) o gás se move para cima ao longo da adiabática, (b) o gás se move para baixo ao longo da adiabática, (c) o gás de move para qualquer ponto da região 1 e (d) o gás se move para qualquer ponto da região 2.

**7** Um gás ideal diatômico, cujas moléculas estão girando, mas não oscilam, perde uma quantidade $Q$ de calor. A diminuição de energia interna do gás é maior se a perda acontece em um processo a volume constante ou em um processo a pressão constante?

**8** No diagrama *p-V* da Fig. 19-19, o gás realiza 5 J de trabalho quando percorre a isoterma *ab* e 4 J quando percorre a adiabática *bc*. Qual é a variação da energia interna do gás quando ele percorre a trajetória retilínea *ac*?

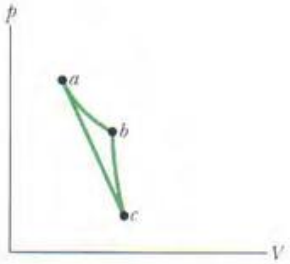



FIG. 19-19 Pergunta 8.

**9** (a) Ordene as quatro trajetórias da Fig. 19-16 de acordo com o trabalho realizado pelo gás, em ordem decrescente. (b) Ordene as trajetórias 1, 2 e 3 de acordo com a variação da energia interna do gás, da mais positiva para a mais negativa.

**10** A temperatura de um gás ideal aumenta, diminui ou permanece a mesma durante (a) uma expansão isotérmica, (b) uma expansão a pressão constante, (c) uma expansão adiabática e (d) um aumento de pressão a volume constante?

## PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

### seção 19-2 O Número de Avogadro

•1 O ouro tem uma massa molar de 197 g/mol. (a) Quantos mols de ouro existem em uma amostra de 2,50 g de ouro puro? (b) Quantos átomos existem na amostra?

•2 Determine a massa em quilogramas de $7,50 \times 10^{24}$ átomos de arsênico, que tem uma massa molar de 74,9 g/mol.

### seção 19-3 Gases Ideais

•3 O melhor vácuo produzido em laboratório tem uma pressão de aproximadamente $1,00 \times 10^{-18}$ atm, ou $1,01 \times 10^{-13}$ Pa. Quantas moléculas do gás existem por centímetro cúbico neste vácuo a 293 K?

•4 Calcule (a) o número de mols e (b) o número de moléculas em 1,00 $cm^3$ de um gás ideal a uma pressão de 100 Pa e a uma temperatura de 220 K.

•5 Um pneu de automóvel tem um volume de $1,64 \times 10^{-2}$ $m^3$ e contém ar à pressão manométrica (pressão acima da pressão atmosférica) de 165 kPa quando a temperatura é 0,00°C. Qual é a pressão manométrica do ar no pneu quando a temperatura aumenta para 27,0°C e o volume aumentar para $1,67 \times 10^{-2}$ $m^3$? Suponha que a pressão atmosférica é $1,01 \times 10^5$ Pa.

•6 Uma certa quantidade de um gás ideal a 10,0°C e 100 kPa ocupa um volume de 2,50 $m^3$. (a) Quantos mols do gás estão presentes? (b) Se a pressão é aumentada para 300 kPa e a temperatura é aumentada para 30,0°C, que volume o gás passa a ocupar? Suponha que não há vazamentos.

•7 Uma amostra de oxigênio com um volume de 1000 $cm^3$ a 40,0°C e $1,01 \times 10^5$ Pa se expande até um volume de 1500 $cm^3$ a uma pressão de $1,06 \times 10^5$ Pa. Determine (a) o número de mols de oxigênio presentes na amostra e (b) a temperatura final da amostra.

•8 Um recipiente contém 2 mols de um gás ideal que tem uma massa molar $M_1$ e 0,5 mol de um segundo gás ideal que tem uma massa molar $M_2 = 3M_1$. Que fração da pressão total sobre a parede do recipiente se deve ao segundo gás? (A explicação da teoria cinética dos gases para a pressão leva à lei das pressões parciais para uma mistura de gases que não reagem quimicamente, descoberta experimentalmente: A *pressão total exercida por uma mistura de gases é igual à soma das pressões que os gases exerceriam se cada um ocupasse sozinho o volume do recipiente.*)

•9 Suponha que 1,80 mol de um gás ideal é levado de um volume de 3,00 $m^3$ para um volume de 1,50 $m^3$ através de uma compressão isotérmica a 30°C. (a) Qual é o calor transferido durante a compressão e (b) o calor é absorvido ou cedido pelo gás?

•10 *Garrafa de água em um carro quente.* Nos dias de calor a temperatura em um carro fechado estacionado no sol pode ser suficiente para provocar queimaduras. Suponha que uma garrafa de água removida de uma geladeira à temperatura de 5,00°C seja aberta, fechada novamente e deixada em um carro fechado com uma temperatura interna de 75,0°C. Desprezando a dilatação térmica da água e da garrafa, determine a pressão do ar contido no interior da garrafa. (A pressão pode ser suficiente para arrancar uma tampa rosqueada.)

••11 Suponha que 0,825 mol de um gás ideal sofre uma expansão isotérmica quando uma energia $Q$ é acrescentada ao gás na forma de calor. Se a Fig. 19-20 mostra o volume final $V_f$ em função de $Q$, qual é a temperatura do gás? A escala do eixo vertical é definida por $V_{fs} = 0,30$ $m^3$ e a escala do eixo horizontal é definida por $Q_s = 1200$ J.

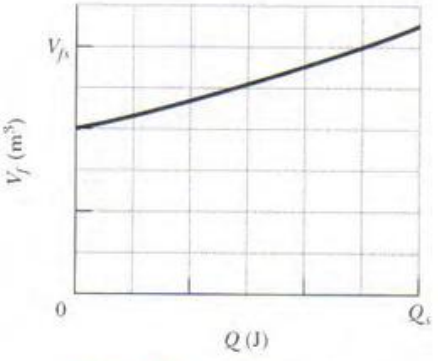



FIG. 19-20 Problema 11.

••12 No intervalo de temperaturas de 310 K a 330 K, a pressão $p$ de um certo gás não ideal está relacionada ao volume $V$ e à temperatura $T$ através da equação

$$p = (24,9 \text{ J/K})\frac{T}{V} - (0,00662 \text{ J/K}^2)\frac{T^2}{V}.$$

Qual é o trabalho realizado pelo gás se a temperatura aumenta de 315 K para 325 K enquanto a pressão permanece constante?

••13 O ar que inicialmente ocupa 0,140 $m^3$ à pressão manométrica de 103,0 kPa se expande isotermicamente para uma pressão de 101,3 kPa e em seguida é resfriado a pressão constante até atingir o volume inicial. Calcule o trabalho realizado pelo ar. (Pressão manométrica é a diferença entre a pressão real e a pressão atmosférica.)

••14 *Salvamento no fundo do mar.* Quando o submarino americano *Squalus* enguiçou a 80 m de profundidade, uma câmara cilíndrica foi usada para resgatar a tripulação. A câmara tinha um raio de 1,00 m e uma altura de 4,00 m, era aberta do fundo e levava dois operadores. Foi baixada ao longo de um cabo-guia que um mergulhador havia fixado ao submarino. Depois que a câmara completou a descida e foi presa a uma escotilha do submarino, a tripulação pôde passar para a câmara. Durante a descida, os operadores liberaram ar de tanques para que a câmara não fosse inundada. Suponha que a pressão do ar no interior da câmara era igual à pressão da água à profundidade $h$, dada por $p_0 + \rho gh$, onde $p_0 = 1,000$ atm na superfície e $\rho = 1024$ kg/$m^3$ é a massa específica da água do mar. Suponha uma temperatura constante de 20,0°C na superfície e uma temperatura da água de 3,0°C na profundidade do submarino. (a) Qual era o volume de ar na câmara na superfície? (b) Se não tivesse sido liberado ar de tanques, qual seria o volume do ar na câmara à profundidade $h$ = 80,0 m? (c) Quantos mols adicionais de ar foram necessários para manter o volume inicial de ar na câmara?

••15 Uma amostra de um gás ideal é submetida ao processo cíclico *abca* mostrado na Fig. 19-21. A escala do eixo vertical é definida por $p_b = 7{,}5$ kPa e $p_{ac} = 2{,}5$ kPa. No ponto $a$, $T = 200$ K. (a) Quantos mols do gás estão presentes na amostra? Quais são (b) a temperatura do gás no ponto $b$, (c) a temperatura do gás no ponto $c$ e (d) a energia líquida adicionada ao gás em forma de calor durante o ciclo?

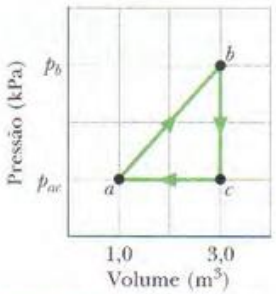



FIG. 19-21 Problema 15.

•••16 Uma bolha de ar com 20 cm³ de volume está no fundo de um lago de 40 m de profundidade, onde a temperatura é 4,0°C. A bolha sobe até a superfície, que está à temperatura de 20°C. Considere a temperatura da bolha como sendo a mesma da água em volta. Qual é o volume da bolha no momento em que chega à superfície?

•••17 O recipiente $A$ da Fig. 19-22 contém um gás ideal à pressão de $5{,}0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 300 K. Ele está ligado por um tubo fino (e uma válvula fechada) a um recipiente $B$, cujo volume é quatro vezes maior que o de $A$. O recipiente $B$ contém o mesmo gás ideal à pressão de $1{,}0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 400 K. A válvula é aberta para que as pressões se igualem, mas a temperatura de cada recipiente é mantida. Qual é a nova pressão nos dois recipientes?

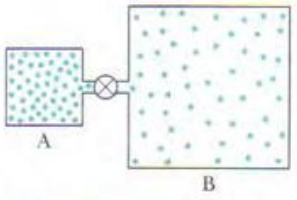



FIG. 19-22 Problema 17.

### seção 19-4 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática

•18 Calcule a velocidade média quadrática de átomos de hélio a 1000 K. A massa molar dos átomos de hélio é dada no Apêndice F.

•19 A menor temperatura possível no espaço sideral é 2,7 K. Qual é a velocidade média quadrática de moléculas de hidrogênio a esta temperatura? [A massa molar da molécula de hidrogênio ($H_2$) é dada na Tabela 19-1.]

•20 Determine a velocidade média quadrática de átomos de argônio a 313 K. A massa molar do argônio é dada no Apêndice F.

•21 (a) Calcule a velocidade média quadrática de uma molécula de nitrogênio a 20,0°C. A massa molar da molécula de nitrogênio ($N_2$) é dada na Tabela 19-1. A que temperatura a velocidade média quadrática é (b) metade desse valor e (c) o dobro desse valor?

•22 A temperatura e a pressão da atmosfera solar são $2{,}00 \times 10^6$ K e 0,0300 Pa. Calcule a velocidade média quadrática dos elétrons livres (de massa igual a $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) na superfície do Sol, supondo que se comportam como um gás ideal.

••23 Um feixe de moléculas de hidrogênio ($H_2$) está direcionado para uma parede, fazendo um ângulo de 55° com a normal à parede. As moléculas do feixe têm uma velocidade de 1,0 km/s e uma massa de $3{,}3 \times 10^{-24}$ g. O feixe atinge a parede em uma área de 2,0 cm², a uma taxa de $10^{23}$ moléculas por segundo. Qual é a pressão do feixe sobre a parede?

••24 A 273 K e $1{,}00 \times 10^{-2}$ atm, a massa específica de um gás é $1{,}24 \times 10^{-5}$ g/cm³. (a) Determine $v_{rms}$ para as moléculas do gás. (b) Determine a massa molar do gás e (c) identifique o gás. (*Sugestão:* O gás aparece na Tabela 19-1.)

### seção 19-5 Energia Cinética de Translação

•25 Determine o valor médio da energia cinética de translação das moléculas de um gás ideal a (a) 0,00°C e (b) 100°C. Qual é a energia cinética de translação média por mol de um gás ideal a (c) 0,00°C e (d) 100°C?

•26 Qual é a energia cinética translacional média das moléculas de nitrogênio a 1600 K?

••27 A água a céu aberto a 32°C evapora por causa do escape de algumas de suas moléculas da superfície. O calor de vaporização (539 cal/g) é aproximadamente igual a $\varepsilon n$, onde $\varepsilon$ é a energia média das moléculas que escapam e $n$ é o número de moléculas por grama. (a) Determine $\varepsilon$. (b) Qual é a razão entre $\varepsilon$ e a energia cinética média das moléculas de $H_2O$, supondo que esta última está relacionada à temperatura da mesma forma que nos gases?

### seção 19-6 Livre Caminho Médio

•28 O livre caminho médio das moléculas de nitrogênio a 0,0°C e 1,0 atm é $0{,}80 \times 10^{-5}$ cm. Nessas condições de temperatura e pressão existem $2{,}7 \times 10^{19}$ moléculas/cm³. Qual é o diâmetro das moléculas?

•29 A concentração de moléculas na atmosfera a uma altitude de 2500 km está em torno de 1 molécula/cm³. (a) Supondo que o diâmetro das moléculas é $2{,}0 \times 10^{-8}$ cm, determine o livre caminho médio previsto pela Eq. 19-25. (b) Explique se o valor previsto tem significado físico.

•30 Para que freqüência o comprimento de onda do som no ar é igual ao livre caminho médio das moléculas de oxigênio a uma pressão de 1,0 atm e 0,00°C? Tome o diâmetro de uma molécula de oxigênio como sendo $3{,}0 \times 10^{-8}$ cm.

••31 Em um certo acelerador de partículas, prótons se movem em uma trajetória circular de 23,0 m de diâmetro em uma câmara evacuada cujo gás residual está a 295 K e a uma pressão de $1{,}00 \times 10^{-6}$ torr. (a) Calcule o número de moléculas do gás por centímetro cúbico com esta pressão. (b) Qual é o livre caminho médio das moléculas do gás se o diâmetro das moléculas é $2{,}00 \times 10^{-8}$ cm?

••32 A 20°C e a uma pressão de 750 torr, os caminhos livres médios do argônio (Ar) e do nitrogênio ($N_2$) são $\lambda_{Ar} = 9{,}9 \times 10^{-6}$ cm e $\lambda_{N_2} = 27{,}5 \times 10^{-6}$ cm. (a) Determine a razão entre o diâmetro de um átomo de Ar e o de uma molécula de $N_2$. Qual é o livre caminho médio do argônio (b) a 20°C e 150 torr e (c) a −40°C e 750 torr?

### seção 19-7 A Distribuição de Velocidades das Moléculas

•33 Dez partículas estão se movendo com as seguintes velocidades: quatro a 200 m/s, duas a 500 m/s e quatro a 600 m/s. Calcule suas velocidades (a) média e (b) média quadrática. (c) $v_{rms}$ é maior que $v_{méd}$?

•34 As velocidades de 22 partículas são mostradas a seguir ($N_i$ representa o número de partículas que possuem velocidade $v_i$):

| $N_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_i$ (cm/s) | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |

Determine (a) $v_{méd}$, (b) $v_{rms}$ e (c) $v_P$.

•35 As velocidades de 10 moléculas são: 2,0; 3,0; 4,0; ...; 11 km/s. Determine (a) velocidade média e (b) a velocidade média quadrática das moléculas.

••36 A Fig. 19-23 mostra a distribuição de probabilidade da velocidade das moléculas de uma amostra de nitrogênio. A escala do eixo horizontal é definida por $v_s = 1200$ m/s. Determine (a) a temperatura do gás e (b) a velocidade média quadrática das moléculas.

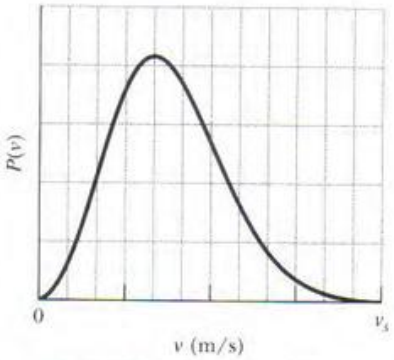


FIG. 19-23 Problema 36.

••37 A que temperatura a velocidade média quadrática (a) do $H_2$ (hidrogênio molecular) e (b) do $O_2$ (oxigênio molecular) é igual à velocidade de escape da Terra (Tabela 13-2)? A que temperatura a velocidade média quadrática (c) do $H_2$ e (d) do $O_2$ é igual à velocidade de escape da Lua (onde a aceleração da gravidade na superfície tem um módulo de 0,16g)? Considerando as respostas dos itens (a) e (b), deve existir muito (e) hidrogênio e (f) oxigênio na atmosfera superior da Terra, onde a temperatura é de cerca de 1000 K?

••38 Dois recipientes estão à mesma temperatura. O primeiro contém gás à pressão $p_1$, de massa molecular $m_1$ e velocidade média quadrática $v_{rms1}$. O segundo contém gás à pressão $2{,}0p_1$, de massa molecular $m_2$ e velocidade média $v_{méd2} = 2{,}0v_{rms1}$. Determine a razão $m_1/m_2$.

••39 Uma molécula de hidrogênio (diâmetro $1{,}0 \times 10^{-8}$ cm), movendo-se à velocidade média quadrática, escapa de um forno a 4000 K para uma câmara que contém átomos de argônio *frios* (diâmetro $3{,}0 \times 10^{-8}$ cm) em uma concentração de $4{,}0 \times 10^{19}$ átomos/cm$^3$. (a) Qual é a velocidade da molécula de hidrogênio? (b) Qual é a distância mínima entre os centros para que a molécula de hidrogênio colida com um átomo de argônio, supondo que ambos são esféricos? (c) Qual é o número inicial de colisões por segundo que a molécula de hidrogênio sofre? (*Sugestão:* Suponha que os átomos de argônio estão parados. Nesse caso, o livre caminho médio da molécula de hidrogênio é dado pela Eq. 19-26, e não pela Eq. 19-25.)

••40 A velocidade mais provável das moléculas de um gás quando ele está a uma temperatura (uniforme) $T_2$ é a mesma velocidade média quadrática das moléculas do gás quando ele está a uma temperatura (uniforme) $T_1$. Calcule a razão $T_2/T_1$.

••41 A Fig. 19-24 mostra uma distribuição de velocidades hipotética para uma amostra de um gás com $N$ partículas (note que $P(v) = 0$ para qualquer velocidade $v > 2v_0$). Quais são os valores de (a) $av_0$, (b) $v_{méd}/v_0$ e (c) $v_{rms}/v_0$? (d) Qual é a fração de partículas com velocidades entre $1{,}5v_0$ e $2{,}0v_0$?

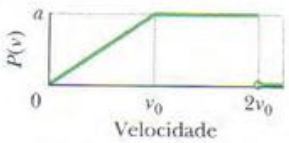


FIG. 19-24 Problema 41.

## seção 19-8 Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal

•42 Qual é a energia interna de 1,0 mol de um gás ideal monoatômico a 273 K?

••43 A temperatura de 2,00 mols de um gás ideal monoatômico é aumentada de 15,0 K a volume constante. Quais são (a) o trabalho $W$ realizado pelo gás, (b) a energia transferida como calor $Q$, (c) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás e (d) a variação $\Delta K$ da energia cinética média por átomo?

••44 A temperatura de 2,00 mol de um gás ideal monoatômico é aumentada de 15,0 K a pressão constante. Determine (a) o trabalho $W$ realizado pelo gás, (b) a energia $Q$ transferida para o gás na forma de calor, (c) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás e (d) a variação $\Delta K$ da energia cinética média por átomo.

••45 Um recipiente contém uma mistura de três gases não-reagentes: 2,40 mol do gás 1 com $C_{V1} = 12{,}0$ J/mol · K, 1,50 mol do gás 2 com $C_{V2} = 12{,}8$ J/mol · K e 3,20 mol do gás 3 com $C_{V3} = 20{,}0$ J/mol · K. Qual é o $C_V$ da mistura?

••46 Um mol de um gás ideal diatômico vai de $a$ a $c$ ao longo da trajetória diagonal na Fig. 19-25. A escala do eixo vertical é definida por $p_{ab} = 5{,}0$ kPa e $p_c = 2{,}0$ kPa, e a escala do eixo horizontal é definida por $V_{bc} = 4{,}0$ m$^3$ e $V_a = 2{,}0$ m$^3$. Durante a transição, (a) qual é a variação da energia interna do gás e (b) qual é a energia adicionada ao gás na forma de calor? (c) Que calor é necessário para que o gás vá de $a$ a $c$ ao longo da trajetória indireta $abc$?

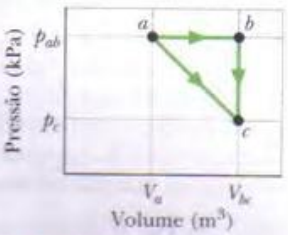


FIG. 19-25 Problema 46.

••47 A massa da molécula de um gás pode ser calculada a partir do seu calor específico a volume constante $c_V$. (Note que não se trata de $C_V$.) Tome $c_V = 0{,}075$ cal/g · C° para o argônio e calcule (a) a massa de um átomo de argônio e (b) a massa molar do argônio.

••48 Quando 20,9 J foram adicionados como calor a um certo gás ideal, o volume do gás variou de 50,0 cm$^3$ para 100 cm$^3$, enquanto a pressão permaneceu em 1,00 atm. (a) De quanto variou a energia interna do gás? Se a quantidade de gás presente era $2{,}00 \times 10^{-3}$ mol, determine (b) $C_P$ e (c) $C_V$.

••49 A temperatura de 3,00 mols de um gás diatômico ideal é aumentada de 40,0°C sem mudar a pressão do gás. As moléculas do gás giram, mas não oscilam. (a) Qual é a energia transferida para o gás na forma de calor? (b) Qual é a variação da energia interna do gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás? (d) Qual é o aumento da energia cinética de rotação do gás?

## seção 19-9 Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares

•50 Fornecemos 70 J de calor a um gás diatômico, que se expande a pressão constante. As moléculas do gás giram, mas não oscilam. De quanto a energia interna do gás aumenta?

•51 Quando 1,0 mol de gás oxigênio ($O_2$) é aquecido a pressão constante a partir de 0°C, quanta energia deve ser adicionada ao gás como calor para dobrar seu volume? (As moléculas giram, mas não oscilam.)

••52 Suponha que 12,0 g de gás oxigênio ($O_2$) são aquecidos de 25,0°C a 125°C a pressão atmosférica constante. (a) Quantos mols de oxigênio estão presentes? (A massa molar do oxigênio está na Tabela 19-1.) (b) Quanta energia é transferida para o oxigênio como calor? (As moléculas giram, mas não oscilam.) (c) Que fração do calor é usada para aumentar a energia interna do oxigênio?

••53 Suponha que 4,00 mols de um gás ideal diatômico, com rotação molecular, mas sem oscilação, sofrem um aumento de temperatura de 60,0 K em condições de pressão constante. Quais são (a) a energia transferida como calor $Q$, (b) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás, (c) o trabalho $W$ realizado pelo gás e (d) a variação $\Delta K$ da energia cinética de translação do gás?

### seção 19-11 A Expansão Adiabática de um Gás Ideal

•54 Suponha que 1,00 L de um gás com $\gamma = 1,30$, inicialmente a 273 K e 1,00 atm, é comprimido adiabaticamente, de forma brusca, para metade do volume inicial. Determine (a) a pressão final e (b) a temperatura final. (c) Se, em seguida, o gás é resfriado para 273 K a pressão constante, qual é o volume final?

•55 Um certo gás ocupa um volume de 4,3 L a uma pressão de 1,2 atm e uma temperatura de 310 K. Ele é comprimido adiabaticamente para um volume de 0,76 L. Determine (a) a pressão final e (b) a temperatura final, supondo que o gás é ideal e que $\gamma = 1,4$.

•56 Sabemos que $pV^\gamma$ = constante nos processos adiabáticos. Calcule a "constante" para um processo adiabático envolvendo exatamente 2,0 mol de um gás ideal que passa por um estado no qual a pressão é exatamente $p = 1,0$ atm e a temperatura é exatamente $T = 300$ K. Suponha que o gás é diatômico e que as moléculas giram, mas não oscilam.

••57 A Fig. 19-26 mostra duas trajetórias que podem ser seguidas por um gás de um ponto inicial $i$ até um ponto final $f$. A trajetória 1 consiste em uma expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 50 J), uma expansão adiabática (o módulo de trabalho é 40 J), uma compressão isotérmica (o módulo do trabalho é 30 J) e uma compressão adiabática (o módulo do trabalho é 25 J). Qual é a variação da energia interna do gás se ele vai do ponto $i$ para o ponto $f$ seguindo a trajetória 2?

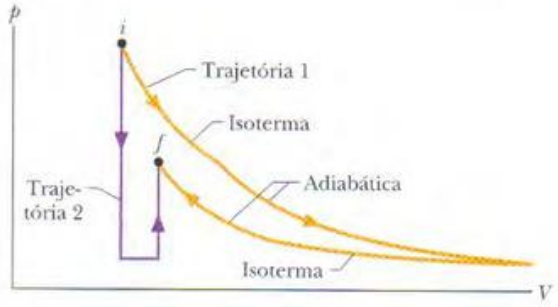



FIG. 19-26 Problema 57.

••58 *Vento adiabático.* Normalmente, o vento nas Montanhas Rochosas é de oeste para leste. Ao subir a encosta ocidental das montanhas o ar esfria e perde boa parte da umidade. Ao descer a encosta oriental o aumento da pressão com a diminuição da altitude faz a temperatura do ar aumentar. Esse fenômeno, conhecido como vento *chinook*, pode aumentar rapidamente a temperatura do ar na base das montanhas. Suponha que a pressão $p$ do ar varia com a altitude $y$ de acordo com a equação $p = p_0 e^{-ay}$, onde $p_0 = 1,00$ atm e $a = 1,16 \times 10^{-4}$ m$^{-1}$. Suponha também que a razão entre os calores específicos molares é $\gamma = 4/3$. Uma certa massa de ar, a uma temperatura inicial de $-5,00$°C, desce adiabaticamente de $y_1 = 4267$ m para $y = 1567$ m. Qual é a temperatura do ar no fim da descida?

••59 Um gás pode ser expandido de um estado inicial $i$ para um estado final $f$ ao longo da trajetória 1 ou da trajetória 2 de um diagrama $p$-$V$. A trajetória 1 é composta de três etapas: uma expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 40 J), uma expansão adiabática (o módulo do trabalho é 20 J) e outra expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 30 J). A trajetória 2 é composta de duas etapas: uma redução na pressão a volume constante e uma expansão a pressão constante. Qual é a variação da energia interna do gás ao longo da trajetória 2?

••60 *Abrindo uma garrafa de champanha.* Em uma garrafa de champanha, o bolsão de gás (dióxido de carbono, principalmente) que fica entre o líquido e a rolha está a uma pressão $p_i = 5,00$ atm. Quando a rolha é removida da garrafa, o gás sofre uma expansão adiabática até que sua pressão se torne igual à pressão ambiente, 1,00 atm. Suponha que a razão entre os calores específicos molares é $\gamma = 4/3$. Se a temperatura inicial do gás é $T_i = 5,00$°C, qual é sua temperatura no fim da expansão adiabática?

••61 O volume de um gás ideal é reduzido adiabaticamente de 200 L para 74,3 L. A pressão e temperatura iniciais são 1,00 atm e 300 K. A pressão final é 4,00 atm. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a temperatura final? (c) Quantos mols existem no gás?

••62 Um gás ideal diatômico, com rotação, mas sem oscilações, sofre uma compressão adiabática. A pressão e o volume iniciais são 1,20 atm e 0,200 m$^3$. A pressão final é 2,40 atm. Qual é o trabalho realizado pelo gás?

•••63 A Fig. 19-27 mostra o ciclo a que é submetido 1,00 mol de um gás ideal monoatômico. As temperaturas são $T_1 = 300$ K, $T_2 = 600$ K e $T_3 = 455$ K. Para a trajetória $1 \rightarrow 2$, determine (a) o calor trocado $Q$, (b) a variação de energia interna $\Delta E_{int}$ e (c) o trabalho realizado $W$. Para a trajetória $2 \rightarrow 3$, determine (d) $Q$, (e) $\Delta E_{int}$ e (f) $W$. Para a trajetória $3 \rightarrow 1$, determine (g) $Q$, (h) $\Delta E_{int}$ e (i) $W$. Para o ciclo completo, determine (j) $Q$, (k) $\Delta E_{int}$ e (l) $W$. A pressão inicial no ponto 1 é 1,00 atm ($= 1,013 \times 10^5$ Pa). Quais são (*m*) o volume e (*n*) a pressão no ponto 2 e (o) o volume e (p) a pressão no ponto 3?

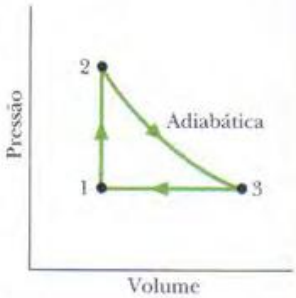



FIG. 19-27 Problema 63.

### Problemas Adicionais

64 Em uma nuvem de gás interestelar a 50,0 K, a pressão é $1,00 \times 10^{-8}$ Pa. Supondo que os diâmetros moleculares dos gases da nuvem são todos iguais a 20,0 nm, qual é o livre caminho médio das moléculas?

65 A temperatura de 3,00 mol de um gás com $C_V = 6,00$ cal/mol · K é aumentada de 50,0 K. Se o processo é conduzido a *volume constante*, quais são (a) a energia transferida como calor $Q$, (b) o trabalho $W$ realizado pelo gás, (c) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás e (d) a variação $\Delta K$ da energia cinética de translação? Se o processo é conduzido a *pressão constante*, quais são (e) $Q$, (f) $W$, (g) $\Delta E_{int}$ e (h) $\Delta K$? Se o processo é *adiabático*, quais são (i) $Q$, (j) $W$, (k) $\Delta E_{int}$ e (l) $\Delta K$?

66 Uma amostra de oxigênio ($O_2$) a 273 K e 1,0 atm está confinada em um recipiente cúbico de 10 cm de aresta. Calcule $\Delta U_g / K_{méd}$, onde $\Delta U_g$ é a variação da energia potencial gravitacional de uma molécula de oxigênio que cai da altura da caixa e $K_{méd}$ é a energia cinética de translação média da molécula.

67 O invólucro e a cesta de um balão de ar quente têm um peso total de 2,45 kN e o invólucro tem uma capacidade (volume) de $2,18 \times 10^3$ m$^3$. Quando o invólucro está totalmente inflado, qual deve ser a temperatura do ar no seu interior para dar ao balão a *capacidade de levantamento* (força) de 2,67 kN (além do peso do balão)? Suponha que o ar ambiente, a 20,0°C, tem um peso específico de 11,9 N/m$^3$, uma massa molecular de 0,028 kg/mol e está a uma pressão de 1,0 atm.

**68** (a) Um gás ideal, inicialmente à pressão $p_0$, sofre uma expansão livre até que seu volume seja 3,00 vezes o volume inicial. Qual é a razão à nova pressão e $p_0$? (b) Em seguida, o gás sofre uma lenta compressão adiabática até o volume inicial. A pressão após a compressão é $(3,00)^{1/3}p_0$. O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (c) Qual é a razão entre a energia cinética média por molécula no estado final e no estado inicial?

**69** A temperatura de 2,00 mol de um gás ideal monoatômico é aumentada em 15,0 K em um processo adiabático. Quais são (a) o trabalho $W$ realizado pelo gás, (b) a energia transferida como calor $Q$, (c) a variação $\Delta E_{int}$ da energia interna do gás e (d) a variação $\Delta K$ da energia cinética média por átomo?

**70** Durante uma compressão a pressão constante de 250 Pa, o volume de um gás ideal diminui de 0,80 m$^3$ para 0,20 m$^3$. A temperatura inicial é 360 K e o gás perde 210 J na forma de calor. Quais são (a) a variação da energia interna do gás e (b) a temperatura final do gás?

**71** Com que freqüência as moléculas de oxigênio ($O_2$) colidem à temperatura de 400 K e a uma pressão de 2,00 atm? Suponha que as moléculas têm 290 pm de diâmetro e que o oxigênio se comporta como um gás ideal.

**72** Uma amostra de um gás ideal contém 1,50 mol de moléculas diatômicas que giram, mas não oscilam. O diâmetro das moléculas é 250 pm. O gás sofre uma expansão a uma pressão constante de $1,50 \times 10^5$ Pa, com uma transferência de 200 J na forma de calor. Qual é a variação do livre caminho médio das moléculas?

**73** Um gás ideal monoatômico tem inicialmente uma temperatura de 330 K e uma pressão de 6,00 atm. Ele se expande do volume de 500 cm$^3$ para o volume de 1500 cm$^3$. Determine (a) a pressão final e (b) o trabalho realizado pelo gás se a expansão é isotérmica. Determine (c) a pressão final e (d) o trabalho realizado pelo gás se a expansão é adiabática.

**74** Um gás ideal com 3,00 mol está inicialmente no estado 1 à pressão $p_1 = 20,0$ atm e volume $V_1 = 1500$ cm$^3$. Primeiro, ele é levado ao estado 2 com pressão $p_2 = 1,50p_1$ e volume $V_2 = 2,00V_1$. Em seguida, ele é levado ao estado 3 com pressão $p_3 = 2,00p_1$ e volume $V_3 = 0,500V_1$. Qual é a temperatura do gás (a) no estado 1 e (b) no estado 2? (c) Qual é a variação líquida da energia interna do gás do estado 1 para o estado 3?

**75** Um gás ideal sofre uma compressão adiabática de $p = 1,0$ atm, $V = 1,0 \times 10^6$ L, $T = 0,0$°C para $p = 1,0 \times 10^5$ atm, $V = 1,0 \times 10^3$ L. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a temperatura final? (c) Quantos mols do gás estão presentes? Qual é a energia cinética de translação por mol (d) antes e (e) depois da compressão? (f) Qual é a razão entre os quadrados das velocidades médias quadráticas antes e após a compressão?

**76** Um gás ideal, a uma temperatura inicial $T_1$ e com um volume inicial de 2,0 m$^3$, sofre uma expansão adiabática para um volume de 4,0 m$^3$, depois uma expansão isotérmica para um volume de 10 m$^3$ e, finalmente, uma compressão adiabática de volta para $T_1$. Qual é o volume final?

**77** Uma amostra de um gás ideal sofre uma expansão de uma pressão e volume iniciais de 32 atm e 1,0 L para um volume final de 4,0 L. A temperatura inicial é 300 K. Se o gás é monoatômico e a expansão é isotérmica, quais são (a) a pressão final $p_f$, (b) a temperatura final $T_f$ e (c) o trabalho $W$ realizado pelo gás? Se o gás é monoatômico e a expansão é adiabática, quais são (d) $p_f$, (e) $T_f$ e (f) $W$? Se o gás é diatômico e a expansão é adiabática, quais são (g) $p_f$, (h) $T_f$ e (i) $W$?

**78** Calcule o trabalho realizado por um agente externo durante uma compressão isotérmica de 1,00 mol de oxigênio de um volume de 22,4 L a 0°C e 1,00 atm para um volume de 16,8 L.

**79** Um tanque de aço contém 300 g de amônia ($NH_3$) a uma pressão de $1,35 \times 10^6$ Pa e uma temperatura de 77°C. (a) Qual é o volume do tanque em litros? (b) Mais tarde, a temperatura é 22°C e a pressão é $8,7 \times 10^5$ Pa. Quantos gramas do gás vazaram do tanque?

**80** Em que temperatura os átomos de hélio têm a mesma velocidade média quadrática que as moléculas de hidrogênio a 20,0°C? (As massas molares são dadas na Tabela 19-1.)

**81** A Fig. 19-28 mostra a distribuição hipotética de velocidades das partículas de um certo gás: $P(v) = Cv^2$ para $0 < v \leq v_0$ e $P(v) = 0$ para $v > v_0$. Determine (a) uma expressão para $C$ em termos de $v_0$, (b) a velocidade média das partículas e (c) a velocidade média quadrática das partículas.

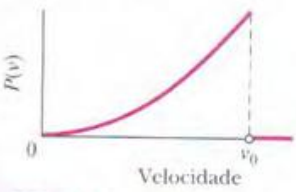



FIG. 19-28 Problema 81.

**82** Em um processo industrial, o volume de 25,0 mol de um gás ideal monoatômico é reduzido, a uma taxa uniforme, de 0,616 m$^3$ para 0,308 m$^3$ em 2,00 h, enquanto a temperatura é aumentada, a uma taxa uniforme, de 27,0°C para 450°C. Durante o processo, o gás passa por estados de equilíbrio termodinâmico. Quais são (a) o trabalho cumulativo realizado sobre o gás, (b) a energia cumulativa absorvida pelo gás como calor e (c) o calor específico molar para o processo? (*Sugestão:* Para calcular a integral para o trabalho, use a equação

$$\int \frac{a+bx}{A+Bx}dx = \frac{bx}{B} + \frac{aB-bA}{B^2}\ln(A+Bx),$$

uma integral indefinida.) Suponha que o processo é substituído por um processo de duas etapas que leva ao mesmo estado final. Na etapa 1, o volume do gás é reduzido a temperatura constante; na etapa 2, a temperatura é aumentada a volume constante. Para esse processo, quais são (d) o trabalho cumulativo realizado sobre o gás, (e) a energia cumulativa absorvida pelo gás como calor e (f) o calor específico molar para o processo?

**83** Um gás ideal sofre uma compressão isotérmica de um volume inicial de 4,00 m$^3$ para um volume final de 3,00 m$^3$. Existem 3,50 mol do gás e a sua temperatura é 10,0°C. (a) Qual é o trabalho realizado pelo gás? (b) Qual é a energia trocada como calor entre o gás e o ambiente?

**84** (a) Qual é o número de moléculas por metro cúbico no ar a 20°C e a uma pressão de 1,0 atm ($= 1,01 \times 10^5$ Pa)? (b) Qual é a massa de 1,0 m$^3$ desse ar? Suponha que 75% das moléculas são de nitrogênio ($N_2$) e 25% são de oxigênio ($O_2$).

**85** A Fig. 19-29 mostra um ciclo composto de cinco trajetórias: $AB$ é isotérmica a 300 K, $BC$ é adiabática com um trabalho de 5,0 J,

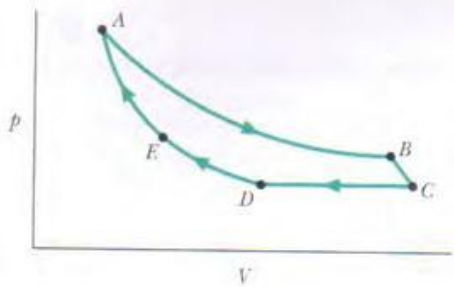



FIG. 19-29 Problema 85.

*CD* é uma pressão constante de 5 atm, *DE* é isotérmica e *EA* é adiabática com uma variação da energia interna de 8,0 J. Qual é a variação da energia interna do gás ao longo da trajetória *CD*?

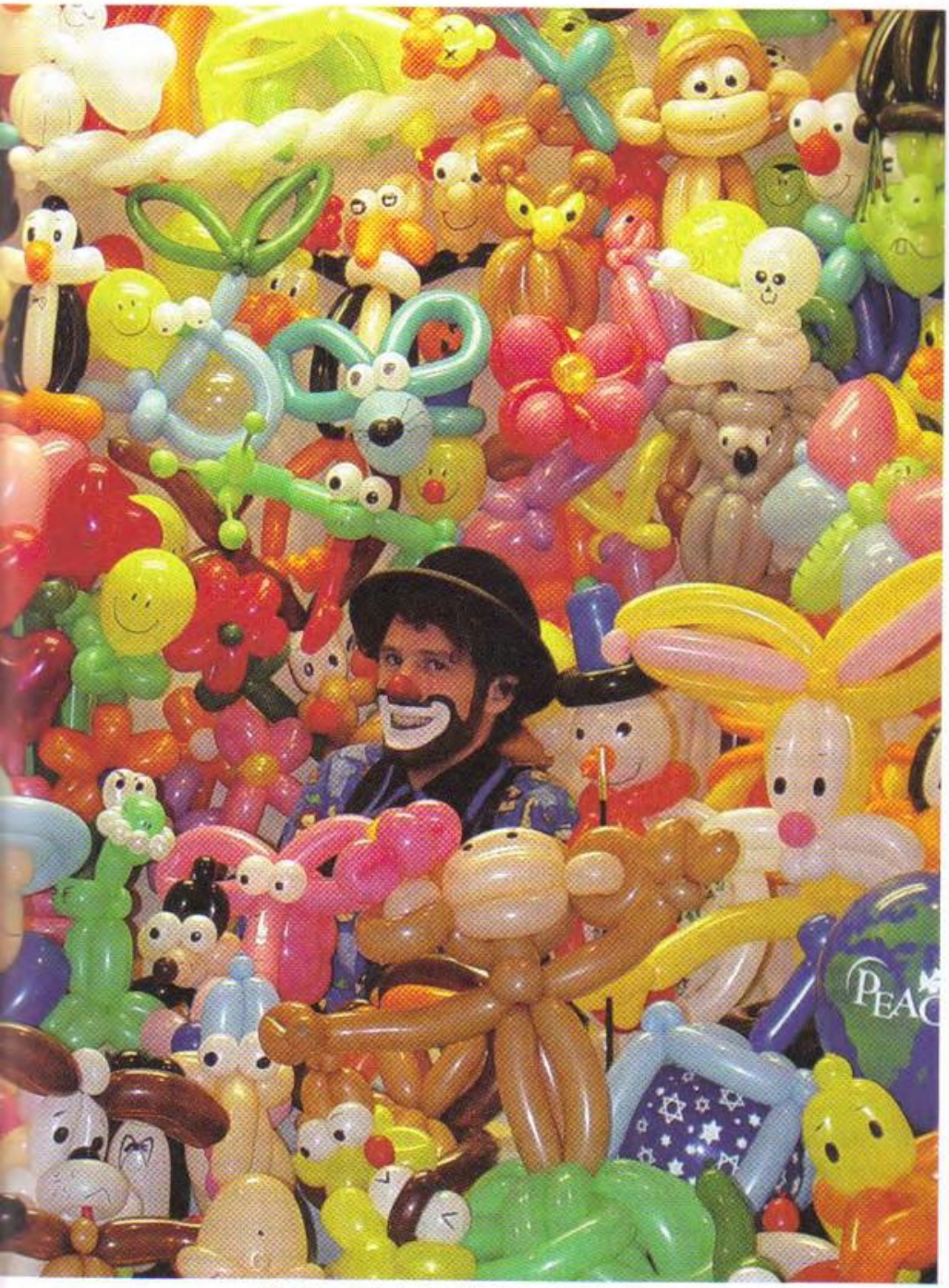
**86** Um gás ideal inicialmente a 300 K é comprimido a uma pressão constante de 25 $N/m^2$ de um volume de 3,0 $m^3$ para um volume de 1,8 $m^3$. No processo, 75 J são perdidos pelo gás na forma de calor. Qual é (a) a variação da energia interna do gás e (b) a temperatura final do gás?

**87** Um gás ideal é submetido a um ciclo completo em três etapas: expansão adiabática com um trabalho de 125 J, contração isotérmica a 325 K e um aumento na pressão a volume constante. (a) Plote as três etapas em um diagrama *p-V*. (b) Quanta energia é transferida como calor na etapa 3? (c) A energia é *absorvida* ou *cedida* pelo gás?

**88** (a) Qual é o volume ocupado por 1,00 mol de um gás ideal nas condições normais de temperatura e pressão (CNTP), ou seja, 1,00 atm (= $1,01 \times 10^5$ Pa) e 273 K? (b) Mostre que o número de moléculas por centímetro cúbico nas CNTP é $2,69 \times 10^{19}$. (Este número é chamado de *número de Loschmidt*.)

# Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica

# 20



A foto é cortesia de Ronald P. Fowler, Jr., Flower Entertainment, www.flowerclown.com.

*Para encher uma bola de aniversário ou esticar um elástico é preciso fazer um certo esforço, porque a borracha resiste ao alongamento. Na maioria dos materiais essa resistência se deve às ligações químicas que mantêm unidos os átomos e moléculas. No caso da borracha, porém, a resistência ao alongamento não está relacionada às ligações químicas, e sim a uma grandeza que permite estabelecer o sentido do tempo.*

**Qual é a relação entre um elástico esticado e o sentido do tempo?**

A resposta está neste capítulo.

## 20-1 O QUE É FÍSICA?

O tempo possui um sentido, o sentido no qual envelhecemos. Estamos acostumados com processos unidirecionais, ou seja, processos que ocorrem apenas em uma certa ordem. Um ovo cai no chão e se quebra, uma pizza é assada, um carro bate em um poste, as ondas transformam pedras em areia... todos esses processos unidirecionais são **irreversíveis**, ou seja, não podem ser desfeitos através de pequenas mudanças no ambiente.

Um dos objetivos da física é compreender por que o tempo tem um sentido e por que os processos unidirecionais são irreversíveis. Embora essa física possa parecer distante das situações do nosso dia-a-dia, tem na verdade uma relação direta com o funcionamento de qualquer motor, como o motor de um automóvel, porque é ela que determina qual é a eficiência máxima com a qual um motor pode funcionar.

O segredo para compreender a razão pela qual os processos unidirecionais não podem ser invertidos envolve uma grandeza conhecida como *entropia*.

## 20-2 | Processos Irreversíveis e Entropia

A associação entre o caráter unidirecional dos processos e a irreversibilidade é tão universal que a aceitamos como perfeitamente natural. Se um desses processos ocorresse *espontaneamente* no sentido inverso, ficaríamos perplexos. Entretanto, *nenhum* desses processos "no sentido errado" violaria a lei da conservação da energia.

Assim, por exemplo, você ficaria muito surpreso se colocasse as mãos em torno de uma xícara de café quente e suas mãos ficassem mais frias e a xícara mais quente. Este é obviamente o sentido errado para a transferência de energia, mas a energia total do sistema fechado (*mãos + xícara de café*) seria igual à energia total se o processo acontecesse no sentido correto. Para dar outro exemplo, se você estourasse um balão de hélio levaria um susto se, algum tempo depois, as moléculas de hélio se reunissem para assumir a forma original do balão. Este é obviamente o sentido errado para as moléculas se moverem, mas a energia total do sistema fechado (*moléculas + aposento*) seria a mesma do sentido correto.

Assim, não são as mudanças de energia em um sistema fechado que determinam o sentido dos processos irreversíveis; esse sentido é determinado por outra propriedade, que será discutida neste capítulo: a *variação de entropia* $\Delta S$ do sistema. A variação de entropia de um sistema será definida na próxima seção, mas podemos enunciar desde já sua propriedade mais importante, freqüentemente chamada de *postulado da entropia*:

> Se um processo irreversível ocorre em um sistema *fechado*, a entropia $S$ do sistema sempre aumenta.

A entropia é diferente da energia no sentido de que a entropia *não obedece* a uma lei de conservação. A *energia* de um sistema fechado é conservada; permanece constante. Nos processos irreversíveis, a *entropia* de um sistema fechado aumenta. Graças a essa propriedade, a variação de entropia é às vezes chamada de "seta do tempo". Assim, por exemplo, associamos a explosão de um milho de pipoca ao sentido positivo do tempo e ao aumento da entropia. O sentido negativo do tempo (um filme passado ao contrário) corresponde a uma pipoca se transformando em milho. Como esse processo resultaria em uma diminuição de entropia, ele jamais acontece.

Existem duas formas equivalentes de definir a variação da entropia de um sistema: (1) em termos da temperatura do sistema e da energia que o sistema ganha ou perde em forma de calor, e (2) contando as diferentes formas de distribuir os átomos ou moléculas que compõem o sistema. A primeira abordagem é usada na próxima seção, e a segunda na Seção 20-8.

## 20-3 | Variação de Entropia

Vamos definir o que significa uma *variação de entropia* analisando novamente um processo que foi descrito nas Seções 18-11 e 19-11: a expansão livre de um gás ideal. A Fig. 20-1*a* mostra o gás no estado de equilíbrio inicial *i*, confinado por uma válvula fechada no lado esquerdo de um recipiente termicamente isolado. Quando abrimos a válvula, o gás se expande para ocupar todo o recipiente, atingindo, depois de um certo tempo, o estado de equilíbrio final *f* mostrado na Fig. 20-1*b*. Este é um processo irreversível; as moléculas do gás jamais voltam a ocupar apenas o lado esquerdo do recipiente.

O diagrama *p-V* do processo, na Fig. 20-2, mostra a pressão e o volume do gás no estado inicial *i* e no estado final *f*. A pressão e o volume são *propriedades de estado*, ou seja, propriedades que dependem apenas do estado do gás e não da forma como ele chegou a esse estado. Outras propriedades de estado são a temperatura e a energia. Vamos agora supor que o gás possua mais uma propriedade de estado: a entropia. Além disso, definimos a **variação de entropia** $S_f - S_i$ do sistema durante um processo que leva o sistema de um estado inicial *i* para um estado final *f* através da equação

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{(definição de variação de entropia)}. \qquad (20\text{-}1)$$

onde $Q$ é a energia absorvida ou cedida como calor pelo sistema durante o processo e $T$ é a temperatura do sistema em kelvins. Assim, a variação de entropia depende não só da energia transferida na forma de calor, mas também da temperatura na qual a transferência ocorre. Como $T$ é sempre positiva, o sinal de $\Delta S$ é igual ao sinal de $Q$. De acordo com a Eq. 20-1, a unidade de entropia e de variação de entropia no SI é o joule por kelvin.

Existe, porém, um problema para aplicar a Eq. 20-1 à expansão livre da Fig. 20-1. Enquanto o gás se expande para ocupar todo o recipiente, a pressão, a temperatura e o volume do gás flutuam de forma imprevisível. Em outras palavras, essas três variáveis não passam por uma série de valores de equilíbrio bem definidos nos estágios intermediários da mudança do sistema do estado de equilíbrio inicial *i* para o estado de equilíbrio final *f*. Assim, não podemos plotar uma trajetória pressão-volume da expansão livre no diagrama *p-V* da Fig. 20-2 e, mais importante, não podemos escrever uma relação entre $Q$ e $T$ que nos permita realizar a integração da Eq. 20-1.

Entretanto, se a entropia é realmente uma propriedade de estado a diferença de entropia entre os estados *i* e *f* depende *apenas desses estados*, e não da forma como o sistema passa de um estado para o outro. Suponha que a expansão livre irreversível da Fig. 20-1 seja substituída por um processo *reversível* que liga os mesmos estados *i* e *f*. No caso de um processo reversível podemos plotar uma trajetória no diagrama *p-V* e encontrar uma relação entre $Q$ e $T$ que nos permita usar a Eq. 20-1 para obter a variação de entropia.

Vimos na Seção 19-11 que a temperatura de um gás ideal não varia durante uma expansão livre: $T_i = T_f = T$. Assim, os pontos *i* e *f* da Fig. 20-2 devem estar sobre a mesma isoterma. Um processo substituto conveniente é, portanto, uma expansão isotérmica reversível do estado *i* para o estado *f*, que ocorre *ao longo* dessa isoterma. Além disso, como $T$ é constante durante uma expansão isotérmica reversível, a integral da Eq. 20-1 fica muito mais fácil de calcular.

A Fig. 20-3 mostra como é possível produzir essa expansão isotérmica reversível. Confinamos o gás a um cilindro isolado que se encontra em contato com uma fonte de calor mantida à temperatura $T$. Começamos colocando uma quantidade de esferas de chumbo sobre o êmbolo suficiente para que a pressão e o volume do gás correspondam ao inicial *i* da Fig. 20-1*a*. Em seguida, removemos lentamente as esferas (uma por uma) até que a pressão e o volume do gás correspondam ao estado final *f* da Fig. 20-1*b*. A temperatura do gás não varia porque o gás permanece em contato com a fonte de calor durante todo o processo.

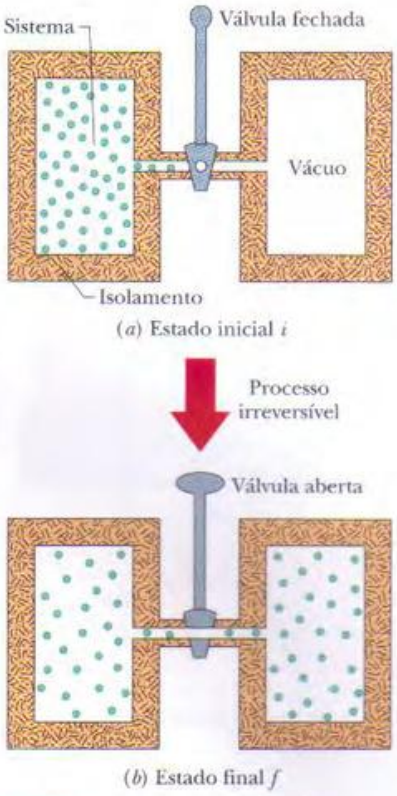
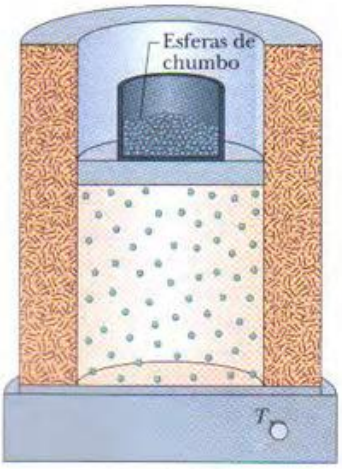



**FIG. 20-1** A expansão livre de um gás ideal. (*a*) O gás está confinado no lado esquerdo de um recipiente isolado por uma válvula fechada. (*b*) Quando a válvula é aberta, o gás ocupa todo o recipiente. Este processo é irreversível, ou seja, não ocorre no sentido inverso, com o gás espontaneamente voltando a se concentrar no lado esquerdo do recipiente.

**FIG. 20-2** Diagrama *p-V* mostrando o estado inicial *i* e o estado final *f* da expansão livre da Fig. 20-1. Os estados intermediários do gás não podem ser mostrados porque não são estados de equilíbrio.

(*a*) Estado inicial *i*

Processo reversível




(*b*) Estado final *f*

**FIG. 20-3** A expansão isotérmica de um gás ideal, realizada de forma reversível. O gás possui o mesmo estado inicial *i* e o mesmo estado final *f* que no processo irreversível das Figs. 20-1 e 20-2.

A expansão isotérmica reversível da Fig. 20-3 é fisicamente bem diferente da expansão livre irreversível da Fig. 20-1. Entretanto, *os dois processos possuem o mesmo estado inicial e o mesmo estado final e, portanto, a variação de entropia é a mesma nos dois casos*. Como o chumbo é removido lentamente, os estados intermediários do gás são estados de equilíbrio e podem ser representados em um diagrama $p$-$V$ (Fig. 20-4).

Para aplicar a Eq. 20-1 à expansão isotérmica, colocamos a temperatura constante $T$ do lado de fora da integral, obtendo

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{1}{T}\int_i^f dQ.$$

Como $\int dQ = Q$, onde $Q$ é a energia total transferida como calor durante o processo, temos:

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T} \qquad \text{(variação de entropia, processo isotérmico).} \qquad (20\text{-}2)$$

Para manter constante a temperatura $T$ do gás durante a expansão isotérmica da Fig. 20-3, uma quantidade de calor $Q$ deve ser transferida *da* fonte de calor *para* o gás. Assim, $Q$ é positivo e a entropia do gás *aumenta* durante o processo isotérmico e durante a expansão livre da Fig. 20-1.

Em resumo:

> Para determinar a variação de entropia em um processo irreversível que ocorre em um sistema *fechado* substituímos esse processo por qualquer outro processo reversível que ligue os mesmos estados inicial e final e calculamos a variação de entropia para esse processo reversível usando a Eq. 20-1.

Quando a variação de temperatura $\Delta T$ de um sistema é pequena em relação à temperatura (em kelvins) antes e depois do processo, a variação de entropia é dada aproximadamente por

$$\Delta S = S_f - S_i \approx \frac{Q}{T_{méd}}, \qquad (20\text{-}3)$$

onde $T_{méd}$ é a temperatura média do sistema, em kelvins, durante o processo.

**TESTE 1** Aquece-se água em um fogão. Ordene as variações de entropia da água quando a temperatura aumenta (a) de 20°C para 30°C, (b) de 30°C para 35°C e (c) de 80°C para 85°C, em ordem decrescente.

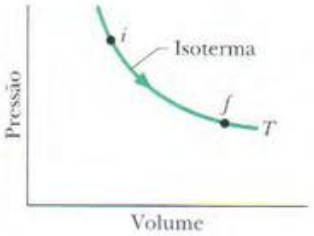



**FIG. 20-4** Diagrama $p$-$V$ para a expansão isotérmica reversível da Fig. 20-3. Os estados intermediários, que são agora estados de equilíbrio, estão indicados por uma curva.

## A Entropia como uma Função de Estado

Supusemos que a entropia, como a pressão, a energia e a temperatura, é uma propriedade do estado de um sistema e não depende do modo como esse estado é atingido. O fato de que a entropia é realmente uma *função de estado* (como costumam ser chamadas as propriedades de estado) pode ser demonstrado apenas através de experimentos. Entretanto, podemos provar que é uma função de estado

para o caso especial, muito importante, no qual um gás ideal passa por um processo reversível.

Para tornar o processo reversível ele é executado lentamente, em uma série de pequenos passos, com o gás em um estado de equilíbrio ao final de cada passo. Para cada pequeno passo a energia absorvida ou cedida pelo gás na forma de calor é $dQ$, o trabalho realizado pelo gás é $dW$ e a variação da energia interna é $dE_{int}$. Essas variações estão relacionadas pela primeira lei da termodinâmica na forma diferencial (Eq. 18-27):

$$dE_{int} = dQ - dW.$$

Como os passos são reversíveis, com o gás em estados de equilíbrio, podemos usar a Eq. 18-24 para substituir $dW$ por $pdV$ e a Eq. 19-45 para substituir $dE_{int}$ por $nC_V dT$. Fazendo essas substituições e explicitando $dQ$, obtemos

$$dQ = p\,dV + nC_V\,dT.$$

Usando a lei dos gases ideais, podemos substituir $p$ nesta equação por $nRT/V$. Dividindo ambos os membros da equação resultante por $T$, temos:

$$\frac{dQ}{T} = nR\frac{dV}{V} + nC_V\frac{dT}{T}.$$

Em seguida, integramos os termos desta equação de um estado inicial arbitrário $i$ para um estado final arbitrário $f$, o que nos dá

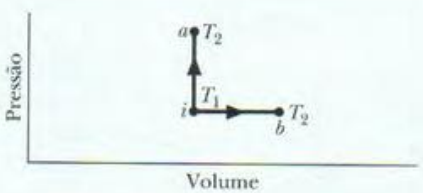
$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_i^f nR\frac{dV}{V} + \int_i^f nC_V\frac{dT}{T}.$$

De acordo com a Eq. 20-1, o lado esquerdo dessa equação é a variação de entropia $\Delta S$ ($= S_f - S_i$). Fazendo essa substituição e integrando os termos do lado direito, obtemos

$$\Delta S = S_f - S_i = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}. \qquad (20\text{-}4)$$

Observe que não foi preciso especificar um processo reversível em particular para realizar a integração. Assim, o resultado da integração deve ser válido para qualquer processo reversível que leve o gás do estado $i$ para o estado $f$. Isso mostra que a variação de entropia $\Delta S$ entre os estados inicial e final de um gás ideal depende apenas das propriedades do estado inicial ($V_i$ e $T_i$) e do estado final ($V_f$ e $T_f$); $\Delta S$ não depende do modo como o gás passa do estado inicial para o estado final.

**TESTE 2** Um gás ideal está à temperatura $T_1$ no estado inicial $i$ mostrado no diagrama $p$-$V$ ao lado. O gás está a uma temperatura maior $T_2$ nos estados finais $a$ e $b$, que ele pode atingir seguindo as trajetórias mostradas na figura. A variação de entropia na trajetória do estado $i$ para o estado $a$ é maior, menor ou igual à variação de entropia na trajetória do estado $i$ para o estado $b$?




## Exemplo 20-1

Suponha que 1,0 mol de nitrogênio esteja confinado no lado esquerdo do recipiente da Fig. 20-1*a*. A válvula é aberta e o volume do gás dobra. Qual é a variação de entropia do gás para esse processo irreversível? Trate o gás como sendo ideal.

**IDÉIAS-CHAVE** (1) Podemos determinar a variação de entropia para o processo irreversível calculando-a para um processo reversível que resulta na mesma variação de volume. (2) A temperatura do gás não varia durante a expan-

são livre. Assim, o processo reversível deve ser uma expansão isotérmica como a das Figs. 20-3 e 20-4.

***Cálculos:*** De acordo com a Tabela 19-4, a energia $Q$ adicionada ao gás na forma de calor quando ele se expande isotermicamente à temperatura $T$ de um volume inicial $V_i$ para um volume final $V_f$ é

$$Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i},$$

onde $n$ é o número de mols de gás presentes. De acordo com a Eq. 20-2, a variação de entropia durante esse processo reversível é

$$\Delta S_{rev} = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_f/V_i)}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

Fazendo $n = 1{,}00$ mol e $V_f/V_i = 2$, obtemos

$$\Delta S_{rev} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = (1{,}00 \text{ mol})(8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(\ln 2)$$
$$= +5{,}76 \text{ J/K}.$$

Assim, a variação de entropia para a expansão livre (e para todos os outros processos que ligam os estados inicial e final mostrados na Fig. 20-2) é

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = +5{,}76 \text{ J/K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como o valor de $\Delta S$ é positivo, a entropia aumenta, o que está de acordo com o postulado da entropia da Seção 20-2.

## Exemplo 20-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 20-5*a* mostra dois blocos de cobre iguais de massa $m = 1{,}5$ kg: o bloco $E$, a uma temperatura $T_{iE} = 60°C$ e o bloco $D$, a uma temperatura $T_{iD} = 20°C$. Os blocos estão em uma caixa isolada termicamente e estão separados por uma divisória isolante. Quando removemos a divisória os blocos atingem, depois de algum tempo, uma temperatura de equilíbrio $T_f = 40°C$ (Fig. 20-5*b*). Qual é a variação líquida da entropia do sistema dos dois blocos durante esse processo irreversível? O calor específico do cobre é 386 J/kg · K.

**IDÉIA-CHAVE** Para calcular a variação de entropia, devemos encontrar um processo reversível que leve o sistema do estado inicial da Fig. 20-5*a* para o estado final da Fig. 20-5*b*. Podemos calcular a variação de entropia $\Delta S_{rev}$ do processo reversível usando a Eq. 20-1; a variação de entropia para o processo irreversível é igual a $\Delta S_{rev}$.

***Cálculos:*** Para o processo reversível precisamos de uma fonte de calor cuja temperatura possa ser variada lentamente (girando um botão, digamos). Os blocos podem ser levados ao estado final em duas etapas, ilustradas na Fig. 20-6.

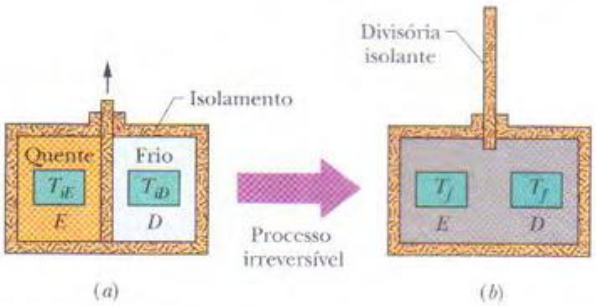



**FIG. 20-5** (*a*) No estado inicial, dois blocos $E$ e $D$, iguais a não ser por estarem a temperaturas diferentes, se encontram em uma caixa isolada e estão separados por uma divisória isolante. (*b*) Quando a divisória é removida, os blocos trocam energia em forma de calor e chegam a um estado final no qual ambos estão à mesma temperatura $T_f$.

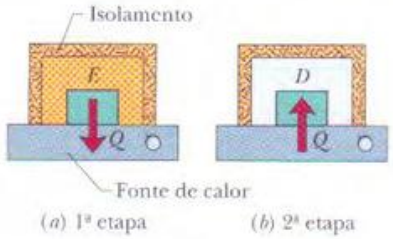



**FIG. 20-6** Os blocos da Fig. 20-5 podem passar do estado inicial para o estado final de uma forma reversível se usarmos uma fonte de temperatura controlável (*a*) para extrair calor reversivelmente do bloco $E$ e (*b*) para adicionar calor reversivelmente ao bloco $D$.

1ª etapa Com a temperatura da fonte de calor em 60°C, colocamos o bloco $E$ na fonte. (Como o bloco e a fonte estão à mesma temperatura, já se encontram em equilíbrio térmico.) Em seguida, diminuímos lentamente a temperatura da fonte e do bloco para 40°C. Para cada variação de temperatura $dT$ do bloco uma energia $dQ$ é transferida na forma de calor *do* bloco para a fonte. Usando a Eq. 18-14, podemos escrever essa energia transferida como $dQ = mc\,dT$, onde $c$ é o calor específico do cobre. De acordo com a Eq. 20-1, a variação de entropia $\Delta S_E$ do bloco $E$ durante a variação total de temperatura, da temperatura inicial $T_{iE}$ (= 60°C = 333 K) para a temperatura final $T_f$ (= 40°C = 313 K), é

$$\Delta S_E = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_{iE}}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T} = mc \int_{T_{iE}}^{T_f} \frac{dT}{T}$$
$$= mc \ln \frac{T_f}{T_{iE}}.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\Delta S_E = (1{,}5 \text{ kg})(386 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{313 \text{ K}}{333 \text{ K}}$$
$$= -35{,}86 \text{ J/K}.$$

2ª etapa Com a temperatura da fonte agora ajustada para 20°C, colocamos o bloco $D$ na fonte e aumen-

tamos lentamente a temperatura da fonte e do bloco para 40°C. Com o mesmo raciocínio usado para determinar $\Delta S_E$, é fácil mostrar que a variação de entropia $\Delta S_D$ do bloco $D$ durante este processo é

$$\Delta S_D = (1{,}5\text{ kg})(386\text{ J/kg}\cdot\text{K})\ln\frac{313\text{ K}}{293\text{ K}}$$
$$= +38{,}23\text{ J/K}.$$

A variação líquida de entropia $\Delta S_{rev}$ do sistema de dois blocos durante esse processo reversível hipotético de duas etapas é, portanto,

$$\Delta S_{rev} = \Delta S_D + \Delta S_E$$
$$= -35{,}86\text{ J/K} + 38{,}23\text{ J/K} = 2{,}4\text{ J/K}.$$

Assim, a variação líquida de entropia $\Delta S_{irrev}$ para o sistema dos dois blocos durante o processo irreversível real é

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = 2{,}4\text{ J/K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado é positivo, o que está de acordo com o postulado da entropia da Seção 20-2.

## 20-4 | A Segunda Lei da Termodinâmica

Aqui está um enigma. Como vimos no Exemplo 20-1, quando fazemos com que o processo reversível da Fig. 20-3 ocorra da situação representada na Fig. 20-3*a* para a situação representada na Fig. 20-3*b*, a variação de entropia do gás (que tomamos como sendo nosso sistema) é positiva. Entretanto, como o processo é reversível podemos fazê-lo ocorrer no sentido inverso, acrescentando lentamente esferas de chumbo ao êmbolo da Fig. 20-3*b* até que o volume original do gás seja restabelecido. Nesse processo inverso, deve-se extrair energia do gás, na forma de calor, para evitar que sua temperatura aumente. Assim, $Q$ é negativo, e, de acordo com a Eq. 20-2, a entropia do gás deve diminuir.

Essa diminuição da entropia do gás não viola o postulado da entropia da Seção 20-2, segundo o qual a entropia sempre aumenta? Não, porque esse postulado é válido somente para processos *irreversíveis* que ocorrem em sistemas fechados. O processo que acabamos de descrever não satisfaz esses requisitos. O processo *não é* irreversível e (como energia é transferida na forma de calor do gás para a fonte) o sistema (que é apenas o gás) *não* é fechado.

Por outro lado, se considerarmos a fonte como parte do sistema passaremos a ter um sistema fechado. Vamos examinar a variação na entropia do sistema ampliado *gás + fonte de calor* para o processo que o leva de (*b*) para (*a*) na Fig. 20-3. Durante esse processo reversível, energia é transferida na forma de calor do gás para a fonte, ou seja, de uma parte do sistema ampliado para outra. Seja $|Q|$ o valor absoluto desse calor. Usando a Eq. 20-2, podemos calcular separadamente as variações de entropia para o gás (que perde $|Q|$) e para a fonte (que ganha $|Q|$). Obtemos

$$\Delta S_{gás} = -\frac{|Q|}{T}$$

e

$$\Delta S_{gás} = +\frac{|Q|}{T}.$$

A variação da entropia do sistema fechado é a soma desses dois valores, ou seja, zero.

Com esse resultado, podemos modificar o postulado da entropia da Seção 20-2 para que se aplique tanto a processos reversíveis como a processos irreversíveis:

> Se um processo ocorre em um sistema *fechado*, a entropia do sistema aumenta para processos irreversíveis e permanece constante para processos reversíveis. A entropia nunca diminui.

Embora a entropia possa diminuir em uma certa parte de um sistema fechado, sempre existe um aumento igual ou maior em outra parte do sistema, de modo que a entropia do sistema como um todo jamais diminui. Esta afirmação constitui uma das formas de enunciar a **segunda lei da termodinâmica**, e pode ser representada matematicamente pela equação

$$\Delta S \geq 0 \qquad \text{(segunda lei da termodinâmica)}, \qquad (20\text{-}5)$$

onde o sinal de desigualdade se aplica a processos irreversíveis e o sinal de igualdade a processos reversíveis. A Eq. 20-5 se aplica apenas a sistemas fechados.

No mundo real todos os processos são irreversíveis em maior ou menor grau por causa do atrito, da turbulência e de outros fatores, de modo que a entropia de sistemas reais fechados submetidos a processos reais sempre aumenta. Processos nos quais a entropia do sistema permanece constante são sempre aproximações.

## Força Associada à Entropia

Para compreendermos por que a borracha resiste a ser esticada, vamos escrever a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW$$

para um elástico que sofre um pequeno aumento de comprimento $dx$ quando o esticamos com as mãos. A força exercida pelo elástico tem módulo $F$, aponta no sentido contrário ao do aumento de comprimento e realiza um trabalho $dW = -F\,dx$ durante o aumento de comprimento $dx$. De acordo com a Eq. 20-2 ($\Delta S = Q/T$), pequenas variações de $Q$ e $S$ a temperatura constante estão relacionadas através da equação $dS = dQ/T$ ou $dQ = T\,dS$. Assim, podemos escrever a primeira lei na forma

$$dE = T\,dS + F\,dx. \tag{20-6}$$

Com boa aproximação, a variação $dE$ da energia interna do elástico é 0 se a dilatação total do elástico não é muito grande. Fazendo $dE = 0$ na Eq. 20-6, obtemos a seguinte expressão para a força exercida pelo elástico:

$$F = -T\frac{dS}{dx}. \tag{20-7}$$

Esta equação nos diz que $F$ é proporcional à taxa $dS/dx$ com a qual a entropia do elástico varia durante uma pequena variação $dx$ do comprimento do elástico. Assim, você pode *sentir* o efeito da entropia nas mãos ao esticar um elástico.

Para entender por que existe uma relação entre força e entropia, considere um modelo simples da borracha de que é feito o elástico. A borracha é formada por longas cadeias poliméricas com ligações cruzadas, que lembram ziguezagues tridimensionais (Fig. 20-7). Quando o elástico se encontra no estado relaxado essas cadeias estão parcialmente enroladas e orientadas aleatoriamente. Devido ao alto grau de desordem das moléculas, esse estado possui um alto valor de entropia. Quando esticamos um elástico de borracha desenrolamos muitas dessas moléculas e as alinhamos na direção do alongamento. Como o alinhamento diminui a desordem, a entropia do elástico esticado é menor. Isso significa que a derivada $dS/dx$ da Eq. 20-7 é negativa, já que a entropia diminui quando $dx$ aumenta. Assim, a força que sentimos ao esticar um elástico se deve à tendência das moléculas de voltarem ao estado menos ordenado, para o qual a entropia é maior.

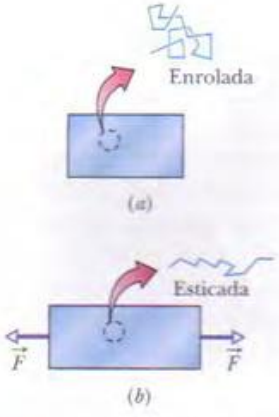



FIG. 20-7 Um pedaço de elástico (*a*) relaxado e (*b*) distendido, e uma cadeia polimérica do material (*a*) enrolada e (*b*) esticada.

## Exemplo 20-3

A força de um elástico esticado é dada aproximadamente pela lei de Hooke da Eq. 7-21 ($F_x = -kx$), onde $k$ é a *constante elástica*. Suponha que um elástico com $k = 50{,}0$ N/m, à temperatura $T = 27°C$, está com um alongamento de $x = 1{,}2$ cm. Qual é a taxa de diminuição da entropia, $dS/dx$, para um pequeno alongamento adicional?

**IDÉIA-CHAVE** De acordo com a Eq. 20-7 ($F = -T\,dS/dx$), a força exercida por um elástico esticado se deve à variação da entropia das moléculas.

***Cálculo:*** De acordo com a Eq. 20-7, o módulo da força é dado por $T|dS/dx|$. De acordo com a Eq. 7-21, o módulo também é igual a $k|x|$. Assim,

$$T\left|\frac{dS}{dx}\right| = k|x|,$$

e, portanto,

$$\left|\frac{dS}{dx}\right| = \frac{k|x|}{T} = \frac{(50{,}0\ \text{N/m})(0{,}012\ \text{m})}{(273\ \text{K} + 27\ \text{K})}$$

$$= 2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{J/K} \cdot \text{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

## 20-5 | Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas

Uma **máquina térmica** é um dispositivo que extrai energia do ambiente na forma de calor e realiza um trabalho útil. Toda máquina térmica utiliza uma *substância de trabalho*. Nas máquinas a vapor a substância de trabalho é a água, tanto na forma líquida quanto na forma de vapor. Nos motores de automóvel a substância de trabalho é uma mistura de gasolina e ar. Para que uma máquina térmica realize trabalho de forma contínua a substância de trabalho deve operar em um *ciclo*, ou seja, deve passar por uma série fechada de processos termodinâmicos, chamados *tempos*, voltando repetidamente a cada estado do ciclo. Vamos ver o que as leis da termodinâmica podem nos dizer a respeito do funcionamento das máquinas térmicas.

### A Máquina de Carnot

Como vimos, é possível aprender muita coisa a respeito dos gases reais analisando um gás ideal, que obedece à equação $pV = nRT$. Embora não existam gases ideais na natureza, o comportamento de qualquer gás real se aproxima do comportamento de um gás ideal para pequenas concentrações de moléculas. Da mesma forma, podemos compreender melhor o funcionamento das máquinas térmicas estudando o comportamento de uma **máquina térmica ideal**.

Em uma máquina térmica ideal todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência.

Vamos examinar um tipo particular de máquina térmica ideal, chamada **máquina de Carnot** em homenagem ao cientista e engenheiro francês N. L. Sadi Carnot, que a imaginou em 1824. De todas as máquinas térmicas, a máquina de Carnot é a que utiliza o calor com a maior eficiência para realizar trabalho útil. Surpreendentemente, Carnot foi capaz de analisar o seu desempenho antes que a primeira lei da termodinâmica e o conceito de entropia tivessem sido descobertos.

A Fig. 20-8 mostra, de forma esquemática, o funcionamento de uma máquina de Carnot. Durante cada ciclo da máquina a substância de trabalho absorve uma quantidade $|Q_Q|$ de calor de uma fonte de calor a uma temperatura constante $T_Q$ e fornece uma quantidade $|Q_F|$ de calor a uma segunda fonte de calor a uma temperatura constante mais baixa $T_F$.

A Fig. 20-9 mostra um diagrama $p$-$V$ do *ciclo de Carnot*, ou seja, o ciclo a que é submetida a substância de trabalho na máquina de Carnot. Como indicam as setas, o ciclo é percorrido no sentido horário. Imagine que a substância de trabalho seja um gás, confinado em um cilindro feito de material isolante e com um êmbolo submetido a um peso. O cilindro pode ser colocado entre duas fontes de calor, como na Fig. 20-6, ou sobre uma placa isolante. A Fig. 20-9 mostra que, quando colocamos o cilindro em contato com a fonte quente, à temperatura $T_Q$, uma quantidade de calor $|Q_Q|$ é transferida para a substância de trabalho a partir dessa fonte, enquanto o gás sofre uma *expansão* isotérmica do volume $V_a$ para o volume $V_b$. Analogamente, quando a substância de trabalho é posta em contato com a fonte fria, à temperatura $T_F$, uma quantidade de calor $|Q_F|$ é transferida da substância de trabalho para essa fonte, enquanto o gás sofre uma *compressão* isotérmica do volume $V_c$ para o volume $V_d$.

Na máquina térmica da Fig. 20-8 supomos que as transferências de calor para a substância de trabalho ou para a fonte de calor ocorrem *apenas* durante os processos isotérmicos *ab* e *cd* da Fig. 20-9. Assim, os processos *bc* e *da* nessa figura, que ligam as isotermas correspondentes às temperaturas $T_Q$ e $T_F$ devem ser processos adiabáticos (reversíveis), ou seja, devem ser processos nos quais nenhuma energia é transferida em forma de calor. Para isso, durante os processos *bc* e *da* o cilindro é colocado sobre uma placa isolante enquanto o volume da substância de trabalho varia.

Durante os processos consecutivos *ab* e *bc* da Fig. 20-9, a substância de trabalho está se expandindo, realizando assim trabalho positivo enquanto eleva o êmbolo e

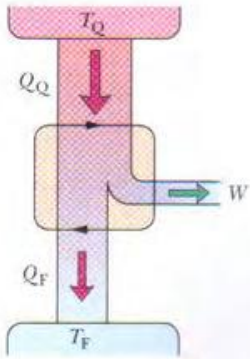



FIG. 20-8 Os elementos de uma máquina de Carnot. As duas setas pretas no centro sugerem uma substância de trabalho operando ciclicamente, como se se tratasse de um diagrama $p$-$V$. Uma energia $|Q_Q|$ é transferida em forma de calor da fonte quente a uma temperatura $T_Q$ para a substância de trabalho. Uma energia $|Q_F|$ é transferida em forma de calor da substância de trabalho para a fonte fria à temperatura $T_F$. Um trabalho $W$ é realizado pela máquina térmica (na realidade, pela substância de trabalho) sobre o ambiente.

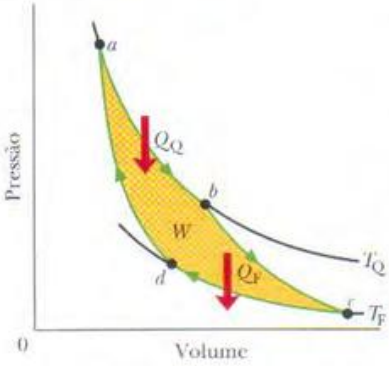



FIG. 20-9 Um diagrama pressão-volume do ciclo seguido pela substância de trabalho da máquina de Carnot da Fig. 20-8. O ciclo é formado por duas isotermas (*ab* e *cd*) e duas adiabáticas (*bc* e *da*). A área sombreada limitada pelo ciclo é igual ao trabalho *W* por ciclo realizado pela máquina de Carnot.

o peso que o êmbolo sustenta. Este trabalho é representado na Fig. 20-9 pela área sob a curva *abc*. Durante os processos consecutivos *cd* e *da* a substância de trabalho está sendo comprimida, o que significa que está realizando trabalho negativo sobre o ambiente ou, o que significa o mesmo, que o ambiente está realizando trabalho sobre a substância de trabalho enquanto o êmbolo desce. Este trabalho é representado pela área sob a curva *cda*. O *trabalho líquido por ciclo*, que é representado por *W* nas Figs. 20-8 e 20-9, é a diferença entre as duas áreas e é uma grandeza positiva, igual à área limitada pelo ciclo *abcda* da Fig. 20-9. Este trabalho *W* é realizado sobre um objeto externo, como uma carga a ser levantada.

A Eq. 20-1 ($\Delta S = \int dQ/T$) nos diz que qualquer transferência de energia na forma de calor envolve uma variação de entropia. Para ilustrar as variações de entropia de uma máquina de Carnot podemos plotar o ciclo de Carnot em um diagrama temperatura-entropia (*T*-*S*), como mostra a Fig. 20-10. Os pontos indicados pelas letras *a*, *b*, *c* e *d* na Fig. 20-10 correspondem aos pontos indicados pelas mesmas letras no diagrama *p*-*V* da Fig. 20-9. As duas retas horizontais na Fig. 20-10 correspondem aos dois processos isotérmicos do ciclo de Carnot (pois a temperatura é constante). O processo *ab* é a expansão isotérmica do ciclo. Enquanto a substância de trabalho absorve (reversivelmente) um calor $|Q_Q|$ à temperatura constante $T_Q$ durante a expansão, sua entropia aumenta. Da mesma forma, durante a compressão isotérmica *cd* a substância de trabalho perde (reversivelmente) um calor $|Q_F|$ à temperatura constante $T_F$ e sua entropia diminui.

As duas retas verticais da Fig. 20-10 correspondem aos dois processos adiabáticos do ciclo de Carnot. Como nenhum calor é transferido durante os dois processos, a entropia da substância de trabalho permanece constante.

**O Trabalho** Para calcular o trabalho realizado por uma máquina de Carnot durante um ciclo, vamos aplicar a Eq. 18-26, a primeira lei da termodinâmica ($\Delta E_{int} = Q - W$), à substância de trabalho. Esta substância deve retornar repetidamente a qualquer estado do ciclo escolhido arbitrariamente. Assim, se *X* representa qualquer propriedade de estado da substância de trabalho, como pressão, temperatura, volume, energia interna ou entropia, devemos ter $\Delta X = 0$ para o ciclo completo. Segue-se que $\Delta E_{int} = 0$ para um ciclo completo da substância de trabalho. Lembrando que *Q* na Eq. 18-26 é o calor *líquido* transferido por ciclo e *W* é o trabalho *líquido* resultante, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica para o ciclo de Carnot na forma

$$W = |Q_Q| - |Q_F|. \tag{20-8}$$

**Variações de Entropia** Em uma máquina de Carnot existem *duas* (e apenas duas) transferências de energia reversíveis na forma de calor e, portanto, duas variações da entropia da substância de trabalho, uma à temperatura $T_Q$ e outra à temperatura $T_F$. A variação líquida de entropia por ciclo é dada por

$$\Delta S = \Delta S_Q + \Delta S_F = \frac{|Q_Q|}{T_Q} - \frac{|Q_F|}{T_F} \tag{20-9}$$

onde $\Delta S_Q$ é positiva, já que uma energia $|Q_Q|$ é *adicionada* à substância de trabalho na forma de calor (o que representa um aumento de entropia) e $\Delta S_F$ é negativa, pois uma energia $|Q_F|$ é *removida* da substância de trabalho na forma de calor (o que representa uma diminuição de entropia). Como a entropia é uma função de estado, devemos ter $\Delta S = 0$ para o ciclo completo. Fazendo $\Delta S = 0$ na Eq. 20-9, temos:

$$\frac{|Q_Q|}{T_Q} = \frac{|Q_F|}{T_F} \tag{20-10}$$

Note que, como $T_Q > T_F$, temos $|Q_Q| > |Q_F|$, ou seja, mais energia é extraída na forma de calor da fonte quente do que fornecida à fonte fria.

Vamos agora usar as Eqs. 20-8 e 20-10 para deduzir uma expressão para a eficiência de uma máquina de Carnot.

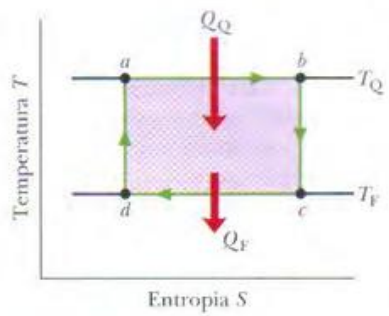



FIG. 20-10 O ciclo de Carnot da Fig. 20-9 mostrado em um diagrama temperatura-entropia. Durante os processos *ab* e *cd* a temperatura permanece constante. Durante os processos *bc* e *da* a entropia permanece constante.

## Eficiência de uma Máquina de Carnot

No uso prático de qualquer máquina térmica existe interesse em transformar em trabalho a maior parte possível da energia disponível $Q_Q$. O êxito nessa empreitada é medido através da chamada **eficiência térmica** ($\varepsilon$), definida como o trabalho que a máquina realiza por ciclo ("energia utilizada") dividido pela energia que recebe em forma de calor por ciclo ("energia adquirida"):

$$\varepsilon = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|W|}{|Q_Q|} \quad \text{(eficiência, qualquer máquina térmica).} \qquad (20\text{-}11)$$

No caso de uma máquina de Carnot podemos substituir $W$ pelo seu valor, dado pela Eq. 20-8, e escrever a Eq. 20-11 na forma

$$\varepsilon_C = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{Q_Q} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_Q|}. \qquad (20\text{-}12)$$

Combinando as Eqs. (20-12) e (20-10), obtemos

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_F}{T_Q} \quad \text{(eficiência, máquina de Carnot).} \qquad (20\text{-}13)$$

onde as temperaturas $T_F$ e $T_Q$ estão em kelvins. Como $T_F < T_Q$, a máquina de Carnot tem necessariamente uma eficiência térmica menor que a unidade, ou seja, menor que 100%. Este fato está indicado na Fig. 20-8, que mostra que apenas parte da energia extraída como calor da fonte quente é usada para realizar trabalho; o restante é transferido para a fonte fria. Mostraremos na Seção 20-7 que nenhuma máquina real pode ter uma eficiência térmica maior que a prevista pela Eq. 20-13.

Os inventores estão sempre procurando aumentar a eficiência das máquinas térmicas reduzindo a quantidade de energia $|Q_B|$ que é "jogada fora" em cada ciclo. O sonho dos inventores é produzir a *máquina térmica perfeita*, mostrada esquematicamente na Fig. 20-11, na qual $|Q_F|$ é zero e $|Q_Q|$ é convertido totalmente em trabalho. Se uma máquina desse tipo fosse instalada em um navio, por exemplo, poderia extrair o calor da água e usá-lo para acionar as hélices, sem nenhum consumo de combustível. Um automóvel equipado com um motor desse tipo poderia extrair calor do ar e usá-lo para movimentar o carro, novamente sem nenhum consumo de combustível. Infelizmente, a máquina perfeita é apenas um sonho: examinando a Eq. 20-13, vemos que só seria possível trabalhar com 100% de eficiência (ou seja, com $\varepsilon = 1$) se $T_F = 0$ ou $T_Q = \infty$, condições impossíveis de serem satisfeitas na prática. Na verdade, a experiência levou à seguinte versão alternativa da segunda lei da termodinâmica que, em última análise, equivale a dizer que *nenhuma máquina térmica é perfeita*:

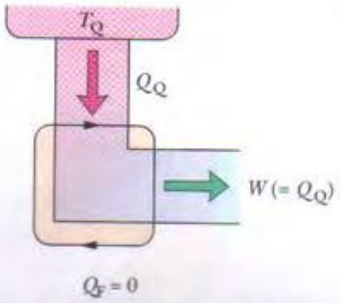



FIG. 20-11 Os elementos de uma máquina térmica perfeita, ou seja, uma máquina que converte calor $Q_Q$ de uma fonte quente diretamente em trabalho $W$ com 100% de eficiência.

Não existe uma série de processos cujo único resultado seja a conversão total em trabalho da energia contida em uma fonte de calor.

Para resumir: A eficiência térmica dada pela Eq. 20-13 se aplica apenas às máquinas de Carnot. As máquinas reais, nas quais os processos que formam o ciclo da máquina não são reversíveis, têm uma eficiência menor. De acordo com a Eq. 20-13, se seu carro fosse movido por uma máquina de Carnot a eficiência seria de aproximadamente 55%; na prática, essa eficiência é provavelmente da ordem de 25%. Uma usina nuclear (Fig. 20-12), considerada como um todo, é uma máquina térmica. Ela extrai energia em forma de calor do núcleo de um reator, realiza trabalho por meio de uma turbina e descarrega energia em forma de calor em um rio ou no mar. Se uma usina nuclear operasse como uma máquina de Carnot sua eficiência seria de cerca de 40%; na prática, a eficiência é da ordem de 30%. No projeto de máquinas térmicas de qualquer tipo é simplesmente impossível superar o limite de eficiência imposto pela Eq. 20-13.

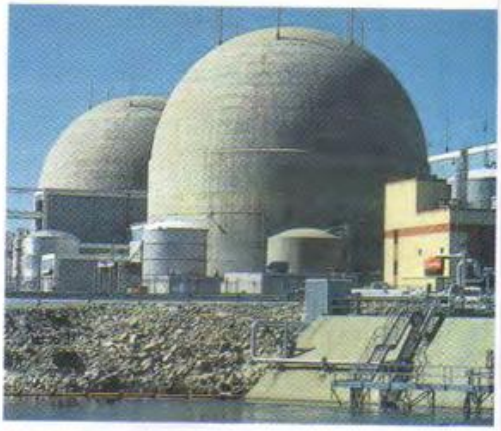


FIG. 20-12 A usina nuclear de North Anna, perto de Charlottesville, Virginia, que gera energia elétrica a uma taxa de 900 MW. Ao mesmo tempo, por projeto, descarrega energia em um rio próximo a uma taxa de 2100 MW. Esta usina e todas as usinas semelhantes descartam mais energia do que fornecem em forma útil. São as versões realistas da máquina térmica ideal da Fig. 20-8. *(©Robert Ustinich)*

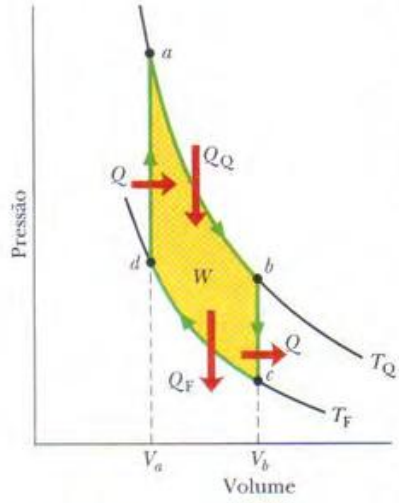



FIG. 20-13 Diagrama $p$-$V$ da substância de trabalho de uma máquina de Stirling ideal, supondo, por conveniência, que a substância de trabalho seja um gás ideal.

## A Máquina de Stirling

A Eq. 20-13 não se aplica a todas as máquinas ideais, mas somente às que funcionam segundo um ciclo como o da Fig. 20-9, ou seja, as máquinas de Carnot. A Fig. 20-13 mostra, por exemplo, o ciclo de operação de uma **máquina de Stirling** ideal. Uma comparação com o ciclo de Carnot da Fig. 20-9 mostra que as duas máquinas possuem transferências de calor isotérmicas nas temperaturas $T_Q$ e $T_F$. Entretanto, as duas isotermas do ciclo da máquina de Stirling não são ligadas por processos adiabáticos, como na máquina de Carnot, mas por processos a volume constante. Para aumentar reversivelmente a temperatura de um gás a volume constante de $T_F$ para $T_Q$ (processo *da* na Fig. 20-13) é preciso transferir energia na forma de calor para a substância de trabalho a partir de uma fonte cuja temperatura possa variar suavemente entre esses limites. Além disso, uma transferência no sentido inverso é necessária para executar o processo *bc*. Assim, transferências reversíveis de calor (e variações correspondentes da entropia) ocorrem em todos os quatro processos que formam o ciclo de uma máquina de Stirling, e não apenas em dois processos, como em uma máquina de Carnot. Assim, a dedução que leva à Eq. 20-13 não se aplica a uma máquina ideal de Stirling. Na verdade, a eficiência de uma máquina ideal de Stirling é menor que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas. As máquinas de Stirling reais possuem uma eficiência ainda menor.

A máquina de Stirling foi inventada em 1816 por Robert Stirling. Essa máquina, que foi ignorada durante muito tempo, hoje está sendo desenvolvida para uso em automóveis e naves espaciais. Uma máquina de Stirling com uma potência de 5000 cv (3,7 MW) já foi construída. Como são muito silenciosas, as máquinas de Stirling são usadas em alguns submarinos militares.

✓ **TESTE 3** Três máquinas de Carnot operam entre fontes de calor a temperaturas de (a) 400 e 500 K, (b) 600 e 800 K e (c) 400 e 600 K. Ordene as máquinas de acordo com sua eficiência, em ordem decrescente.

## Exemplo 20-4

Uma máquina de Carnot opera entre as temperaturas $T_Q = 850$ K e $T_F = 300$ K. A máquina realiza 1200 J de trabalho em cada ciclo, que leva 0,25 s. (a) Qual é a eficiência da máquina?

**IDÉIA-CHAVE** A eficiência $\varepsilon$ de uma máquina de Carnot depende apenas da razão $T_F/T_Q$ das temperaturas (em kelvins) das fontes de calor às quais está ligada.

***Cálculo:*** De acordo com a Eq. 20-13,

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{300\text{ K}}{850\text{ K}} = 0{,}647 \approx 65\%. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a potência média da máquina?

**IDÉIA-CHAVE** A potência média $P$ de uma máquina é a razão entre o trabalho $W$ realizado por ciclo e o tempo de duração $t$ de cada ciclo.

***Cálculo:*** Para esta máquina de Carnot, temos:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1200\text{ J}}{0{,}25\text{ s}} = 4800\text{ W} = 4{,}8\text{ kW} \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a energia $|Q_Q|$ extraída em forma de calor da fonte quente a cada ciclo?

**IDÉIA-CHAVE** Para qualquer máquina térmica, incluindo as máquinas de Carnot, a eficiência $\varepsilon$ é a razão entre o trabalho $W$ realizado por ciclo e a energia $|Q_Q|$ extraída em forma de calor da fonte quente por ciclo ($\varepsilon = W/|Q_Q|$).

***Cálculo:*** Temos:

$$|Q_Q| = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{1200\text{ J}}{0{,}647} = 1855\text{ J} \qquad \text{(Resposta)}$$

(d) Qual é a energia $|Q_F|$ liberada em forma de calor para a fonte fria a cada ciclo?

**IDÉIA-CHAVE** Em uma máquina de Carnot o trabalho $W$ realizado por ciclo é igual à diferença entre as energias transferidas em forma de calor: $|Q_Q| - |Q_F|$, como na Eq. 20-8.

***Cálculo:*** Temos:

$$|Q_F| = |Q_Q| - W$$
$$= 1855\text{ J} - 1200\text{ J} = 655\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(e) De quanto varia a entropia da substância de trabalho devida à energia recebida da fonte quente? De quanto varia a entropia da substância de trabalho devida à energia cedida à fonte fria?

**IDÉIA-CHAVE** A variação de entropia $\Delta S$ durante a transferência de energia em forma de calor $Q$ a uma temperatura constante $T$ é dada pela Eq. 20-2 ($\Delta S = Q/T$).

***Cálculos:*** Para a transferência *positiva* de uma energia $Q_Q$ da fonte quente a uma temperatura $T_Q$, a variação de entropia da substância de trabalho é

$$\Delta S_Q = \frac{Q_Q}{T_Q} = \frac{1855\,\text{J}}{850\,\text{K}} = +2{,}18\,\text{J/K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para a transferência *negativa* de uma energia $Q_F$ para a fonte fria a uma temperatura $T_F$ temos:

$$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} = \frac{-655\,\text{J}}{300\,\text{K}} = -2{,}18\,\text{J/K} \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a variação líquida de entropia da substância de trabalho para um ciclo completo é zero, como já foi discutido na dedução da Eq. 20-10.

## Exemplo 20-5

Um inventor afirma que construiu um motor que apresenta uma eficiência de 75% quando opera entre as temperaturas de ebulição e congelamento da água. Isso é possível?

**IDÉIA-CHAVE** A eficiência de uma máquina térmica real (com seus processos irreversíveis e perdas nas transferências de energia) é sempre menor que a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas.

***Cálculo:*** De acordo com a Eq. 20-13, a eficiência de uma máquina de Carnot que opera entre os pontos de ebulição e congelamento da água é

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{(0+273)\,\text{K}}{(100+273)\,\text{K}} = 0{,}268 \approx 27\%$$

Assim, a eficiência alegada de 75% para uma máquina real que opera entre as temperaturas dadas é impossível.

### TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 1:*** *A Linguagem da Termodinâmica* Os textos de física e de engenharia que tratam da termodinâmica às vezes utilizam uma linguagem expressiva, mas pouco precisa. Dizem que o valor calor é adicionado, absorvido, subtraído, extraído, rejeitado, descarregado, descartado, removido, fornecido, ganho, perdido, transferido ou expelido, ou que flui de um corpo para outro (como se fosse um líquido). Afirmam que um corpo *possui* calor (como se calor fosse uma substância) ou que o calor que uma substância possui aumenta ou diminui. O leitor deve ter sempre em mente o significado da palavra *calor* na física e na engenharia:

> Calor é a energia transferida de um corpo para outro devido a uma diferença entre as temperaturas dos corpos.

Quando identificamos um dos corpos como sendo nosso sistema de interesse, qualquer transferência de energia para o corpo é considerada um calor positivo $Q$, e qualquer transferência para fora do sistema é considerada um calor negativo $Q$.

O termo *trabalho* também requer uma atenção especial. Alguns livros afirmam que o trabalho é produzido, combinado com o calor ou gerado a partir do calor. O leitor deve ter sempre em mente o significado da palavra *trabalho* na física e na engenharia:

> Trabalho é a energia transferida de um corpo para outro devida a uma força que age entre eles.

Quando identificamos um dos corpos como sendo nosso sistema de interesse qualquer transferência de energia para fora do sistema corresponde a um trabalho positivo $W$ realizado *pelo* sistema ou a um trabalho negativo $W$ realizado *sobre* o sistema. Qualquer transferência de energia para dentro do sistema corresponde a um trabalho negativo realizado *pelo* sistema ou a um trabalho positivo realizado *sobre* o sistema. (A preposição é importante.) É óbvio que existe uma grande margem para confusão; sempre que você vir a palavra *trabalho*, preste muita atenção no que realmente está sendo dito.

## 20-6 | Entropia no Mundo Real: Refrigeradores

Um **refrigerador** é um dispositivo que utiliza trabalho para transferir energia de uma fonte fria para uma fonte quente enquanto o dispositivo repete uma série de processos termodinâmicos. Em um refrigerador doméstico, por exemplo, o trabalho é realizado por um compressor elétrico para transferir energia do compartimento onde são guardados os alimentos (a fonte fria) para o ambiente (a fonte quente).

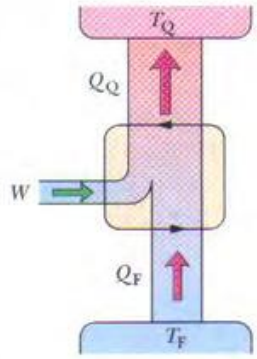



FIG. 20-14 Os elementos de um refrigerador. As duas setas pretas no centro sugerem uma substância de trabalho operando ciclicamente, como se se tratasse de um diagrama $p$-$V$. Uma energia $Q_F$ é transferida em forma de calor da fonte fria para a substância de trabalho. Uma energia $Q_Q$ é transferida em forma de calor da substância de trabalho para a fonte quente. Um trabalho $W$ é realizado sobre o refrigerador (na realidade, sobre a substância de trabalho) pelo ambiente.

Os aparelhos de ar condicionado e os aquecedores de ambiente também são refrigeradores, a diferença está apenas na natureza das fontes quente e fria. No caso dos aparelhos de ar condicionado a fonte fria é o aposento a ser resfriado, e a fonte quente (supostamente a uma temperatura mais alta) é o lado de fora do aposento. Um aquecedor de ambiente é um aparelho de ar condicionado operado em sentido inverso para aquecer um aposento; nesse caso, o aposento passa a ser a fonte quente, e o calor é transferido para ele a partir do lado de fora (supostamente a uma temperatura mais baixa).

Considere um *refrigerador ideal*:

Em um refrigerador ideal, todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência.

A Fig. 20-14 mostra os elementos básicos de um refrigerador ideal. Observe que o sentido de operação é o inverso do sentido de operação da máquina de Carnot da Fig. 20-8. Em outras palavras, todas as transferências de energia, tanto em forma de calor como em forma de trabalho, ocorrem no sentido oposto ao de uma máquina de Carnot. Podemos chamar esse refrigerador ideal de **refrigerador de Carnot**.

O projetista de um refrigerador está interessado em extrair a maior quantidade de energia $|Q_F|$ possível da fonte fria (energia utilizada) usando a menor quantidade possível de trabalho $|W|$ (energia adquirida). Uma medida da eficiência de um refrigerador é, portanto,

$$K = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|Q_F|}{|W|} \qquad \begin{matrix}\text{(coeficiente de desempenho,}\\ \text{qualquer refrigerador),}\end{matrix} \qquad (20\text{-}14)$$

onde $K$ é chamado de *coeficiente de desempenho*. Para um refrigerador de Carnot, a primeira lei da termodinâmica nos dá $|W| = |Q_Q| - |Q_F|$, onde $|Q_Q|$ é o valor absoluto da energia transferida como calor para a fonte quente. Nesse caso, a Eq. 20-14 assume a forma

$$K_C = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} \qquad (20\text{-}15)$$

Como um refrigerador de Carnot é uma máquina de Carnot operando no sentido inverso, podemos combinar a Eq. 20-10 com a Eq. 20-15; depois de algumas operações algébricas, obtemos

$$K_C = \frac{T_F}{T_Q - T_F} \qquad \begin{matrix}\text{(coeficiente de desempenho,}\\ \text{refrigerador de Carnot).}\end{matrix} \qquad (20\text{-}16)$$

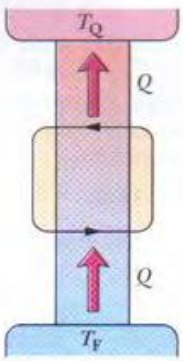



FIG. 20-15 Os elementos de um refrigerador perfeito, ou seja, um refrigerador que transfere energia de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho.

No caso dos aparelhos domésticos de ar condicionado, $K \approx 2{,}5$. No caso das geladeiras domésticas, $K \approx 5$. Infelizmente, o valor de $K$ é maior quando as temperaturas das duas fontes estão próximas. É por isso que os aquecedores de ambiente funcionam melhor nos países de clima temperado do que nos países de clima frio, onde a temperatura externa é muito menor do que a temperatura interna desejada.

Seria ótimo ter um refrigerador que não precisasse de trabalho, ou seja, que funcionasse sem estar ligado na tomada. A Fig. 20-15 mostra outro "sonho de inventor", um *refrigerador perfeito* que transfere energia na forma de calor $Q$ de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho. Como o equipamento opera em ciclos, a entropia da substância de trabalho não varia durante um ciclo completo. Entretanto, as entropias das duas fontes variam: a variação de entropia da fonte fria é $-|Q|/T_F$ e a variação de entropia da fonte quente é $+|Q|/T_Q$. Assim, a variação líquida de entropia para o sistema como um todo é

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_F} + \frac{|Q|}{T_Q}$$

Como $T_Q > T_F$, o lado direito desta equação é negativo e, portanto, a variação líquida da entropia por ciclo para o sistema fechado *refrigerador + fonte* também é negativa. Como essa diminuição de entropia viola a segunda lei da termodinâmica (Eq. 20-5), não existe um refrigerador perfeito. (Seu refrigerador só funciona se for ligado à tomada.)

Este resultado nos leva a uma outra formulação (equivalente) da segunda lei da termodinâmica:

**Não existe uma série de processos cujo único resultado seja transferir energia na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente.**

Em suma: *não existem refrigeradores perfeitos.*

**TESTE 4** Um refrigerador ideal funciona com um certo coeficiente de desempenho. Quatro mudanças são possíveis: (a) operar com o interior do aparelho a uma temperatura ligeiramente mais alta, (b) operar com o interior do aparelho a uma temperatura ligeiramente mais baixa, (c) levar o aparelho para um aposento ligeiramente mais quente e (d) levar o aparelho para um aposento ligeiramente mais frio. Os valores absolutos das variações de temperatura são os mesmos nos quatro casos. Ordene as mudanças de acordo com o valor do novo coeficiente de desempenho, em ordem decrescente.

## 20-7 | A Eficiência de Máquinas Térmicas Reais

Seja $\varepsilon_C$ a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre duas temperaturas dadas. Nesta seção mostraremos que nenhuma máquina térmica real operando entre as mesmas temperaturas pode ter uma eficiência maior do que $\varepsilon_C$. Se isso fosse possível, a máquina violaria a segunda lei da termodinâmica.

Vamos supor que um inventor, trabalhando na garagem de casa, tenha construído uma máquina $X$ que, segundo ele, possui uma eficiência $\varepsilon_X$ maior do que $\varepsilon_C$:

$$\varepsilon_X > \varepsilon_C \qquad \text{(alegação do inventor).} \tag{20-17}$$

Vamos acoplar a máquina $X$ a um refrigerador de Carnot, como na Fig. 20-16*a*. Ajustamos os tempos do refrigerador de Carnot para que o trabalho necessário por ciclo seja exatamente igual ao executado pela máquina $X$. Assim, não existe nenhum trabalho (externo) associado à combinação *máquina térmica + refrigerador* da Fig. 20-16*a*, que tomamos como sendo nosso sistema.

Se a Eq. 20-17 for verdadeira, de acordo com a definição de eficiência (Eq. 20-11) devemos ter

$$\frac{|W|}{|Q'_Q|} > \frac{|W|}{|Q_Q|},$$

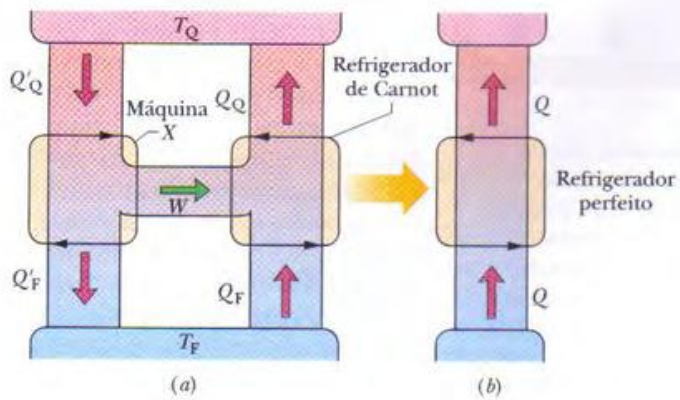



FIG. 20-16 (*a*) A máquina térmica $X$ alimenta um refrigerador de Carnot. (*b*) Se, como alega o inventor, a máquina $X$ é mais eficiente que a máquina de Carnot, a combinação mostrada em (*a*) é equivalente ao refrigerador perfeito mostrado em (*b*). Como isso viola a segunda lei da termodinâmica, concluímos que a máquina $X$ *não pode* ser mais eficiente que uma máquina de Carnot.

onde a plica indica a máquina $X$, e o lado direito da desigualdade é a eficiência do refrigerador de Carnot quando funciona como uma máquina térmica. Esta desigualdade exige que

$$|Q_Q| > |Q'_Q|. \tag{20-18}$$

Como o trabalho realizado pela máquina $X$ é igual ao trabalho realizado sobre o refrigerador de Carnot, temos, segundo a primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. 20-8,

$$|Q_Q| - |Q_F| = |Q'_Q| - |Q'_F|,$$

que pode ser escrita na forma

$$|Q_Q| - |Q'_Q| = |Q_F| - |Q'_F| = Q. \tag{20-19}$$

De acordo com a Eq. 20-18, o valor de $Q$ na Eq. 20-19 deve ser positivo.

De acordo com a Eq. 20-19 e a Fig. 20-16, o efeito da máquina $X$ e do refrigerador de Carnot, trabalhando em conjunto, é transferir uma energia $Q$ na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho. Assim, a combinação age como o refrigerador perfeito da Fig. 20-15, cuja existência viola a segunda lei da termodinâmica.

Algo deve estar errado com uma ou mais de nossas suposições, e a única que foi tomada arbitrariamente foi aquela expressa pela Eq. 20-17. A conclusão é que *nenhuma máquina real pode ter uma eficiência maior que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas.* Na melhor das hipóteses, a máquina real pode ter uma eficiência igual à de uma máquina de Carnot. Nesse caso, a máquina real *é* uma máquina de Carnot.

## 20-8 | Uma Visão Estatística da Entropia

Como vimos no Capítulo 19, as propriedades macroscópicas dos gases podem ser explicadas em termos do comportamento das moléculas que os compõem. Assim, por exemplo, a pressão exercida por um gás sobre as paredes de um recipiente pode ser descrita em termos das transferências de momento para essas paredes através das colisões das moléculas do gás. Essas explicações fazem parte de um campo de estudo conhecido como **mecânica estatística**.

Vamos agora concentrar nossa atenção em apenas um problema, o da distribuição das moléculas de um gás entre os dois lados de uma caixa isolada. Este problema é razoavelmente fácil de analisar e permite usar a mecânica estatística para calcular a variação de entropia durante a expansão livre de um gás ideal. Como vamos ver no Exemplo 20-7, a mecânica estatística fornece o mesmo resultado que foi obtido no Exemplo 20-1 usando os princípios da termodinâmica.

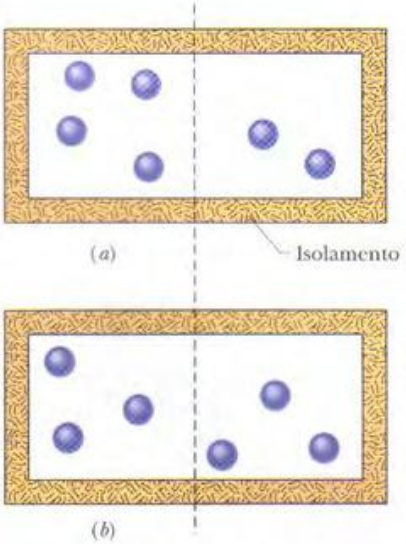



FIG. 20-17 Uma caixa isolada contém seis moléculas de um gás. Cada molécula tem a mesma probabilidade de estar no lado esquerdo ou no lado direito da caixa. O arranjo mostrado em (*a*) corresponde à configuração III da Tabela 20-1, e o arranjo mostrado em (*b*) corresponde à configuração IV.

A Fig. 20-17 mostra uma caixa que contém seis moléculas iguais (e, portanto, indistinguíveis) de um gás. Em um instante qualquer uma dada molécula está no lado esquerdo ou no lado direito da caixa; como os dois lados têm o mesmo volume, a probabilidade de que a molécula esteja no lado esquerdo é igual a um meio, e a probabilidade de que esteja no lado direito também é um meio.

A Tabela 20-1 mostra as sete *configurações* possíveis das seis moléculas, identificadas por algarismos romanos. Por exemplo: na configuração I, as seis moléculas estão no lado esquerdo ($n_1 = 6$) e nenhuma está no lado direito ($n_2 = 0$). É fácil ver que, em vários casos, uma configuração pode ser obtida de várias formas diferentes. Esses diferentes arranjos das moléculas são chamados *microestados*. Vejamos como calcular o número de microestados que correspondem a uma mesma configuração.

Suponha que temos $N$ moléculas, distribuídas com $n_1$ moléculas em um lado da caixa e $n_2$ no outro. (Naturalmente, $n_1 + n_2 = N$.) Imagine que as moléculas sejam distribuídas "manualmente", uma de cada vez. Se $N = 6$, podemos selecionar a primeira molécula de seis formas diferentes, ou seja, podemos escolher qualquer uma das seis moléculas para colocar na primeira posição da configuração. Podemos selecionar a segunda molécula de cinco formas diferentes, escolhendo qualquer uma das

**TABELA 20-1**

**Seis Moléculas em uma Caixa**

| Configuração Número | $n_1$ | $n_2$ | Multiplicidade $W$ (número de microestados) | Cálculo de $W$ (Eq. 20-20) | Entropia $10^{-23}$ J/K (Eq. 20-21) |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 6 | 0 | 1 | 6!/(6! 0!) = 1 | 0 |
| II | 5 | 1 | 6 | 6!/(5! 1!) = 6 | 2,47 |
| III | 4 | 2 | 15 | 6!/(4! 2!) = 15 | 3,74 |
| IV | 3 | 3 | 20 | 6!/(3! 3!) = 20 | 4,13 |
| V | 2 | 4 | 15 | 6!/(2! 4!) = 15 | 3,74 |
| VI | 1 | 5 | 6 | 6!/(1! 5!) = 6 | 2,47 |
| VII | 0 | 6 | 1 | 6!/(0! 6!) = 1 | 0 |
| | | | Total = 64 | | |

cinco moléculas restantes; e assim por diante. O número total de formas pelas quais podemos escolher as seis moléculas é o produto dessas formas independentes, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Em notação matemática, escrevemos este produto como $6! = 720$, onde $6!$ é lido como "seis fatorial". A maioria das calculadoras permite calcular fatoriais. Para uso futuro, você precisa saber que $0! = 1$. (Verifique na sua calculadora.)

Como as moléculas são indistinguíveis, estes 720 arranjos não são todos diferentes. No caso em que $n_1 = 4$ e $n_2 = 2$ (a configuração III na Tabela 20-1), por exemplo, a ordem em que as quatro moléculas são colocadas em um dos lados da caixa não importa, pois após as quatro moléculas terem sido colocadas é impossível determinar a ordem em que foram colocadas. O número de formas diferentes de ordenar as quatro moléculas é $4! = 24$. Analogamente, o número de formas de ordenar as duas moléculas no outro lado da caixa é $2! = 2$. Para determinar o número de arranjos *diferentes* que levam à divisão (4, 2) que define a configuração III, devemos dividir 720 por 24 e também por 2. Chamamos o valor resultante, que é o número de microestados que correspondem a uma configuração, de multiplicidade $W$ dessa configuração. Assim, para a configuração III,

$$W_{\text{III}} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{720}{24 \times 2} = 15.$$

É por isso que a Tabela 20-1 nos diz que existem 15 microestados independentes que correspondem à configuração III. Note que, como também pode ser visto na tabela, o número total de microestados para as sete configurações é 64.

Extrapolando de seis moléculas para o caso geral de $N$ moléculas, temos:

$$W = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} \quad \text{(multiplicidade da configuração).} \tag{20-20}$$

O leitor pode verificar que a Eq. 20-20 fornece as multiplicidades de todas as configurações que aparecem na Tabela 20-1.

A hipótese fundamental da mecânica estatística é a seguinte:

**Todos os microestados são igualmente prováveis.**

Em outras palavras, se tirássemos muitas fotografias das seis moléculas enquanto se movem na caixa da Fig. 20-17 e contássemos o número de vezes que cada microestado aconteceu, verificaríamos que os 64 microestados aconteceram com a mesma freqüência. Assim, o sistema passa, em média, a mesma quantidade de tempo em cada um dos 64 microestados.

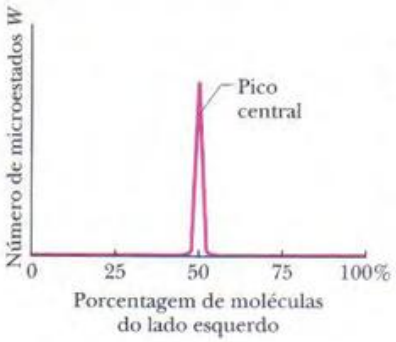



FIG. 20-18 Gráfico do número de microestados em função da porcentagem de moléculas do lado esquerdo da caixa, para um número *grande* de moléculas. Praticamente todos os microestados correspondem a um número aproximadamente igual de moléculas nos dois lados da caixa; esses microestados formam o *pico central* do gráfico. Para $N \approx 10^{22}$, o pico central é tão estreito que não pode ser desenhado no gráfico.

Como todos os microestados são igualmente prováveis e as configurações diferentes podem ter um número diferente de microestados, nem todas as configurações são igualmente prováveis. Na Tabela 20-1 a configuração IV, com 20 microestados, é a *configuração mais provável*, com uma probabilidade de 20/64 = 0,313. Isso significa que o sistema se encontra na configuração IV 31,3% do tempo. As configurações I e VII, nas quais todas as moléculas se encontram em um lado da caixa, são as menos prováveis, com uma probabilidade 1/64 = 0,016, ou 1,6% cada uma. Não é de espantar que a configuração mais provável seja aquela em que as moléculas estão igualmente divididas entre os dois lados da caixa, pois é o que esperamos que aconteça em equilíbrio térmico. Entretanto, *é* surpreendente que exista uma probabilidade *finita*, embora pequena, de que as seis moléculas se juntem em um lado da caixa, deixando o outro lado vazio.

Para grandes valores de $N$ existe um número extremamente grande de microestados, mas praticamente todos os microestados, como mostra a Fig. 20-18, pertencem à configuração na qual as moléculas estão divididas igualmente nos dois lados da caixa. Mesmo que os valores medidos da temperatura e pressão do gás permaneçam constantes o gás está em constante agitação, com as moléculas "visitando" todos os microestados prováveis com a mesma probabilidade. Entretanto, como muito poucos microestados estão fora do pico central da Fig. 20-18, podemos supor que as moléculas do gás se dividem igualmente entre os dois lados da caixa. Como vamos ver daqui a pouco, esta é a configuração para a qual a entropia é máxima.

## Exemplo 20-6

Suponha que existam 100 moléculas indistinguíveis na caixa da Fig. 20-17. Quantos microestados possui a configuração $n_1 = 50$ e $n_2 = 50$, e quantos estados possui a configuração $n_1 = 100$ e $n_2 = 0$? Interprete os resultados em termos das probabilidades relativas das duas configurações.

**IDÉIA-CHAVE** A multiplicidade $W$ de uma configuração de moléculas indistinguíveis em uma caixa fechada é o número de microestados independentes com essa configuração, dado pela Eq. 20-20.

***Cálculos:*** Para a configuração (50, 50), a Eq. 20-20 nos dá

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = \frac{100!}{50!50!}$$
$$= \frac{9{,}33\times10^{157}}{(3{,}04\times10^{64})(3{,}04\times10^{64})}$$
$$= 1{,}01 \times 10^{29}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para a configuração (100, 0), temos:

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = \frac{100!}{100!\,0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{(Resposta)}$$

***O significado:*** Assim, uma distribuição 50-50 é mais provável que uma distribuição 100-0 por um fator enorme, da ordem de $1 \times 10^{29}$. Se pudéssemos contar, à razão de um por nanossegundo, o número de microestados que correspondem à distribuição 50-50, levaríamos cerca de $3 \times 10^{12}$ anos, um tempo 200 vezes maior que a idade do universo. É preciso não esquecer que o número de moléculas (100) que usamos neste exemplo é extremamente pequeno (ou seja, corresponde a um gás extremamente diluído). Imagine qual seria a diferença entre essas probabilidades se usássemos um número mais realista para o número de moléculas, como $N = 10^{24}$. Assim, o leitor não precisa se preocupar com a possibilidade de todas as moléculas do ar se agruparem de repente do outro lado da sala, deixando-o sufocado.

## Probabilidade e Entropia

Em 1877, o físico austríaco Ludwig Boltzmann (o mesmo da constante de Boltzmann $k$) encontrou uma relação entre a entropia $S$ de uma configuração de um gás e a multiplicidade $W$ dessa configuração. A relação é a seguinte:

$$S = k \ln W \qquad \text{(equação da entropia de Boltzmann).} \qquad (20\text{-}21)$$

Esta fórmula famosa está gravada no túmulo de Boltzmann.

É natural que $S$ e $W$ estejam relacionadas através de uma função logarítmica. A entropia total de dois sistemas é a *soma* das entropias individuais. A probabilidade

de ocorrência de dois eventos independentes é o *produto* das probabilidades individuais. Como $\ln ab = \ln a + \ln b$, o logaritmo é a forma lógica de estabelecer uma ligação entre essas grandezas.

A Tabela 20-1 mostra as entropias das configurações do sistema de seis moléculas da Fig. 20-17, calculadas usando a Eq. 20-21. A configuração IV, que possui a maior multiplicidade, possui também a maior entropia.

Quando usamos a Eq. 20-20 para determinar o valor de $W$, a calculadora pode exibir uma mensagem de erro se tentamos obter o fatorial de um número maior que algumas centenas. Felizmente, existe uma aproximação muito boa, conhecida como **aproximação de Stirling**, não para $N!$, mas para $\ln N!$, que é exatamente o que precisamos na Eq. 20-21. A aproximação de Stirling é

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N \quad \text{(aproximação de Stirling).} \tag{20-22}$$

O Stirling dessa aproximação foi um matemático inglês e não Robert Stirling da máquina de Stirling.

✓ **TESTE 5** Uma caixa contém 1 mol de um gás. Considere duas configurações: (a) cada lado da caixa contém metade das moléculas e (b) cada terço da caixa contém um terço das moléculas. Qual das configurações possui mais microestados?

## Exemplo 20-7

No Exemplo 20-1 mostramos que quando $n$ mols de um gás ideal passam a ocupar o dobro do volume em uma expansão livre o aumento de entropia do estado inicial $i$ para o estado final $f$ é $S_f - S_i = nR \ln 2$. Mostre que este resultado está correto usando os métodos da mecânica estatística.

**IDÉIA-CHAVE** Podemos relacionar a entropia $S$ de qualquer configuração das moléculas de um gás à multiplicidade $W$ dos microestados dessa configuração usando a Eq. 20-21 ($S = k \ln W$).

***Cálculos:*** Estamos interessados em duas configurações: a configuração final $f$ (com as moléculas ocupando todo o volume do recipiente na Fig. 20-1*b*) e a configuração inicial $i$ (com as moléculas ocupando o lado esquerdo do recipiente). Como as moléculas estão em um recipiente fechado, podemos calcular a multiplicidade $W$ dos microestados usando a Eq. 20-20. Nesse caso, temos $N$ moléculas nos $n$ mols do gás. Inicialmente, com todas as moléculas no lado esquerdo do recipiente, a configuração $(n_1, n_2)$ é $(N,0)$. Assim, de acordo com a Eq. 20-20, temos:

$$W_i = \frac{N!}{N!0!} = 1.$$

Com as moléculas distribuídas por todo o volume, a configuração $(n_1, n_2)$ é $(N/2, N/2)$. De acordo com a Eq. 20-20, temos:

$$W_f = \frac{N!}{(N/2)!(N/2)!}.$$

De acordo com a Eq. 20-21, as entropias inicial e final são

$$S_i = k \ln W_i = k \ln 1 = 0$$

e

$$S_f = k \ln W_f = k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!]. \tag{20-23}$$

Para chegar à Eq. 20-23, usamos a relação

$$\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - 2 \ln b.$$

De acordo com a aproximação de Stirling (Eq. 20-22), temos:

$$\begin{aligned} S_f &= k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!] \\ &= k[N(\ln N) - N] - 2k[(N/2) \ln(N/2) - (N/2)] \\ &= k[N(\ln N) - N - N \ln(N/2) + N] \\ &= k[N(\ln N) - N(\ln N - \ln 2)] = Nk \ln 2. \end{aligned} \tag{20-24}$$

De acordo com a Eq. 19-8, podemos substituir $Nk$ por $nR$, onde $R$ é a constante universal dos gases. Nesse caso, a Eq. 20-24 se torna

$$S_f = nR \ln 2.$$

A variação na entropia do estado inicial para o estado final é, portanto,

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= nR \ln 2 - 0 \\ &= nR \ln 2, \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

como queríamos demonstrar. No Exemplo 20-1 calculamos este aumento de entropia para uma expansão livre a partir dos princípios da termodinâmica, encontrando um processo reversível equivalente e calculando a variação de entropia para *esse* processo em termos da temperatura e da transferência de calor. Neste exemplo calculamos a mesma variação de entropia a partir dos princípios da mecânica estatística, usando o fato de que o sistema é formado por moléculas. O fato é que duas abordagens muito diferentes fornecem exatamente a mesma resposta.

## REVISÃO E RESUMO

**Processos Unidirecionais** Um **processo irreversível** é aquele que não pode ser invertido por meio de pequenas mudanças no ambiente. O sentido no qual um processo irreversível ocorre é determinado pela *variação de entropia* $\Delta S$ do sistema no qual ocorre o processo. A entropia $S$ é uma *propriedade de estado* (ou *função de estado*) do sistema, ou seja, uma função que depende apenas do estado do sistema e não da forma como o sistema atinge esse estado. O *postulado da entropia* afirma (em parte) o seguinte: *se um processo irreversível acontece em um sistema fechado, a entropia do sistema sempre aumenta.*

**Cálculo da Variação de Entropia** A **variação de entropia** $\Delta S$ em um processo irreversível que leva um sistema de um estado inicial $i$ para um estado final $f$ é exatamente igual à variação de entropia $\Delta S$ de *qualquer processo reversível* que liga esses mesmos dois estados. Podemos calcular esta última (mas não a primeira) usando a equação

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}, \tag{20-1}$$

onde $Q$ é a energia absorvida ou cedida pelo sistema na forma de calor durante o processo e $T$ é a temperatura do sistema em kelvins durante o processo.

No caso de um processo isotérmico reversível, a Eq. 20-1 se reduz a

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T}. \tag{20-2}$$

Quando a variação de temperatura $\Delta T$ de um sistema é pequena em relação à temperatura (em kelvins) antes e depois do processo, a variação de entropia é dada aproximadamente por

$$\Delta S = S_f - S_i \approx \frac{Q}{T_{méd}}. \tag{20-3}$$

onde $T_{méd}$ é a temperatura média do sistema durante o processo.

Quando um gás ideal passa reversivelmente de um estado inicial à temperatura $T_i$ e volume $V_i$ para um estado final à temperatura $T_f$ e volume $V_f$, a variação $\Delta S$ da entropia do gás é dada por

$$\Delta S = S_f - S_i = nR \ln \frac{V_f}{V_i} + nC_V \ln \frac{T_f}{T_i}. \tag{20-4}$$

**A Segunda Lei da Termodinâmica** Esta lei, que é uma extensão do postulado da entropia, afirma o seguinte: *se um processo ocorre em um sistema fechado, a entropia do sistema aumenta para processos irreversíveis e permanece constante para processos reversíveis. A entropia nunca diminui.* Em forma de equação,

$$\Delta S \geq 0. \tag{20-5}$$

**Máquinas Térmicas** Uma **máquina térmica** é um dispositivo que, operando ciclicamente, extrai uma energia térmica $|Q_Q|$ de uma fonte quente e realiza uma certa quantidade de trabalho $|W|$. A *eficiência* $\varepsilon$ de uma máquina térmica é definida como

$$\varepsilon = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|W|}{|Q_Q|}. \tag{20-11}$$

Em uma **máquina térmica ideal** todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência. A **máquina de Carnot** é uma máquina ideal que segue o ciclo da Fig. 20-9. Sua eficiência é dada por

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_Q|} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}, \tag{20-12, 20-13}$$

onde $T_Q$ e $T_F$ são as temperaturas das fontes quente e fria, respectivamente. As máquinas térmicas reais possuem sempre uma eficiência menor que a dada pela Eq. 20-13. As máquinas térmicas ideais que não são máquinas de Carnot também possuem uma eficiência menor.

Uma *máquina perfeita* é uma máquina imaginária na qual a energia extraída em forma de calor de uma fonte é totalmente convertida em trabalho. Uma máquina que se comportasse dessa forma violaria a segunda lei da termodinâmica, que pode ser reformulada da seguinte maneira: não existe uma série de processos cujo único resultado seja a conversão total em trabalho da energia contida em uma fonte de calor.

**Refrigeradores** Um refrigerador é um dispositivo que, operando ciclicamente, usa trabalho para transferir uma energia $|Q_F|$ de uma fonte fria para uma fonte quente. O coeficiente de desempenho $K$ de um refrigerador é definido como

$$K = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|Q_F|}{|W|}. \tag{20-14}$$

Um **refrigerador de Carnot** é uma máquina de Carnot operando no sentido contrário. Para um refrigerador de Carnot, a Eq. 20-14 se torna

$$K_C = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}. \tag{20-15, 20-16}$$

Um *refrigerador perfeito* é um refrigerador imaginário no qual a energia extraída em forma de calor de uma fonte fria é totalmente transferida para uma fonte quente, sem a necessidade de executar trabalho. Um refrigerador que se comportasse dessa forma violaria a segunda lei da termodinâmica, que pode ser reformulada da seguinte forma: não existe uma série de processos cujo único resultado seja a transferência de energia na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente.

**Uma Visão Estatística da Entropia** A entropia de um sistema pode ser definida em termos das possíveis distribuições de suas moléculas. No caso de moléculas iguais cada distribuição possível de moléculas é chamada de **microestado** do sistema. Todos os microestados equivalentes são agrupados em uma **configuração** do sistema. O número de microestados de uma configuração é a **multiplicidade** $W$ da configuração.

Para um sistema de $N$ moléculas que podem ser distribuídas nos dois lados de uma caixa, a multiplicidade é dada por

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!}, \tag{20-20}$$

onde $n_1$ é o número de moléculas em um dos lados da caixa e $n_2$ é o número de moléculas no outro lado. Uma hipótese básica da **mecânica estatística** é a de que todos os microestados são igualmente prováveis. Assim, as configurações com uma alta multipli-

cidade ocorrem com maior freqüência. Quando $N$ é muito grande ($N = 10^{22}$ moléculas, digamos) as moléculas estão quase sempre na configuração na qual $n_1 = n_2$.

A multiplicidade $W$ de uma configuração de um sistema e a entropia $S$ do sistema nessa configuração estão relacionadas pela equação de entropia de Boltzmann:

$$S = k \ln W, \tag{20-21}$$

onde $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

Quando $N$ é muito grande (o caso mais comum), podemos calcular o valor aproximado de $\ln N!$ usando a *aproximação de Stirling*:

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N. \tag{20-22}$$

## PERGUNTAS

**1** Em quatro experimentos, 2,5 mols de hidrogênio sofrem expansões isotérmicas reversíveis, começando com o mesmo volume, mas a temperaturas diferentes. Os diagramas $p$-$V$ correspondentes são mostrados na Fig. 20-19. Ordene as situações de acordo com a variação da entropia do gás, em ordem decrescente. (*Sugestão:* Veja o Exemplo 20-1.)

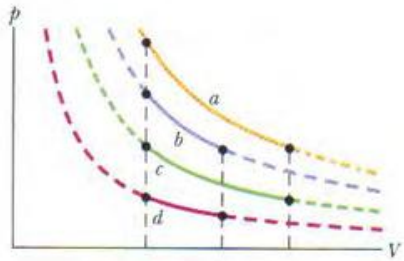



FIG. 20-19 Pergunta 1.

**2** Em quatro experimentos, os blocos $A$ e $B$, inicialmente a temperaturas diferentes, foram colocados juntos em uma caixa isolada (como no Exemplo 20-2) até atingirem uma temperatura final comum. As variações de entropia dos blocos nos quatro experimentos possuem, não necessariamente na ordem dada, os valores a seguir (em joules por kelvin). Determine a que valor de $A$ corresponde cada valor de $B$.

| Bloco | Valores | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 8 | 5 | 3 | 9 |
| $B$ | −3 | −8 | −5 | −2 |

**3** O ponto $i$ da Fig. 20-20 representa o estado inicial de um gás ideal a uma temperatura $T$. Levando em conta os sinais algébricos, ordene as variações de entropia que o gás sofre ao passar, sucessiva e reversivelmente, do ponto $i$ para os pontos $a$, $b$, $c$ e $d$, em ordem decrescente.

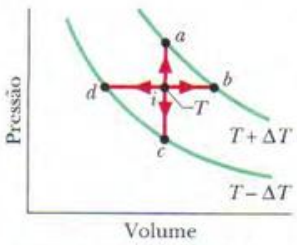



FIG. 20-20 Pergunta 3.

**4** Um gás monoatômico ideal a uma temperatura inicial $T_0$ (em kelvins) se expande de um volume inicial $V_0$ para um volume $2V_0$ através de cinco processos indicados no diagrama $T$-$V$ da Fig. 20-21. Em qual dos processos a expansão é (a) isotérmica, (b) isobárica (a pressão constante) e (c) adiabática? Justifique suas respostas. (d) Em quais dos processos a entropia do gás diminui?

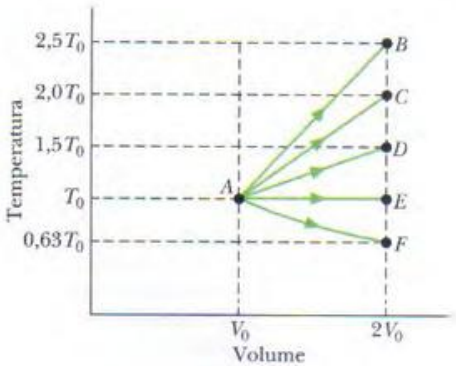



FIG. 20-21 Pergunta 4.

**5** Um gás, confinado em um cilindro isolado, é comprimido adiabaticamente até metade do volume inicial. A entropia do gás aumenta, diminui ou permanece constante durante o processo?

**6** Três máquinas de Carnot operam entre as temperaturas de (a) 400 e 500 K, (b) 500 e 600 K e (c) 400 e 600 K. Cada máquina extrai a mesma quantidade de energia por ciclo da fonte quente. Ordene os valores absolutos dos trabalhos realizados por ciclo pelas máquinas, em ordem decrescente.

**7** Um inventor afirma que inventou quatro máquinas, todas operando entre fontes de calor a temperaturas constantes de 400 K e 300 K. Os dados sobre cada máquina, por ciclo de operação, são os seguintes: máquina A, $Q_a = 200$ J, $Q_F = -175$ J e $W = 40$ J; máquina B, $Q_Q = 500$ J, $Q_F = -200$ J e $W = 400$ J; máquina C, $Q_a = 600$ J, $Q_F = -200$ J e $W = 400$ J; máquina D, $Q_a = 100$ J, $Q_F = -90$ J e $W = 10$ J. Quais das máquinas violam a primeira ou a segunda lei da termodinâmica?

**8** A entropia por ciclo aumenta, diminui ou permanece constante para (a) um refrigerador de Carnot, (b) um refrigerador real e (c) um refrigerador perfeito (que, obviamente, não pode ser construído na prática)?

**9** A entropia por ciclo aumenta, diminui ou permanece a mesma para (a) uma máquina de Carnot, (b) uma máquina térmica real e (c) uma máquina térmica perfeita (que, obviamente, não pode ser construída na prática)?

**10** Uma caixa contém 100 átomos em uma configuração na qual existem 50 átomos em cada lado da caixa. Suponha que você, usando um supercomputador, pudesse contar os diferentes microestados associados a essa configuração à razão de 100 bilhões de estados por segundo. Sem realizar nenhum cálculo por escrito, estime quanto tempo seria necessário para executar a tarefa: um dia, um ano ou muito mais que um ano.

# PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

## seção 20-3 Variação de Entropia

•1 Uma amostra de 2,50 mols de um gás ideal se expande reversível e isotermicamente a 360 K até que o volume seja duas vezes maior. Qual é o aumento da entropia do gás?

•2 Quanta energia deve ser transferida em forma de calor para uma expansão isotérmica reversível de um gás ideal a 132°C se a entropia do gás aumenta de 46,0 J/K?

•3 Determine (a) a energia absorvida na forma de calor e (b) a variação de entropia de um bloco de cobre de 2,00 kg cuja temperatura é aumentada reversivelmente de 25,0°C para 100°C. O calor específico do cobre é 386 J/kg · K.

•4 (a) Qual é a variação de entropia de um cubo de gelo de 12,0 g que funde totalmente em um balde de água cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de congelamento da água? (b) Qual é a variação de entropia de uma colher de sopa de água, com uma massa de 5,00 g, que evapora totalmente ao ser colocada em uma placa quente cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de ebulição da água?

•5 Suponha que 4,00 mols de um gás ideal sofram uma expansão isotérmica reversível do volume $V_1$ para o volume $V_2 = 2{,}00V_1$ a uma temperatura $T = 400$ K. Determine (a) o trabalho realizado pelo gás e (b) a variação de entropia do gás. (c) Se a expansão fosse reversível e adiabática em vez de isotérmica, qual seria a variação da entropia do gás?

•6 Um gás ideal sofre uma expansão isotérmica reversível a 77,0°C, aumentando seu volume de 1,30 L para 3,40 L. A variação de entropia do gás é 22,0 J/K. Quantos mols de gás estão presentes?

••7 Em um experimento, 200 g de alumínio (com um calor específico de 900 J/kg · K) a 100°C são misturados com 50,0 g de água a 20,0°C, com a mistura isolada termicamente. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio? Quais são as variações de entropia (b) do alumínio, (c) da água e (d) do sistema alumínio-água?

••8 Um bloco de 364 g é colocado em contato com uma fonte de calor. O bloco está inicialmente a uma temperatura mais baixa do que a da fonte. Suponha que a conseqüente transferência de energia na forma de calor da fonte para o bloco seja reversível. A Fig. 20-22 mostra a variação de entropia $\Delta S$ do bloco até que o equilíbrio térmico seja alcançado. A escala do eixo horizontal é definida por $T_a = 280$ K e $T_b = 380$ K. Qual é o calor específico do bloco?

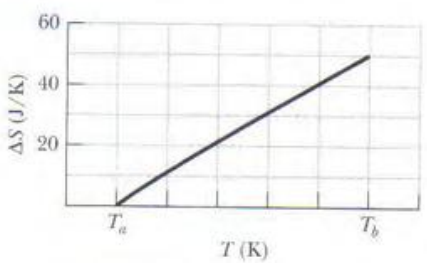



FIG. 20-22 Problema 8.

••9 No processo irreversível da Fig. 20-5, as temperaturas iniciais dos blocos iguais $E$ e $D$ são 305,5 e 294,5 K, respectivamente, e 215 J é a energia que deve ser transferida de um bloco a outro para que o equilíbrio seja atingido. Para os processos reversíveis da Fig. 20-6, quanto é $\Delta S$ (a) para o bloco $E$ (b) para a sua fonte de calor, (c) para o bloco $D$, (d) para a sua fonte de calor, (e) para o sistema dos dois blocos e (f) para o sistema dos dois blocos e as duas fontes de calor?

••10 Uma amostra de gás sofre uma expansão isotérmica reversível. A Fig. 20-23 mostra a variação $\Delta S$ da entropia do gás em função do volume final $V_f$ do gás. A escala do eixo vertical é definida por $\Delta S_s = 64$ J/K. Quantos mols de gás existem na amostra?

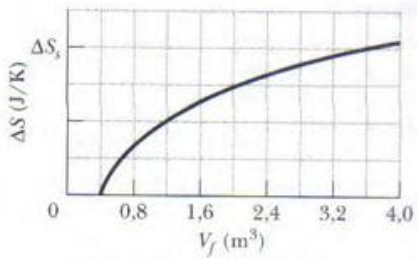



FIG. 20-23 Problema 10.

••11 Um bloco de cobre de 50,0 g cuja temperatura é 400 K é colocado em uma caixa isolada junto com um bloco de chumbo de 100 g cuja temperatura é 200 K. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema dos dois blocos? (b) Qual é a variação da energia interna do sistema do estado inicial para o estado de equilíbrio? (c) Qual é a variação da entropia do sistema? (Veja a Tabela 18-3.)

••12 Em temperaturas muito baixas, o calor específico molar $C_V$ de muitos sólidos é dado aproximadamente por $C_V = AT^3$, onde $A$ depende da substância considerada. Para o alumínio, $A = 3{,}15 \times 10^{-5}$ J/mol.K$^4$. Determine a variação de entropia de 4,00 mols de alumínio quando a temperatura aumenta de 5,00 K para 10,0 K.

••13 Na Fig. 20-24, onde $V_{23} = 3{,}00V_1$, $n$ mols de um gás diatômico ideal passam por um ciclo no qual as moléculas giram, mas não oscilam. Determine (a) $p_2/p_1$, (b) $p_3/p_1$ e (c) $T_3/T_1$. Para a trajetória $1 \rightarrow 2$, determine (d) $W/nRT_1$, (e) $Q/nRT_1$, (f) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (g) $\Delta S/nR$. Para a trajetória $2 \rightarrow 3$, determine (h) $W/nRT_1$, (i) $Q/nRT_1$, (j) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (k) $\Delta S/nR$. Para a trajetória $3 \rightarrow 1$, determine (l) $W/nRT_1$, (m) $Q/nRT_1$, (n) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (o) $\Delta S/nR$.

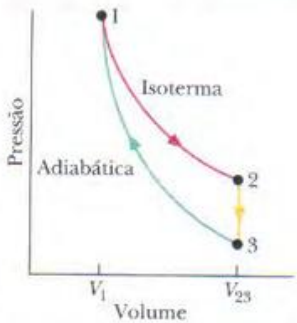



FIG. 20-24 Problema 13.

••14 Uma amostra de 2,0 mols de um gás monoatômico ideal é submetido ao processo reversível da Fig. 20-25. A escala do eixo vertical é definida por $T_s = 400{,}0$ K e a escala do eixo horizontal é definida por $S_s = 20{,}0$ J/K. (a) Qual é a energia absorvida pelo gás na

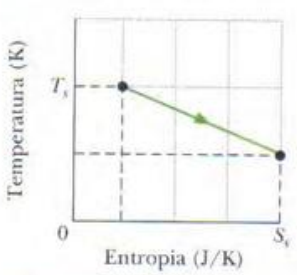



FIG. 20-25 Problema 14.

forma de calor? (b) Qual é a variação da energia interna do gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás?

**••15** Um cubo de gelo de 10 g a −10°C é colocado em um lago cuja temperatura é 15°C. Calcule a variação da entropia do sistema cubo-lago quando o cubo de gelo entra em equilíbrio térmico com o lago. O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K. (*Sugestão:* O cubo de gelo afeta a temperatura do lago?)

**••16** (a) Para 1,0 mol de um gás monoatômico ideal submetido ao ciclo da Fig. 20-26, onde $V_1 = 4{,}00V_0$, qual é o valor de $W/p_0V_0$ quando o gás vai do estado $a$ ao estado $c$ ao longo da trajetória $abc$? Quanto é o valor de $\Delta E_{int}/p_0V_0$ quando o gás (b) vai de $b$ a $c$ e (c) descreve um ciclo completo? Quanto é o valor de $\Delta S$ quando o gás (d) vai de $b$ a $c$ e (e) descreve um ciclo completo?

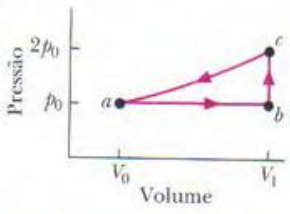


FIG. 20-26 Problema 16.

**••17** Uma mistura de 1773 g de água e 227 g de gelo está inicialmente em equilíbrio a 0,000°C. A mistura é levada, através de um processo reversível, a um segundo estado de equilíbrio no qual a razão água-gelo, em massa, é 1,00:1,00 a 0,000°C. (a) Calcule a variação de entropia do sistema durante esse processo. (O calor de fusão da água é 333 kJ/kg.) (b) O sistema retorna ao estado de equilíbrio inicial através de um processo irreversível (usando, por exemplo, um bico de Bunsen). Calcule a variação de entropia do sistema durante esse processo. (c) As respostas dos itens (a) e (b) são compatíveis com a segunda lei da termodinâmica?

**••18** Um cubo de gelo de 8,0 g a −10°C é colocado em uma garrafa térmica com 100 $cm^3$ de água a 20°C. De quanto varia a entropia do sistema cubo-água até o equilíbrio ser alcançado? O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K.

**•••19** É possível remover energia da água na forma de calor na temperatura de congelamento (0,0°C à pressão atmosférica) ou mesmo abaixo dessa temperatura sem que a água congele; quando isso acontece, dizemos que a água está *super-resfriada*. Suponha que uma gota d'água de 1,00 g seja super-resfriada até que sua temperatura seja a mesma do ar nas vizinhanças, −5,00°C. Em seguida, a gota congela bruscamente, transferindo energia para o ar na forma de calor. Qual é a variação da entropia da gota? (*Sugestão:* Use um processo reversível de três estágios, como se a gota passasse pelo ponto normal de congelamento.) O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K.

**•••20** Uma garrafa térmica isolada contém 130 g de água a 80,0°C. Um cubo de gelo de 12,0 g a 0°C é introduzido na garrafa térmica, formando um sistema *gelo + água original*. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema? Quais são as variações de entropia da água que era originalmente gelo (b) ao derreter e (c) ao se aquecer até a temperatura de equilíbrio? (d) Qual é a variação de entropia da água original ao esfriar até a temperatura de equilíbrio? (e) Qual é a variação total de entropia do sistema *gelo + água original* ao atingir a temperatura de equilíbrio?

**•••21** Suponha que 1,00 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente à pressão $p_1$ e ocupando um volume $V_1$ seja submetido sucessivamente a dois processos: (1) uma expansão isotérmica até um volume $2{,}00V_1$ e (2) um aumento de pressão a volume constante até uma pressão $2{,}00p_1$. Qual é o valor de $Q/p_1V_1$ (a) para o processo 1 e (b) para o processo 2? Qual é o valor de $W/p_1V_1$ (c) para o processo 1 e (d) para o processo 2? Para o processo completo, qual é o valor (e) de $\Delta E_{int}/p_1V_1$ e (f) de $\Delta S$? O gás retorna ao estado inicial e é levado ao mesmo estado final, mas dessa vez através dos seguintes processos sucessivos: (1) uma compressão isotérmica até a pressão $2{,}00p_1$ e (2) um aumento de volume até um volume $2{,}00V_1$ a pressão constante. Qual é o valor de $Q/p_1V_1$ (g) para o processo 1 e (h) para o processo 2? Qual é o valor de $W/p_1V_1$ (i) para o processo 1 e (j) para o processo 2? Quais são os valores de (k) $\Delta E_{int}/p_1V_1$ e (l) $\Delta S$ para o processo completo?

**•••22** Expande-se 1,00 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente a 5,00 kPa e 600 K do volume inicial $V_i = 1{,}00\ m^3$ para o volume final $V_f = 2{,}00\ m^3$. Em qualquer instante durante a expansão a pressão $p$ e o volume $V$ do gás estão relacionados por $p = 5{,}00\ \exp[(V_i - V)/a]$, com $p$ em kPa, $V_i$ e $V$ em $m^3$, e $a = 1{,}00\ m^3$. Quais são (a) a pressão e (b) a temperatura final do gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás durante a expansão? (d) Qual é o valor de $\Delta S$ para a expansão? (Sugestão: Use dois processos reversíveis simples para determinar $\Delta S$.)

### seção 20-5 Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas

**•23** Uma máquina de Carnot tem uma eficiência de 22,0%. Ela opera entre duas fontes de calor de temperatura constante cuja diferença de temperatura é 75,0 C°. Qual é a temperatura (a) da fonte fria e (b) da fonte quente?

**•24** Em um reator de fusão nuclear hipotético, o combustível é o gás deutério a uma temperatura de $7 \times 10^8$ K. Se esse gás pudesse ser usado para operar uma máquina de Carnot com $T_F$ = 100°C, qual seria a eficiência da máquina? Tome as duas temperaturas como sendo exatas e calcule a resposta com sete algarismos significativos.

**•25** Uma máquina de Carnot opera entre 235°C e 115°C, absorvendo $6{,}30 \times 10^4$ J por ciclo na temperatura mais alta. (a) Qual é a eficiência da máquina? (b) Qual é o trabalho por ciclo que essa máquina é capaz de realizar?

**•26** Uma máquina de Carnot absorve 52 kJ na forma de calor e rejeita 36 kJ na forma de calor em cada ciclo. Calcule (a) a eficiência da máquina e (b) o trabalho realizado por ciclo em quilojoules.

**•27** Uma máquina de Carnot, cuja fonte fria está a 17°C, tem uma eficiência de 40%. De quanto deve ser elevada a temperatura da fonte quente para que a eficiência aumente para 50%?

**••28** Uma máquina de Carnot de 500 W opera entre fontes de calor a temperaturas constantes de 100°C e 60,0°C. Qual é a taxa com a qual a energia é (a) absorvida pela máquina em forma de calor e (b) rejeitada pela máquina em forma de calor?

**••29** A Fig. 20-27 mostra um ciclo reversível a que é submetido 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. O volume $V_c = 8{,}00V_b$. O processo $bc$ é uma expansão adiabática, com $p_b = 10{,}0$ atm e $V_b = 1{,}00 \times 10^{-3}\ m^3$. Para o ciclo, determine (a) a energia fornecida ao gás em forma de calor, (b) a energia liberada pelo gás em forma de calor, (c) o trabalho líquido realizado pelo gás e (d) a eficiência do ciclo.

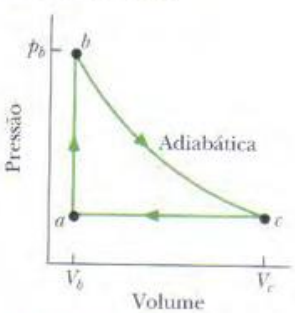


FIG. 20-27 Problema 29.

**••30** Uma máquina de Carnot é projetada para produzir um certo trabalho $W$ por ciclo. Em cada ciclo, energia em forma de calor $Q_O$ é transferida para a substância de trabalho da máquina a partir da fonte quente, que está a uma temperatura ajustável

$T_Q$. A fonte fria é mantida à temperatura $T_F$ = 250 K. A Fig. 20-28 mostra $Q_Q$ para uma faixa de valores de $T_Q$. A escala do eixo vertical é definida por $Q_{Qs}$ = 6,0 kJ. Se $T_Q$ é ajustada para 550 K, qual é o valor de $Q_Q$?

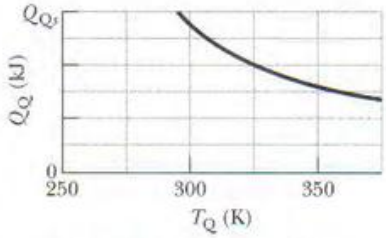



FIG. 20-28 Problema 30.

••31 A Fig. 20-29 mostra um ciclo reversível a que é submetido 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. Suponha que $p = 2p_0$, $V = 2V_0$, $p_0 = 1{,}01 \times 10^5$ Pa e $V_0 = 0{,}0225$ m³. Calcule (a) o trabalho realizado durante o ciclo, (b) a energia adicionada em forma de calor durante o percurso *abc* e (c) a eficiência do ciclo. (d) Qual é a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre a temperatura mais alta e a temperatura mais baixa desse ciclo? (e) Este valor é maior ou menor que a eficiência calculada em (c)?

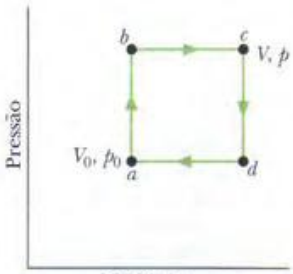



FIG. 20-29 Problema 31.

••32 Um gás ideal (1,0 mol) é a substância de trabalho em uma máquina térmica que descreve o ciclo mostrado na Fig. 20-30. Os processos *BC* e *DA* são reversíveis e adiabáticos. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a eficiência da máquina?

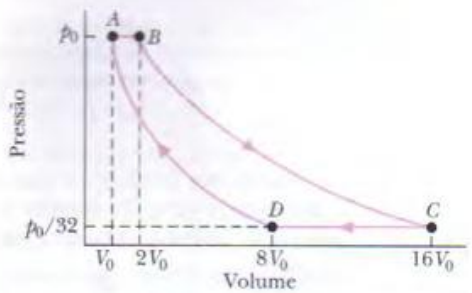



FIG. 20-30 Problema 32.

••33 A eficiência de um certo motor de automóvel é 25% quando o motor realiza um trabalho de 8,2 kJ por ciclo. Suponha que o processo seja reversível. Quais são (a) a energia $Q_{ganho}$ em forma de calor que o motor ganha por ciclo graças à queima do combustível e (b) a energia $Q_{perdido}$ em forma de calor que o motor perde por ciclo por causa do atrito? Se uma regulagem do motor aumenta a eficiência para 31%, quais são os novos valores (c) de $Q_{ganho}$ e (d) de $Q_{perdido}$ para o mesmo valor do trabalho?

••34 No primeiro estágio de uma máquina de Carnot de dois estágios, uma energia $Q_1$ é absorvida na forma de calor à temperatura $T_1$, um trabalho $W_1$ é realizado e uma energia $Q_2$ é liberada na forma de calor à temperatura $T_2$. O segundo estágio absorve essa energia na forma de calor $Q_2$, realiza um trabalho $W_2$ e libera energia na forma de calor $Q_3$ a uma temperatura ainda menor $T_3$. Mostre que a eficiência da máquina é $(T_1 - T_3)/T_1$.

•••35 O ciclo da Fig. 20-31 representa a operação de um motor de combustão interna a gasolina. O volume $V_3 = 4{,}00V_1$. Suponha que a mistura de admissão gasolina-ar é um gás ideal com $\gamma = 1{,}30$. Quais são as razões (a) $T_2/T_1$, (b) $T_3/T_1$, (c) $T_4/T_1$, (d) $p_3/p_1$ e (e) $p_4/p_1$? (f) Qual é a eficiência do motor?

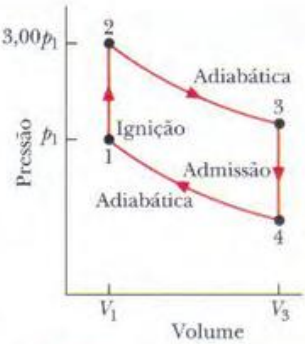



FIG. 20-31 Problema 35.

## seção 20-6 Entropia no Mundo Real: Refrigeradores

•36 O motor elétrico de uma bomba térmica transfere energia em forma de calor do exterior, que está a −5,0°C, para uma sala que está a 17°C. Se a bomba térmica fosse uma bomba térmica de Carnot (uma máquina de Carnot trabalhando no sentido inverso), que energia seria transferida na forma de calor para a sala para cada joule de energia elétrica consumida?

•37 Um condicionador de ar de Carnot retira energia térmica de uma sala a 70°F e a transfere na forma de calor para o ambiente, que está a 96°F. Para cada joule da energia elétrica necessária para operar o condicionador de ar, quantos joules são removidos da sala?

•38 Para fazer gelo, um refrigerador que é o inverso de uma máquina de Carnot extrai 42 kJ em forma de calor a −15°C durante cada ciclo, com um coeficiente de desempenho de 5,7. A temperatura ambiente é 30,3°C. Qual é (a) a energia por ciclo fornecida ao ambiente em forma de calor para o ambiente e (b) o trabalho por ciclo necessário para operar o refrigerador?

•39 Uma bomba térmica é usada para aquecer um edifício. A temperatura externa é −5,0°C e a temperatura no interior do edifício deve ser mantida em 22°C. O coeficiente de desempenho da bomba é 3,8 e a bomba térmica fornece 7,54 MJ por hora ao edifício em forma de calor. Se a bomba térmica é uma máquina de Carnot trabalhando no sentido inverso, qual deve ser a potência de operação da bomba?

•40 Qual deve ser o trabalho realizado por um refrigerador de Carnot para transferir 1,0 J em forma de calor (a) de uma fonte de calor a 7,0°C para uma a 27°C, (b) de uma fonte a −73°C para uma a 27°C, (c) de uma fonte a −173°C para uma a 27°C e (d) de uma fonte a −223°C para uma a 27°C?

••41 A Fig. 20-32 mostra uma máquina de Carnot que trabalha entre as temperaturas $T_1$ = 400 K e $T_2$ = 150 K e alimenta um refrigerador de Carnot que trabalha entre as temperaturas $T_3$ = 325 K e $T_4$ = 225 K. Qual é a razão $Q_3/Q_1$?

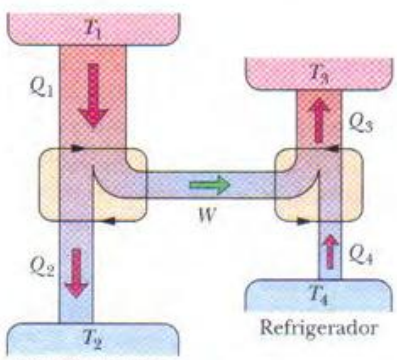



FIG. 20-32 Problema 41.

••42 (a) Durante cada ciclo, uma máquina de Carnot absorve 750 J em forma de calor de uma fonte quente a 360 K, com a fonte fria a 280 K. Qual é o trabalho realizado por ciclo? (b) A máquina é operada em sentido inverso para funcionar como um refrigerador de Carnot entre as mesmas fontes. Durante cada ciclo, que trabalho é necessário para remover 1200 J em forma de calor da fonte fria?

••43 Um condicionador de ar operando entre 93°F e 70°F é especificado como tendo uma capacidade de refrigeração de 4000 Btu/h. Seu coeficiente de desempenho é 27% do de um refrigerador de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas. Qual é a potência do motor do condicionador de ar em cavalos-vapor?

••44 O motor de um refrigerador tem uma potência de 200 W. Se o compartimento do congelador está a 270 K e o ar externo está a 300 K, e supondo a eficiência de um refrigerador de Carnot, qual é a quantidade máxima de energia que pode ser extraída em forma de calor do compartimento do congelador em 10,0 min?

### seção 20-8 Uma Visão Estatística da Entropia

•45 Construa uma tabela como a Tabela 20-1 para oito moléculas.

••46 Uma caixa contém $N$ moléculas iguais de um gás, igualmente divididas entre os dois lados da caixa. Para $N = 50$, quais são (a) a multiplicidade $W$ da configuração central, (b) o número total de microestados e (c) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? Para $N = 100$, quais são (d) $W$ da configuração central, (e) o número total de microestados e (f) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? Para $N = 200$, quais são (g) $W$ da configuração central, (h) o número total de microestados e (i) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? (j) O tempo que o sistema passa na configuração central aumenta ou diminui quando $N$ aumenta?

•••47 Uma caixa contém $N$ moléculas de um gás. A caixa é dividida em três partes iguais. (a) Por extensão da Eq. 20-20, escreva uma fórmula para a multiplicidade de qualquer configuração dada. (b) Considere duas configurações: a configuração $A$, com números iguais de moléculas nas três divisões da caixa, e a configuração $B$, com números iguais de moléculas em cada lado da caixa dividida em duas partes iguais, em vez de em três. Qual é a razão $W_A/W_B$ entre a multiplicidade da configuração $A$ e a da configuração $B$? (c) Calcule $W_A/W_B$ para $N = 100$. (Como 100 não é divisível por 3, ponha 34 moléculas em uma das três partes da configuração $A$ e 33 moléculas nas duas outras partes.)

### Problemas Adicionais

48 A Fig. 20-33 mostra o módulo $F$ da força em função da distensão $x$ de um elástico, com a escala do eixo $F$ definida por $F_s = 1{,}50$ N e a escala do eixo $x$ definida por $x_s = 3{,}50$ cm. A temperatura é 2,00°C. Quando o elástico é distendido de $x = 1{,}70$ cm, qual é a taxa de variação da entropia do elástico com a distensão para pequenas distensões?

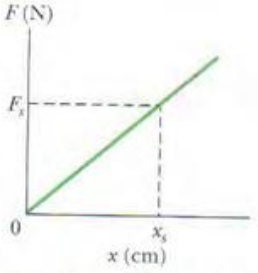



FIG. 20-33 Problema 48.

49 Quando uma amostra de nitrogênio ($N_2$) sofre um aumento de temperatura a volume constante, a distribuição de velocidades das moléculas se altera, ou seja, a função distribuição de probabilidade $P(v)$ da velocidade das moléculas se torna mais larga, como mostra a Fig. 19-8*b*. Uma forma de descrever este alargamento de $P(v)$ é medir a diferença $\Delta v$ entre a velocidade mais provável $v_P$ e a velocidade média quadrática $v_{rms}$. Quando $P(v)$ se alarga para velocidades mais altas, $\Delta v$ aumenta. Suponha que o gás seja ideal e que as moléculas de $N_2$ giram, mas não oscilam. Para 1,5 mol, uma temperatura inicial de 250 K e uma temperatura final de 500 K, quais são (a) a diferença inicial $\Delta v_i$, (b) a diferença final $\Delta v_f$ e (c) a variação de entropia $\Delta S$ do gás?

50 Um ciclo de três etapas é realizado por 3,4 mol de um gás diatômico ideal: (1) a temperatura do gás é aumentada de 200 K para 500 K a volume constante; (2) o gás é expandido isotermicamente até a pressão original; (3) o gás é contraído a pressão constante de volta ao volume original. Durante o ciclo, as moléculas giram, mas não oscilam. Qual é a eficiência do ciclo?

51 Suponha que um poço profundo seja cavado na crosta terrestre perto de um dos pólos, onde a temperatura da superfície é −40°C, até uma profundidade onde a temperatura é 800°C. (a) Qual é o limite teórico para a eficiência de uma máquina térmica operando entre essas duas temperaturas? (b) Se toda a energia liberada em forma de calor na fonte fria fosse usada para derreter gelo que se encontra inicialmente a −40°C, a que taxa água líquida a 0°C poderia ser produzida por uma usina de energia elétrica de 100 MW (trate-a como uma máquina térmica)? O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K; o calor de fusão da água é 333 kJ/kg. (Observe que neste caso a máquina térmica opera efetivamente entre 0°C e 800°C. Uma energia liberada a −40°C não pode aquecer nada acima de −40°C).

52 (a) Uma máquina de Carnot opera entre uma fonte quente a 320 K e uma fonte fria a 260 K. Se a máquina absorve 500 J da fonte quente em forma de calor por ciclo, qual é o trabalho realizado por ciclo? (b) Se a máquina opera como um refrigerador entre as mesmas fontes, que trabalho por ciclo deve ser fornecido para remover 1000 J em forma de calor da fonte fria?

53 Um lingote de cobre de 600 g a 80,0°C é colocado em 70,0 g de água a 10,0°C em um recipiente isolado. (Os calores específicos estão na Tabela 18-3.) (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema cobre-água? Que variação de entropia (b) o cobre, (c) a água e (d) o sistema cobre-água sofrem até atingir a temperatura de equilíbrio?

54 Suponha que 0,550 mol de um gás ideal seja expandido isotérmica e reversivelmente nas quatro situações a seguir. Qual é a variação de entropia do gás para cada situação?

| Situação | (a) | (b) | (c) | (d) |
|---|---|---|---|---|
| Temperatura (K) | 250 | 350 | 400 | 450 |
| Volume inicial ($cm^3$) | 0,200 | 0,200 | 0,300 | 0,300 |
| Volume final ($cm^3$) | 0,800 | 0,800 | 1,20 | 1,20 |

55 Uma amostra de 0,600 kg de água está inicialmente na forma de gelo à temperatura de −20°C. Qual é a variação de entropia da amostra se a temperatura aumenta para 40°C?

56 Qual é a variação de entropia para 3,20 mol de um gás monoatômico ideal que sofre um aumento reversível de temperatura de 380 K para 425 K a volume constante?

57 Um ciclo de três etapas é executado reversivelmente por 4,00 mol de um gás ideal: (1) uma expansão adiabática que dá ao gás 2,00 vezes o volume inicial, (2) um processo a volume constante, (3) uma compressão isotérmica de volta ao estado inicial

do gás. Não sabemos se o gás é monoatômico ou diatômico; se for diatômico, não sabemos se as moléculas estão girando ou oscilando. Quais são as variações de entropia (a) para o ciclo, (b) para o processo 1, (c) para o processo 3 e (d) para o processo 2?

**58** Suponha que 1,0 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente com 10 L e a 300 K seja aquecido a volume constante até 600 K, liberado para se expandir isotermicamente até a pressão inicial e, finalmente, contraído a pressão constante até os valores iniciais de volume, pressão e temperatura. Durante o ciclo, quais são (a) a energia líquida que entra no sistema (o gás) na forma de calor e (b) o trabalho líquido realizado pelo gás? (c) Qual é a eficiência do ciclo?

**59** Dois mols de um gás diatômico inicialmente a 300 K realizam o seguinte ciclo: o gás é (1) aquecido a volume constante até 800 K, (2) liberado para se expandir isotermicamente até a pressão inicial, (3) contraído a pressão constante para o estado inicial. Supondo que as moléculas do gás nem giram nem oscilam, determine (a) a energia líquida transferida para o gás em forma de calor, (b) o trabalho líquido realizado pelo gás e (c) a eficiência do ciclo.

**60** Um bloco de tungstênio de 45,0 g a 30,0°C e um bloco de prata de 25,0 g a −120°C são colocados juntos em um recipiente isolado. (Os calores específicos estão na Tabela 18-3.) (a) Qual é a temperatura de equilíbrio? Que variação de entropia (b) o tungstênio, (c) a prata e (d) o sistema tungstênio-prata sofrem até atingir a temperatura de equilíbrio?

**61** Uma barra cilíndrica de cobre com 1,50 m de comprimento e 2,00 cm de raio é isolada para impedir a perda de calor através da superfície lateral. Uma das extremidades é colocada em contato com uma fonte de calor a 300°C; a outra é colocada em contato com uma fonte de calor a 30,0°C. Qual é a taxa de aumento de entropia do sistema barra-fontes?

**62** Um refrigerador ideal realiza 150 J de trabalho para remover 560 J em forma de calor do compartimento frio. (a) Qual é o coeficiente de desempenho do refrigerador? (b) Qual é a quantidade de energia em forma de calor liberada para a cozinha por ciclo?

**63** Um refrigerador de Carnot extrai 35,0 kJ em forma de calor durante cada ciclo, operando com um coeficiente de desempenho de 4,60. Quais são (a) a energia transferida por ciclo para o ambiente e (b) o trabalho realizado por ciclo?

**64** Quatro partículas estão na caixa isolante da Fig. 20-17. Quais são (a) a menor multiplicidade, (b) a maior multiplicidade, (c) a menor entropia e (d) a maior entropia do sistema de quatro partículas?

**65** Uma barra de latão está em contato térmico com uma fonte de calor a uma temperatura constante de 130°C em uma extremidade e com uma fonte de calor a uma temperatura constante de 24,0°C na outra extremidade. (a) Calcule a variação total da entropia do sistema barra-fontes quando 5030 J de energia são transferidos através da barra, de uma fonte para a outra. (b) A entropia da barra varia?

**66** Um liquefator de hélio está em uma sala mantida a 300 K. Se o hélio está a 4,0 K, qual é o valor mínimo da razão $Q_{sala}/Q_{He}$, onde $Q_{sala}$ é a energia fornecida à sala em forma de calor e $Q_{He}$ é a energia removida do hélio em forma de calor?

**67** O sistema $A$ de três partículas e o sistema $B$ de cinco partículas estão em caixas isoladas como as da Fig. 20-17. Qual é a menor multiplicidade $W$ (a) do sistema $A$ e (b) do sistema $B$? Qual é a maior multiplicidade (c) do sistema $A$ e (d) do sistema $B$? Qual é a maior entropia (e) de $A$ e (f) de $B$?

**68** Calcule a eficiência de uma usina de combustível fóssil que consome 380 toneladas métricas de carvão por hora para produzir trabalho útil à taxa de 750 MW. O calor de combustão do carvão (o calor produzido pela queima do carvão) é 28 MJ/kg.

**69** A temperatura de 1,00 mol de um gás monoatômico ideal é elevada reversivelmente de 300 K para 400 K, com o volume mantido constante. Qual é a variação da entropia do gás?

**70** Repita o Problema 69, supondo que a pressão do gás seja mantida constante.

**71** Suponha que 260 J sejam conduzidos de uma fonte à temperatura constante de 400 K para uma fonte (a) a 100 K, (b) a 200 K, (c) a 300 K e (d) a 360 K. Qual é a variação líquida da entropia das fontes, $\Delta S_{liq}$, em cada caso? (e) Quando a diferença entre as temperaturas das fontes diminui, $\Delta S_{liq}$ aumenta, diminui ou permanece a mesma?

**72** Uma máquina de Carnot cuja fonte quente está a 400 K tem uma eficiência de 30,0%. De quanto deve mudar a temperatura da fonte fria para que a eficiência aumente para 40,0%?

**73** Uma caixa contém $N$ moléculas. Considere duas configurações: a configuração $A$, com uma divisão igual de moléculas entre os dois lados da caixa, e a configuração $B$, com 60,0% das moléculas no lado esquerdo e 40,0% no lado direito. Para $N = 50$, quais são (a) a multiplicidade $W_A$ da configuração $A$, (b) a multiplicidade $W_B$ da configuração $B$ e (c) a razão $f_{B/A}$ entre o tempo que o sistema passa na configuração $B$ e o tempo que o sistema passa na configuração $A$? Para $N = 100$, quais são (d) $W_A$, (e) $W_B$ e (f) $f_{B/A}$? Para $N = 200$, quais são (g) $W_A$, (h) $W_B$ e (i) $f_{B/A}$? (j) Com o aumento de $N$, $f$ aumenta, diminui ou permanece constante?

**74** Suponha que 2,00 mols de um gás diatômico ideal sejam submetidos reversivelmente ao ciclo mostrado no diagrama $T$-$S$ da Fig. 20-34, onde $S_1 = 6{,}00$ J/K e $S_2 = 8{,}00$ J/K. As moléculas não giram nem oscilam. Qual é a energia transferida em forma de calor $Q$ (a) na trajetória $1 \rightarrow 2$, (b) na trajetória $2 \rightarrow 3$ e (c) no ciclo completo? (d) Qual é o trabalho $W$ para o processo isotérmico? O volume $V_1$ no estado 1 é 0,200 m³. Qual é o volume (e) no estado 2 e (f) no estado 3?

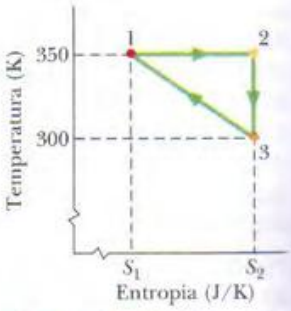



**FIG. 20-34** Problema 74.

Qual é a variação $\Delta E_{int}$ (g) na trajetória $1 \rightarrow 2$, (h) na trajetória $2 \rightarrow 3$ e (i) no ciclo completo? (*Sugestão:* O item (h) pode ser resolvido em uma ou duas linhas de cálculos usando os resultados da Seção 19-8 ou em uma página de cálculos usando os resultados da Seção 19-11.) (j) Qual é o trabalho $W$ para o processo adiabático?

# O Sistema Internacional de Unidades (SI)*



**TABELA 1**

**As Unidades Fundamentais do SI**

| Grandeza | Nome | Símbolo | Definição |
|---|---|---|---|
| comprimento | metro | m | "... a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983) |
| massa | quilograma | kg | "... este protótipo [um certo cilindro de platina-irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889) |
| tempo | segundo | s | "... a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133." (1967) |
| corrente elétrica | ampère | A | "... a corrente constante que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produziria entre esses condutores uma força igual a $2 \times 10^{-7}$ newton por metro de comprimento." (1946) |
| temperatura termodinâmica | kelvin | K | "... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967) |
| quantidade de matéria | mol | mol | "... a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono-12." (1971) |
| intensidade luminosa | candela | cd | "... a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de freqüência $540 \times 10^{12}$ hertz e que irradia nessa direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979) |

*Adaptado de "The International System of Units (SI)", Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2001. As definições acima foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, um órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

**TABELA 2**

**Algumas Unidades Secundárias do SI**

| Grandeza | Nome da Unidade | Símbolo | |
|---|---|---|---|
| área | metro quadrado | $m^2$ | |
| volume | metro cúbico | $m^3$ | |
| freqüência | hertz | Hz | $s^{-1}$ |
| massa específica (densidade) | quilograma por metro cúbico | $kg/m^3$ | |
| velocidade escalar, velocidade | metro por segundo | m/s | |
| velocidade angular | radiano por segundo | rad/s | |
| aceleração | metro por segundo ao quadrado | $m/s^2$ | |
| aceleração angular | radiano por segundo ao quadrado | $rad/s^2$ | |
| força | newton | N | $kg \cdot m/s^2$ |
| pressão | pascal | Pa | $N/m^2$ |
| trabalho, energia, quantidade de calor | joule | J | $N \cdot m$ |
| potência | watt | W | J/s |
| quantidade de carga elétrica | coulomb | C | $A \cdot s$ |
| diferença de potencial, força eletromotriz | volt | V | W/A |
| intensidade de campo elétrico | volt por metro (ou newton por coulomb) | V/m | N/C |
| resistência elétrica | ohm | Ω | V/A |
| capacitância | farad | F | $A \cdot s/V$ |
| fluxo magnético | weber | Wb | $V \cdot s$ |
| indutância | henry | H | $V \cdot s/A$ |
| densidade de fluxo magnético | tesla | T | $Wb/m^2$ |
| intensidade de campo magnético | ampère por metro | A/m | |
| entropia | joule por kelvin | J/K | |
| calor específico | joule por quilograma kelvin | $J/(kg \cdot K)$ | |
| condutividade térmica | watt por metro kelvin | $W/(m \cdot K)$ | |
| intensidade radiante | watt por esferorradiano | W/sr | |

**TABELA 3**

**As Unidades Suplementares SI**

| Grandeza | Nome da Unidade | Símbolo |
|---|---|---|
| ângulo plano | radiano | rad |
| ângulo sólido | esferorradiano | sr |

# Algumas Constantes Fundamentais da Física* B

| Constante | Símbolo | Valor Prático | Melhor Valor (2006) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Valor[a] | Incerteza |
| Velocidade da luz no vácuo | $c$ | $3{,}00 \times 10^{8}$ m/s | 2,997 924 58 | exata |
| Carga elementar | $e$ | $1{,}60 \times 10^{-19}$ C | 1,602 176 487 | $2{,}5 \times 10^{-8}$ |
| Constante gravitacional | $G$ | $6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3$/s$^2 \cdot$ kg | 6,674 28 | $1{,}0 \times 10^{-4}$ |
| Constante universal dos gases | $R$ | 8,31 J/mol $\cdot$ K | 8,314 472 | $1{,}7 \times 10^{-6}$ |
| Constante de Avogadro | $N_A$ | $6{,}02 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ | 6,022 141 79 | $5{,}0 \times 10^{-8}$ |
| Constante de Boltzmann | $k$ | $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K | 1,380 650 4 | $1{,}7 \times 10^{-6}$ |
| Constante de Stefan-Boltzmann | $\sigma$ | $5{,}67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K$^4$ | 5,670 400 | $7{,}0 \times 10^{-6}$ |
| Volume molar de um gás ideal nas CNTP[c] | $V_m$ | $2{,}27 \times 10^{-2}$ m$^3$/mol | 2,271 098 1 | $1{,}7 \times 10^{-6}$ |
| Permissividade do vácuo | $\epsilon_0$ | $8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m | 8,854 187 817 62 | exata |
| Permeabilidade do vácuo | $\mu_0$ | $1{,}26 \times 10^{-6}$ H/m | 1,256 637 061 43 | exata |
| Constante de Planck | $h$ | $6{,}63 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s | 6,626 068 96 | $5{,}0 \times 10^{-8}$ |
| Massa do elétron[b] | $m_e$ | $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg | 9,109 382 15 | $5{,}0 \times 10^{-8}$ |
| | | $5{,}49 \times 10^{-4}$ u | 5,485 799 094 | $4{,}2 \times 10^{-10}$ |
| Massa do próton[b] | $m_p$ | $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg | 1,672 621 637 | $5{,}0 \times 10^{-8}$ |
| | | 1,0073 u | 1,007 276 466 77 | $1{,}0 \times 10^{-10}$ |
| Razão entre a massa do próton e a massa do elétron | $m_p/m_e$ | 1840 | 1,836 152 672 47 | $4{,}3 \times 10^{-10}$ |
| Razão entre a massa e a carga do elétron | $e/m_e$ | $1{,}76 \times 10^{11}$ C/kg | 1,758 820 150 | $2{,}5 \times 10^{-8}$ |
| Massa do nêutron[b] | $m_n$ | $1{,}68 \times 10^{-27}$ kg | 1,674 927 211 | $5{,}0 \times 10^{-8}$ |
| | | 1,0087 u | 1,008 664 915 97 | $4{,}3 \times 10^{-10}$ |
| Massa do átomo de hidrogênio[b] | $m_{1_H}$ | 1,0078 u | 1,007 825 031 6 | $1{,}0 \times 10^{-10}$ |
| Massa do átomo de deutério[b] | $m_{2_H}$ | 2,0141 u | 2,014 101 777 9 | $1{,}0 \times 10^{-10}$ |
| Massa do átomo de hélio[b] | $m_{4_{He}}$ | 4,0026 u | 4,002 603 2 | $1{,}0 \times 10^{-10}$ |
| Massa do múon | $m_\mu$ | $1{,}88 \times 10^{-28}$ kg | 1,883 531 30 | $5{,}6 \times 10^{-8}$ |
| Momento magnético do elétron | $\mu_e$ | $9{,}28 \times 10^{-24}$ J/T | 9,284 763 77 | $2{,}5 \times 10^{-8}$ |
| Momento magnético do próton | $\mu_p$ | $1{,}41 \times 10^{-26}$ J/T | 1,410 606 662 | $2{,}6 \times 10^{-8}$ |
| Magnéton de Bohr | $\mu_B$ | $9{,}27 \times 10^{-24}$ J/T | 9,274 008 009 15 | $2{,}5 \times 10^{-8}$ |
| Magnéton nuclear | $\mu_N$ | $5{,}05 \times 10^{-27}$ J/T | 5,050 783 24 | $2{,}5 \times 10^{-8}$ |
| Raio de Bohr | $a$ | $5{,}29 \times 10^{-11}$ m | 5,291 772 085 9 | $6{,}8 \times 10^{-10}$ |
| Constante de Rydberg | $R$ | $1{,}10 \times 10^{7}$ m$^{-1}$ | 1,097 373 156 852 7 | $6{,}6 \times 10^{-12}$ |
| Comprimento de onda de Compton do elétron | $\lambda_C$ | $2{,}43 \times 10^{-12}$ m | 2,426 310 217 5 | $1{,}4 \times 10^{-9}$ |

[a]Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.

[b]As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica: 1 u = $1{,}660\,538\,86 \times 10^{-27}$ kg.

[c]CNPT significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2006 (www.physics.nist.gov).

# C Alguns Dados Astronômicos

## Algumas Distâncias da Terra

| | | | |
|---|---|---|---|
| À Lua* | $3{,}82 \times 10^8$ m | Ao centro da nossa galáxia | $2{,}2 \times 10^{20}$ m |
| Ao Sol* | $1{,}50 \times 10^{11}$ m | À galáxia de Andrômeda | $2{,}1 \times 10^{22}$ m |
| À estrela mais próxima (*Proxima Centauri*) | $4{,}04 \times 10^{16}$ m | Ao limite do universo observável | $\sim 10^{26}$ m |

*Distância média.

## O Sol, a Terra e a Lua

| Propriedade | Unidade | Sol | Terra | Lua |
|---|---|---|---|---|
| Massa | kg | $1{,}99 \times 10^{30}$ | $5{,}98 \times 10^{24}$ | $7{,}36 \times 10^{22}$ |
| Raio médio | m | $6{,}96 \times 10^8$ | $6{,}37 \times 10^6$ | $1{,}74 \times 10^6$ |
| Massa específica média | $kg/m^3$ | 1410 | 5520 | 3340 |
| Aceleração de queda livre na superfície | $m/s^2$ | 274 | 9,81 | 1,67 |
| Velocidade de escape | km/s | 618 | 11,2 | 2,38 |
| Período de rotação[a] | — | 37 d nos pólos[b] 26 d no equador[b] | 23 h 56 min | 27,3 d |
| Potência de radiação[c] | W | $3{,}90 \times 10^{26}$ | | |

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

[c]Perto dos limites da atmosfera terrestre a energia solar é recebida a uma taxa de 1340 $W/m^2$, supondo uma incidência normal.

## Algumas Propriedades dos Planetas

| | Mercúrio | Vênus | Terra | Marte | Júpiter | Saturno | Urano | Netuno | Plutão* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distância média do Sol, $10^6$ km | 57,9 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1430 | 2870 | 4500 | 5900 |
| Período de revolução, anos | 0,241 | 0,615 | 1,00 | 1,88 | 11,9 | 29,5 | 84,0 | 165 | 248 |
| Período de rotação,[a] dias | 58,7 | −243[b] | 0,997 | 1,03 | 0,409 | 0,426 | −0,451[b] | 0,658 | 6,39 |
| Velocidade orbital, km/s | 47,9 | 35,0 | 29,8 | 24,1 | 13,1 | 9,64 | 6,81 | 5,43 | 4,74 |
| Inclinação do eixo em relação à órbita | <28° | ≈3° | 23,4° | 25,0° | 3,08° | 26,7° | 97,9° | 29,6° | 57,5° |
| Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra | 7,00° | 3,39° | | 1,85° | 1,30° | 2,49° | 0,77° | 1,77° | 17,2° |
| Excentricidade da órbita | 0,206 | 0,0068 | 0,0167 | 0,0934 | 0,0485 | 0,0556 | 0,0472 | 0,0086 | 0,250 |
| Diâmetro equatorial, km | 4880 | 12 100 | 12 800 | 6790 | 143 000 | 120 000 | 51 800 | 49 500 | 2300 |
| Massa (Terra = 1) | 0,0558 | 0,815 | 1,000 | 0,107 | 318 | 95,1 | 14,5 | 17,2 | 0,002 |
| Massa específica (água = 1) | 5,60 | 5,20 | 5,52 | 3,95 | 1,31 | 0,704 | 1,21 | 1,67 | 2,03 |
| Valor de *g* na superfície[c], $m/s^2$ | 3,78 | 8,60 | 9,78 | 3,72 | 22,9 | 9,05 | 7,77 | 11,0 | 0,5 |
| Velocidade de escape[c], km/s | 4,3 | 10,3 | 11,2 | 5,0 | 59,5 | 35,6 | 21,2 | 23,6 | 1,1 |
| Satélites conhecidos | 0 | 0 | 1 | 2 | 63 + anéis | 34 + anéis | 27 + anéis | 13 + anéis | 1 |

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]Vênus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.

[c]Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

*A partir de 2008, por decisão da União Astronômica, Plutão não é mais um planeta e sim um plutóide, uma nova classe de astro que, até o momento, tem apenas dois representantes: Plutão e Eris. (N.T.)

# Fatores de Conversão D

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente dessas tabelas. Assim, por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções e, portanto, $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

## Ângulo Plano

| ° | ′ | ″ | RADIANOS | revoluções |
|---|---|---|---|---|
| 1 grau = 1 | 60 | 3600 | $1{,}745 \times 10^{-2}$ | $2{,}778 \times 10^{-3}$ |
| 1 minuto = $1{,}667 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 | $2{,}909 \times 10^{-4}$ | $4{,}630 \times 10^{-5}$ |
| 1 segundo = $2{,}778 \times 10^{-4}$ | $1{,}667 \times 10^{-2}$ | 1 | $4{,}848 \times 10^{-6}$ | $7{,}716 \times 10^{-7}$ |
| 1 RADIANO = 57,30 | 3438 | $2{,}063 \times 10^{5}$ | 1 | 0,1592 |
| 1 revolução = 360 | $2{,}16 \times 10^{4}$ | $1{,}296 \times 10^{6}$ | 6,283 | 1 |

## Ângulo Sólido

1 esfera = $4\pi$ esferorradianos = 12,57 esferorradianos

## Comprimento

| | cm | METROS | km | polegadas | pés | milhas |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 centímetro = 1 | | $10^{-2}$ | $10^{-5}$ | 0,3937 | $3{,}281 \times 10^{-2}$ | $6{,}214 \times 10^{-6}$ |
| 1 METRO = 100 | | 1 | $10^{-3}$ | 39,37 | 3,281 | $6{,}214 \times 10^{-4}$ |
| 1 quilômetro = $10^{5}$ | | 1000 | 1 | $3{,}937 \times 10^{4}$ | 3281 | 0,6214 |
| 1 polegada = 2,540 | | $2{,}540 \times 10^{-2}$ | $2{,}540 \times 10^{-5}$ | 1 | $8{,}333 \times 10^{-2}$ | $1{,}578 \times 10^{-5}$ |
| 1 pé = 30,48 | | 0,3048 | $3{,}048 \times 10^{-4}$ | 12 | 1 | $1{,}894 \times 10^{-4}$ |
| 1 milha = $1{,}609 \times 10^{5}$ | | 1609 | 1,609 | $6{,}336 \times 10^{4}$ | 5280 | 1 |

1 angström = $10^{-10}$ m
1 fermi = $10^{-15}$ m
1 braça = 6 pés
1 vara = 16,5 pés
1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{12}$ km
1 raio de Bohr = $5{,}292 \times 10^{-11}$ m
1 mil = $10^{-3}$ polegadas
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km
1 jarda = 3 pés
1 nm = $10^{-9}$ m

## Área

| | METROS$^2$ | cm$^2$ | pés$^2$ | polegadas$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 METRO QUADRADO = 1 | | $10^{4}$ | 10,76 | 1550 |
| 1 centímetro quadrado = $10^{-4}$ | | 1 | $1{,}076 \times 10^{-3}$ | 0,1550 |
| 1 pé quadrado = $9{,}290 \times 10^{-2}$ | | 929,0 | 1 | 144 |
| 1 polegada quadrada = $6{,}452 \times 10^{-4}$ | | 6,452 | $6{,}944 \times 10^{-3}$ | 1 |

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ pés$^2$ = 640 acres
1 acre = 43 560 pés$^2$
1 barn = $10^{-28}$ m$^2$
1 hectare = $10^{4}$ m$^2$ = 2,471 acres

## Volume

| METROS$^3$ | $cm^3$ | L | $pés^3$ | polegadas$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 METRO CÚBICO = 1 | $10^6$ | 1000 | 35,31 | $6{,}102 \times 10^4$ |
| 1 centímetro cúbico = $10^{-6}$ | 1 | $1{,}000 \times 10^{-3}$ | $3{,}531 \times 10^{-5}$ | $6{,}102 \times 10^{-2}$ |
| 1 litro = $1{,}000 \times 10^{-3}$ | 1000 | 1 | $3{,}531 \times 10^{-2}$ | 61,02 |
| 1 pé cúbico = $2{,}832 \times 10^{-2}$ | $2{,}832 \times 10^4$ | 28,32 | 1 | 1728 |
| 1 polegada cúbica = $1{,}639 \times 10^{-5}$ | 16,39 | $1{,}639 \times 10^{-2}$ | $5{,}787 \times 10^{-4}$ | 1 |

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas$^3$

1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas$^3$ = 1,201 galão americano

## Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são freqüentemente usadas como tal. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg "=" 2,205 lb, isso significa que um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local onde $g$ tem o valor-padrão de 9,80665 m/s$^2$.

| g | QUILOGRAMAS | slugs | u | onças | libras | toneladas |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 grama = 1 | 0,001 | $6{,}852 \times 10^{-5}$ | $6{,}022 \times 10^{23}$ | $3{,}527 \times 10^{-2}$ | $2{,}205 \times 10^{-3}$ | $1{,}102 \times 10^{-6}$ |
| 1 QUILOGRAMA = 1000 | 1 | $6{,}852 \times 10^{-2}$ | $6{,}022 \times 10^{26}$ | 35,27 | 2,205 | $1{,}102 \times 10^{-3}$ |
| 1 slug = $1{,}459 \times 10^4$ | 14,59 | 1 | $8{,}786 \times 10^{27}$ | 514,8 | 32,17 | $1{,}609 \times 10^{-2}$ |
| 1 unidade de massa atômica = $1{,}661 \times 10^{-24}$ | $1{,}661 \times 10^{-27}$ | $1{,}138 \times 10^{-28}$ | 1 | $5{,}857 \times 10^{-26}$ | $3{,}662 \times 10^{-27}$ | $1{,}830 \times 10^{-30}$ |
| 1 onça = 28,35 | $2{,}835 \times 10^{-2}$ | $1{,}943 \times 10^{-3}$ | $1{,}718 \times 10^{25}$ | 1 | $6{,}250 \times 10^{-2}$ | $3{,}125 \times 10^{-5}$ |
| 1 libra = 453,6 | 0,4536 | $3{,}108 \times 10^{-2}$ | $2{,}732 \times 10^{26}$ | 16 | 1 | 0,0005 |
| 1 tonelada = $9{,}072 \times 10^5$ | 907,2 | 62,16 | $5{,}463 \times 10^{29}$ | $3{,}2 \times 10^4$ | 2000 | 1 |

1 tonelada métrica = 1000 kg

## Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tal, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

| slugs/pé$^3$ | QUILOGRAMAS/ METRO$^3$ | g/cm$^3$ | lb/pé$^3$ | lb/polegada$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 slug por pé$^3$ = 1 | 515,4 | 0,5154 | 32,17 | $1{,}862 \times 10^{-2}$ |
| 1 QUILOGRAMA por METRO$^3$ = $1{,}940 \times 10^{-3}$ | 1 | 0,001 | $6{,}243 \times 10^{-2}$ | $3{,}613 \times 10^{-5}$ |
| 1 grama por centímetro$^3$ = 1,940 | 1000 | 1 | 62,43 | $3{,}613 \times 10^{-2}$ |
| 1 libra por pé$^3$ = $3{,}108 \times 10^{-2}$ | 16,02 | $16{,}02 \times 10^{-2}$ | 1 | $5{,}787 \times 10^{-4}$ |
| 1 libra por polegada$^3$ = 53,71 | $2{,}768 \times 10^4$ | 27,68 | 1728 | 1 |

## Tempo

| anos | d | h | min | SEGUNDOS |
|---|---|---|---|---|
| 1 ano = 1 | 365,25 | $8{,}766 \times 10^3$ | $5{,}259 \times 10^5$ | $3{,}156 \times 10^7$ |
| 1 dia = $2{,}738 \times 10^{-3}$ | 1 | 24 | 1440 | $8{,}640 \times 10^4$ |
| 1 hora = $1{,}141 \times 10^{-4}$ | $4{,}167 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 | 3600 |
| 1 minuto = $1{,}901 \times 10^{-6}$ | $6{,}944 \times 10^{-4}$ | $1{,}667 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 |
| 1 SEGUNDO = $3{,}169 \times 10^{-8}$ | $1{,}157 \times 10^{-5}$ | $2{,}778 \times 10^{-4}$ | $1{,}667 \times 10^{-2}$ | 1 |

## Velocidade

| pés/s | km/h | METROS/SEGUNDO | milhas/h | cm/s |
|---|---|---|---|---|
| 1 pé por segundo = 1 | 1,097 | 0,3048 | 0,6818 | 30,48 |
| 1 quilômetro por hora = 0,9113 | 1 | 0,2778 | 0,6214 | 27,78 |
| 1 METRO por SEGUNDO = 3,281 | 3,6 | 1 | 2,237 | 100 |
| 1 milha por hora = 1,467 | 1,609 | 0,4470 | 1 | 44,70 |
| 1 centímetro por segundo = $3{,}281 \times 10^{-2}$ | $3{,}6 \times 10^{-2}$ | 0,01 | $2{,}237 \times 10^{-2}$ | 1 |

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s  1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

## Força

As unidades de força nas áreas sombreadas são atualmente pouco usadas. 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde $g$ possui o valor-padrão de 9,80665 m/s$^2$.

| dina | NEWTONS | libras | poundals | gf | kgf |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 dina = 1 | $10^{-5}$ | $2{,}248 \times 10^{-6}$ | $7{,}233 \times 10^{-5}$ | $1{,}020 \times 10^{-3}$ | $1{,}020 \times 10^{-6}$ |
| 1 NEWTON = $10^5$ | 1 | 0,2248 | 7,233 | 102,0 | 0,1020 |
| 1 libra = $4{,}448 \times 10^5$ | 4,448 | 1 | 32,17 | 453,6 | 0,4536 |
| 1 poundal = $1{,}383 \times 10^4$ | 0,1383 | $3{,}108 \times 10^{-2}$ | 1 | 14,10 | $1{,}410 \times 10^2$ |
| 1 grama-força = 980,7 | $9{,}807 \times 10^{-3}$ | $2{,}205 \times 10^{-3}$ | $7{,}093 \times 10^{-2}$ | 1 | 0,001 |
| 1 quilograma-força = $9{,}807 \times 10^5$ | 9,807 | 2,205 | 70,93 | 1000 | 1 |

1 tonelada = 2000 lb

## Pressão

| atm | dinas/cm$^2$ | polegadas de água | cm Hg | PASCALS | libras/polegada$^2$ | libras/pé$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 atmosfera = 1 | $1{,}013 \times 10^6$ | 406,8 | 76 | $1{,}013 \times 10^5$ | 14,70 | 2116 |
| 1 dina por centímetro$^2$ = $9{,}869 \times 10^{-7}$ | 1 | $4{,}015 \times 10^{-4}$ | $7{,}501 \times 10^{-5}$ | 0,1 | $1{,}405 \times 10^{-5}$ | $2{,}089 \times 10^{-3}$ |
| 1 polegada de água a 4°C = $2{,}458 \times 10^{-3}$ | 2491 | 1 | 0,1868 | 249,1 | $3{,}613 \times 10^{-2}$ | 5,202 |
| 1 centímetro de mercúrio[a] a 0°C = $1{,}316 \times 10^{-2}$ | $1{,}333 \times 10^4$ | 5,353 | 1 | 1333 | 0,1934 | 27,85 |
| 1 PASCAL = $9{,}869 \times 10^{-6}$ | 10 | $4{,}015 \times 10^{-3}$ | $7{,}501 \times 10^{-4}$ | 1 | $1{,}450 \times 10^{-4}$ | $2{,}089 \times 10^{-2}$ |
| 1 libra por polegada$^2$ = $6{,}805 \times 10^{-2}$ | $6{,}895 \times 10^4$ | 27,68 | 5,171 | $6{,}895 \times 10^3$ | 1 | 144 |
| 1 libra por pé$^2$ = $4{,}725 \times 10^{-4}$ | 478,8 | 0,1922 | $3{,}591 \times 10^{-2}$ | 47,88 | $6{,}944 \times 10^{-3}$ | 1 |

[a]Onde a aceleração da gravidade possui o valor-padrão de 9,80665 m/s$^2$.

1 bar = $10^6$ dina/cm$^2$ = 0,1 MPa  1 milibar = $10^3$ dinas/cm$^2$ = $10^2$ Pa  1 torr = 1 mm Hg

UNICAMP - FE - BIBLIOTECA

## Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia $E = mc^2$, e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

| | Btu | erg | pés-libras | hp · h | JOULES | cal | kW · h | eV | MeV | kg | u |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Btu = | 1 | $1{,}055 \times 10^{10}$ | 777,9 | $3{,}929 \times 10^{-4}$ | 1055 | 252,0 | $2{,}930 \times 10^{-4}$ | $6{,}585 \times 10^{21}$ | $6{,}585 \times 10^{15}$ | $1{,}174 \times 10^{-14}$ | $7{,}070 \times 10^{12}$ |
| 1 erg = | $9{,}481 \times 10^{-11}$ | 1 | $7{,}376 \times 10^{-8}$ | $3{,}725 \times 10^{-14}$ | $10^{-7}$ | $2{,}389 \times 10^{-8}$ | $2{,}778 \times 10^{-14}$ | $6{,}242 \times 10^{11}$ | $6{,}242 \times 10^{5}$ | $1{,}113 \times 10^{-24}$ | 670,2 |
| 1 pé-libra = | $1{,}285 \times 10^{-3}$ | $1{,}356 \times 10^{7}$ | 1 | $5{,}051 \times 10^{-7}$ | 1,356 | 0,3238 | $3{,}766 \times 10^{-7}$ | $8{,}464 \times 10^{18}$ | $8{,}464 \times 10^{12}$ | $1{,}509 \times 10^{-17}$ | $9{,}037 \times 10^{9}$ |
| 1 horsepower-hora = | 2545 | $2{,}685 \times 10^{13}$ | $1{,}980 \times 10^{6}$ | 1 | $2{,}685 \times 10^{6}$ | $6{,}413 \times 10^{5}$ | 0,7457 | $1{,}676 \times 10^{25}$ | $1{,}676 \times 10^{19}$ | $2{,}988 \times 10^{-11}$ | $1{,}799 \times 10^{16}$ |
| 1 JOULE = | $9{,}481 \times 10^{-4}$ | $10^{7}$ | 0,7376 | $3{,}725 \times 10^{-7}$ | 1 | 0,2389 | $2{,}778 \times 10^{-7}$ | $6{,}242 \times 10^{18}$ | $6{,}242 \times 10^{12}$ | $1{,}113 \times 10^{-17}$ | $6{,}702 \times 10^{9}$ |
| 1 caloria = | $3{,}968 \times 10^{-3}$ | $4{,}1868 \times 10^{7}$ | 3,088 | $1{,}560 \times 10^{-6}$ | 4,1868 | 1 | $1{,}163 \times 10^{-6}$ | $2{,}613 \times 10^{19}$ | $2{,}613 \times 10^{13}$ | $4{,}660 \times 10^{-17}$ | $2{,}806 \times 10^{10}$ |
| 1 quilowatt-hora = | 3413 | $3{,}600 \times 10^{13}$ | $2{,}655 \times 10^{6}$ | 1,341 | $3{,}600 \times 10^{6}$ | $8{,}600 \times 10^{5}$ | 1 | $2{,}247 \times 10^{25}$ | $2{,}247 \times 10^{19}$ | $4{,}007 \times 10^{-11}$ | $2{,}413 \times 10^{16}$ |
| 1 elétron-volt = | $1{,}519 \times 10^{-22}$ | $1{,}602 \times 10^{-12}$ | $1{,}182 \times 10^{-19}$ | $5{,}967 \times 10^{-26}$ | $1{,}602 \times 10^{-19}$ | $3{,}827 \times 10^{-20}$ | $4{,}450 \times 10^{-26}$ | 1 | $10^{-6}$ | $1{,}783 \times 10^{-36}$ | $1{,}074 \times 10^{-9}$ |
| 1 milhão de elétron-volts = | $1{,}519 \times 10^{-16}$ | $1{,}602 \times 10^{-6}$ | $1{,}182 \times 10^{-13}$ | $5{,}967 \times 10^{-20}$ | $1{,}602 \times 10^{-13}$ | $3{,}827 \times 10^{-14}$ | $4{,}450 \times 10^{-20}$ | $10^{-6}$ | 1 | $1{,}783 \times 10^{-30}$ | $1{,}074 \times 10^{-3}$ |
| 1 quilograma = | $8{,}521 \times 10^{13}$ | $8{,}987 \times 10^{23}$ | $6{,}629 \times 10^{16}$ | $3{,}348 \times 10^{10}$ | $8{,}987 \times 10^{16}$ | $2{,}146 \times 10^{16}$ | $2{,}497 \times 10^{10}$ | $5{,}610 \times 10^{35}$ | $5{,}610 \times 10^{29}$ | 1 | $6{,}022 \times 10^{26}$ |
| 1 unidade unificada de massa atômica = | $1{,}415 \times 10^{-13}$ | $1{,}492 \times 10^{-3}$ | $1{,}101 \times 10^{-10}$ | $5{,}559 \times 10^{-17}$ | $1{,}492 \times 10^{-10}$ | $3{,}564 \times 10^{-11}$ | $4{,}146 \times 10^{-17}$ | $9{,}320 \times 10^{8}$ | 932,0 | $1{,}661 \times 10^{-27}$ | 1 |

## Potência

| | Btu/h | pés-libras/s | hp | cal/s | kW | WATTS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Btu por hora = | 1 | 0,2161 | $3{,}929 \times 10^{-4}$ | $6{,}998 \times 10^{-2}$ | $2{,}930 \times 10^{-4}$ | 0,2930 |
| 1 pé-libra por segundo = | 4,628 | 1 | $1{,}818 \times 10^{-3}$ | 0,3239 | $1{,}356 \times 10^{-3}$ | 1,356 |
| 1 horsepower = | 2545 | 550 | 1 | 178,1 | 0,7457 | 745,7 |
| 1 caloria por segundo = | 14,29 | 3,088 | $5{,}615 \times 10^{-3}$ | 1 | $4{,}186 \times 10^{-3}$ | 4,186 |
| 1 quilowatt = | 3413 | 737,6 | 1,341 | 238,9 | 1 | 1000 |
| 1 WATT = | 3,413 | 0,7376 | $1{,}341 \times 10^{-3}$ | 0,2389 | 0,001 | 1 |

## Campo Magnético

| | gauss | TESLAS | miligauss |
|---|---|---|---|
| 1 gauss = | 1 | $10^{-4}$ | 1000 |
| 1 TESLA = | $10^{4}$ | 1 | $10^{7}$ |
| 1 miligauss = | 0,001 | $10^{-7}$ | 1 |

1 tesla = 1 weber/metro$^2$

## Fluxo Magnético

| | maxwell | WEBERS |
|---|---|---|
| 1 maxwell = | 1 | $10^{-8}$ |
| 1 WEBER = | $10^{8}$ | 1 |

# Fórmulas Matemáticas F

## Geometria

Círculo de raio $r$: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.
Esfera de raio $r$: área $= 4\pi r^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
Cilindro circular reto de raio $r$ e altura $h$:
área $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; volume $= \pi r^2 h$.
Triângulo de base $a$ e altura $h$: área $= \frac{1}{2}ah$.

## Fórmula de Báskara

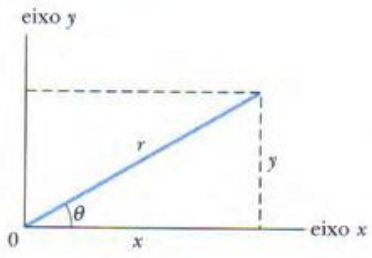
Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

## Funções Trigonométricas do Ângulo $\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

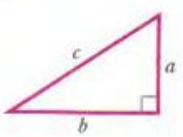
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$



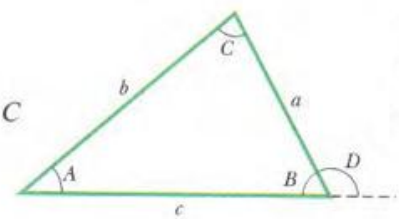

## Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,
$a^2 + b^2 = c^2$




## Triângulos

Ângulos: $A, B, C$
Lados opostos: $a, b, c$
$A + B + C = 180°$
$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
Ângulo externo $D = A + C$




## Sinais e Símbolos Matemáticos

$=$ igual a
$\approx$ aproximadamente igual a
$\sim$ da ordem de grandeza de
$\neq$ diferente de
$\equiv$ idêntico a, definido como
$>$ maior que ($\gg$ muito maior que)
$<$ menor que ($\ll$ muito menor que)
$\geq$ maior ou igual a (não menor que)
$\leq$ menor ou igual a (não maior que)
$\pm$ mais ou menos
$\propto$ proporcional a
$\Sigma$ somatório de
$x_{\text{méd}}$ valor médio de $x$

## Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

## Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

## Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

## Expansão Logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

## Expansões Trigonométricas ($\theta$ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

## Regra de Cramer

Duas equações lineares simultâneas com incógnitas $x$ e $y$,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

têm como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

## Produtos de Vetores

Sejam $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ vetores unitários nas direções $x$, $y$ e $z$, respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \quad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}$$

Qualquer vetor $\vec{a}$ de componentes $a_x$, $a_y$ e $a_z$ ao longo dos eixos $x$, $y$ e $z$ pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores arbitrários de módulos $a$, $b$ e $c$. Nesse caso,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{escalar}).$$

Seja $\theta$ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

## Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir as letras $u$ e $v$ representam duas funções de $x$, e $a$ e $m$ são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
10. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$
2. $\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\int e^x\,dx = e^x$
8. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\int x^2 e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
18. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$
19. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$
20. $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}\ (a>0)$
21. $\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

# F Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm, a menos que seja indicado em contrário.

| Elemento | Símbolo | Número Atômico, $Z$ | Massa Molar, g/mol | Massa Específica, g/cm³ a 20°C | Ponto de Fusão, °C | Ponto de Ebulição, °C | Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Actínio | Ac | 89 | (227) | 10,06 | 1323 | (3473) | 0,092 |
| Alumínio | Al | 13 | 26,9815 | 2,699 | 660 | 2450 | 0,900 |
| Amerício | Am | 95 | (243) | 13,67 | 1541 | — | — |
| Antimônio | Sb | 51 | 121,75 | 6,691 | 630,5 | 1380 | 0,205 |
| Argônio | Ar | 18 | 39,948 | $1,6626 \times 10^{-3}$ | −189,4 | −185,8 | 0,523 |
| Arsênio | As | 33 | 74,9216 | 5,78 | 817 (28 atm) | 613 | 0,331 |
| Astatínio | At | 85 | (210) | — | (302) | — | — |
| Bário | Ba | 56 | 137,34 | 3,594 | 729 | 1640 | 0,205 |
| Berílio | Be | 4 | 9,0122 | 1,848 | 1287 | 2770 | 1,83 |
| Berquélio | Bk | 97 | (247) | 14,79 | — | — | — |
| Bismuto | Bi | 83 | 208,980 | 9,747 | 271,37 | 1560 | 0,122 |
| Bóhrio | Bh | 107 | 262,12 | — | — | — | — |
| Boro | B | 5 | 10,811 | 2,34 | 2030 | — | 1,11 |
| Bromo | Br | 35 | 79,909 | 3,12 (líquida) | −7,2 | 58 | 0,293 |
| Cádmio | Cd | 48 | 112,40 | 8,65 | 321,03 | 765 | 0,226 |
| Cálcio | Ca | 20 | 40,08 | 1,55 | 838 | 1440 | 0,624 |
| Califórnio | Cf | 98 | (251) | — | — | — | — |
| Carbono | C | 6 | 12,01115 | 2,26 | 3727 | 4830 | 0,691 |
| Cério | Ce | 58 | 140,12 | 6,768 | 804 | 3470 | 0,188 |
| Césio | Cs | 55 | 132,905 | 1,873 | 28,40 | 690 | 0,243 |
| Chumbo | Pb | 82 | 207,19 | 11,35 | 327,45 | 1725 | 0,129 |
| Cloro | Cl | 17 | 35,453 | $3,214 \times 10^{-3}$ (0°C) | −101 | −34,7 | 0,486 |
| Cobalto | Co | 27 | 58,9332 | 8,85 | 1495 | 2900 | 0,423 |
| Cobre | Cu | 29 | 63,54 | 8,96 | 1083,40 | 2595 | 0,385 |
| Criptônio | Kr | 36 | 83,80 | $3,488 \times 10^{-3}$ | −157,37 | −152 | 0,247 |
| Cromo | Cr | 24 | 51,996 | 7,19 | 1857 | 2665 | 0,448 |
| Cúrio | Cm | 96 | (247) | 13,3 | — | — | — |
| Darmstádtio | Ds | 110 | (271) | — | — | — | — |
| Disprósio | Dy | 66 | 162,50 | 8,55 | 1409 | 2330 | 0,172 |
| Dúbnio | Db | 105 | 262,114 | — | — | — | — |
| Einstênio | Es | 99 | (254) | — | — | — | — |
| Enxofre | S | 16 | 32,064 | 2,07 | 119,0 | 444,6 | 0,707 |
| Érbio | Er | 68 | 167,26 | 9,15 | 1522 | 2630 | 0,167 |
| Escândio | Sc | 21 | 44,956 | 2,99 | 1539 | 2730 | 0,569 |
| Estanho | Sn | 50 | 118,69 | 7,2984 | 231,868 | 2270 | 0,226 |
| Estrôncio | Sr | 38 | 87,62 | 2,54 | 768 | 1380 | 0,737 |
| Európio | Eu | 63 | 151,96 | 5,243 | 817 | 1490 | 0,163 |
| Férmio | Fm | 100 | (237) | — | — | — | — |
| Ferro | Fe | 26 | 55,847 | 7,874 | 1536,5 | 3000 | 0,447 |
| Flúor | F | 9 | 18,9984 | $1,696 \times 10^{-3}$ (0°C) | −219,6 | −188,2 | 0,753 |

| Elemento | Símbolo | Número Atômico, $Z$ | Massa Molar, g/mol | Massa Específica, g/cm³ a 20°C | Ponto de Fusão, °C | Ponto de Ebulição, °C | Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fósforo | P | 15 | 30,9738 | 1,83 | 44,25 | 280 | 0,741 |
| Frâncio | Fr | 87 | (223) | — | (27) | — | — |
| Gadolínio | Gd | 64 | 157,25 | 7,90 | 1312 | 2730 | 0,234 |
| Gálio | Ga | 31 | 69,72 | 5,907 | 29,75 | 2237 | 0,377 |
| Germânio | Ge | 32 | 72,59 | 5,323 | 937,25 | 2830 | 0,322 |
| Háfnio | Hf | 72 | 178,49 | 13,31 | 2227 | 5400 | 0,144 |
| Hássio | Hs | 108 | (265) | — | — | — | — |
| Hélio | He | 2 | 4,0026 | $0{,}1664 \times 10^{-3}$ | −269,7 | −268,9 | 5,23 |
| Hidrogênio | H | 1 | 1,00797 | $0{,}08375 \times 10^{-3}$ | −259,19 | −252,7 | 14,4 |
| Hólmio | Ho | 67 | 164,930 | 8,79 | 1470 | 2330 | 0,165 |
| Índio | In | 49 | 114,82 | 7,31 | 156,634 | 2000 | 0,233 |
| Iodo | I | 53 | 126,9044 | 4,93 | 113,7 | 183 | 0,218 |
| Irídio | Ir | 77 | 192,2 | 22,5 | 2447 | (5300) | 0,130 |
| Itérbio | Yb | 70 | 173,04 | 6,965 | 824 | 1530 | 0,155 |
| Ítrio | Y | 39 | 88,905 | 4,469 | 1526 | 3030 | 0,297 |
| Lantânio | La | 57 | 138,91 | 6,189 | 920 | 3470 | 0,195 |
| Laurêncio | Lr | 103 | (257) | — | — | — | — |
| Lítio | Li | 3 | 6,939 | 0,534 | 180,55 | 1300 | 3,58 |
| Lutécio | Lu | 71 | 174,97 | 9,849 | 1663 | 1930 | 0,155 |
| Magnésio | Mg | 12 | 24,312 | 1,738 | 650 | 1107 | 1,03 |
| Manganês | Mn | 25 | 54,9380 | 7,44 | 1244 | 2150 | 0,481 |
| Meitnério | Mt | 109 | (266) | — | — | — | — |
| Mendelévio | Md | 101 | (256) | — | — | — | — |
| Mercúrio | Hg | 80 | 200,59 | 13,55 | −38,87 | 357 | 0,138 |
| Molibdênio | Mo | 42 | 95,94 | 10,22 | 2617 | 5560 | 0,251 |
| Neodímio | Nd | 60 | 144,24 | 7,007 | 1016 | 3180 | 0,188 |
| Neônio | Ne | 10 | 20,183 | $0{,}8387 \times 10^{-3}$ | −248,597 | −246,0 | 1,03 |
| Netúnio | Np | 93 | (237) | 20,25 | 637 | — | 1,26 |
| Nióbio | Nb | 41 | 92,906 | 8,57 | 2468 | 4927 | 0,264 |
| Níquel | Ni | 28 | 58,71 | 8,902 | 1453 | 2730 | 0,444 |
| Nitrogênio | N | 7 | 14,0067 | $1{,}1649 \times 10^{-3}$ | −210 | −195,8 | 1,03 |
| Nobélio | No | 102 | (255) | — | — | — | — |
| Ósmio | Os | 76 | 190,2 | 22,59 | 3027 | 5500 | 0,130 |
| Ouro | Au | 79 | 196,967 | 19,32 | 1064,43 | 2970 | 0,131 |
| Oxigênio | O | 8 | 15,9994 | $1{,}3318 \times 10^{-3}$ | −218,80 | −183,0 | 0,913 |
| Paládio | Pd | 46 | 106,4 | 12,02 | 1552 | 3980 | 0,243 |
| Platina | Pt | 78 | 195,09 | 21,45 | 1769 | 4530 | 0,134 |
| Plutônio | Pu | 94 | (244) | 19,8 | 640 | 3235 | 0,130 |
| Polônio | Po | 84 | (210) | 9,32 | 254 | — | — |
| Potássio | K | 19 | 39,102 | 0,862 | 63,20 | 760 | 0,758 |
| Praseodímio | Pr | 59 | 140,907 | 6,773 | 931 | 3020 | 0,197 |
| Prata | Ag | 47 | 107,870 | 10,49 | 960,8 | 2210 | 0,234 |
| Promécio | Pm | 61 | (145) | 7,22 | (1027) | — | — |
| Protactínio | Pa | 91 | (231) | 15,37 (estimada) | (1230) | — | — |
| Rádio | Ra | 88 | (226) | 5,0 | 700 | — | — |
| Radônio | Rn | 86 | (222) | $9{,}96 \times 10^{-3}$ (0°C) | (−71) | −61,8 | 0,092 |
| Rênio | Re | 75 | 186,2 | 21,02 | 3180 | 5900 | 0,134 |
| Ródio | Rh | 45 | 102,905 | 12,41 | 1963 | 4500 | 0,243 |

| Elemento | Símbolo | Número Atômico, $Z$ | Massa Molar, g/mol | Massa Específica, g/cm$^3$ a 20°C | Ponto de Fusão, °C | Ponto de Ebulição, °C | Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Roentgênio | Rg | 111 | (272) | — | — | — | — |
| Rubídio | Rb | 37 | 85,47 | 1,532 | 39,49 | 688 | 0,364 |
| Rutênio | Ru | 44 | 101,107 | 12,37 | 2250 | 4900 | 0,239 |
| Rutherfórdio | Rf | 104 | 261,11 | — | — | — | — |
| Samário | Sm | 62 | 150,35 | 7,52 | 1072 | 1630 | 0,197 |
| Seabórgio | Sg | 106 | 263,118 | — | — | — | — |
| Selênio | Se | 34 | 78,96 | 4,79 | 221 | 685 | 0,318 |
| Silício | Si | 14 | 28,086 | 2,33 | 1412 | 2680 | 0,712 |
| Sódio | Na | 11 | 22,9898 | 0,9712 | 97,85 | 892 | 1,23 |
| Tálio | Tl | 81 | 204,37 | 11,85 | 304 | 1457 | 0,130 |
| Tântalo | Ta | 73 | 180,948 | 16,6 | 3014 | 5425 | 0,138 |
| Tecnécio | Tc | 43 | (99) | 11,46 | 2200 | — | 0,209 |
| Telúrio | Te | 52 | 127,60 | 6,24 | 449,5 | 990 | 0,201 |
| Térbio | Tb | 65 | 158,924 | 8,229 | 1357 | 2530 | 0,180 |
| Titânio | Ti | 22 | 47,90 | 4,54 | 1670 | 3260 | 0,523 |
| Tório | Th | 90 | (232) | 11,72 | 1755 | (3850) | 0,117 |
| Túlio | Tm | 69 | 168,934 | 9,32 | 1545 | 1720 | 0,159 |
| Tungstênio | W | 74 | 183,85 | 19,3 | 3380 | 5930 | 0,134 |
| Unúmbio | Uub | 112 | (285) | — | — | — | — |
| Ununhéxio | Uuh | 116 | (293) | — | — | — | — |
| Ununóctio | Uuo | 118 | (294) | — | — | — | — |
| Ununpêntio | Uup | 115 | (288) | — | — | — | — |
| Ununquádio | Uuq | 114 | (289) | — | — | — | — |
| Ununséptio | Uus | 117 | — | — | — | — | — |
| Ununtrio | Uut | 113 | (284) | — | — | — | — |
| Urânio | U | 92 | (238) | 18,95 | 1132 | 3818 | 0,117 |
| Vanádio | V | 23 | 50,942 | 6,11 | 1902 | 3400 | 0,490 |
| Xenônio | Xe | 54 | 131,30 | $5{,}495 \times 10^{-3}$ | −111,79 | −108 | 0,159 |
| Zinco | Zn | 30 | 65,37 | 7,133 | 419,58 | 906 | 0,389 |
| Zircônio | Zr | 40 | 91,22 | 6,506 | 1852 | 3580 | 0,276 |

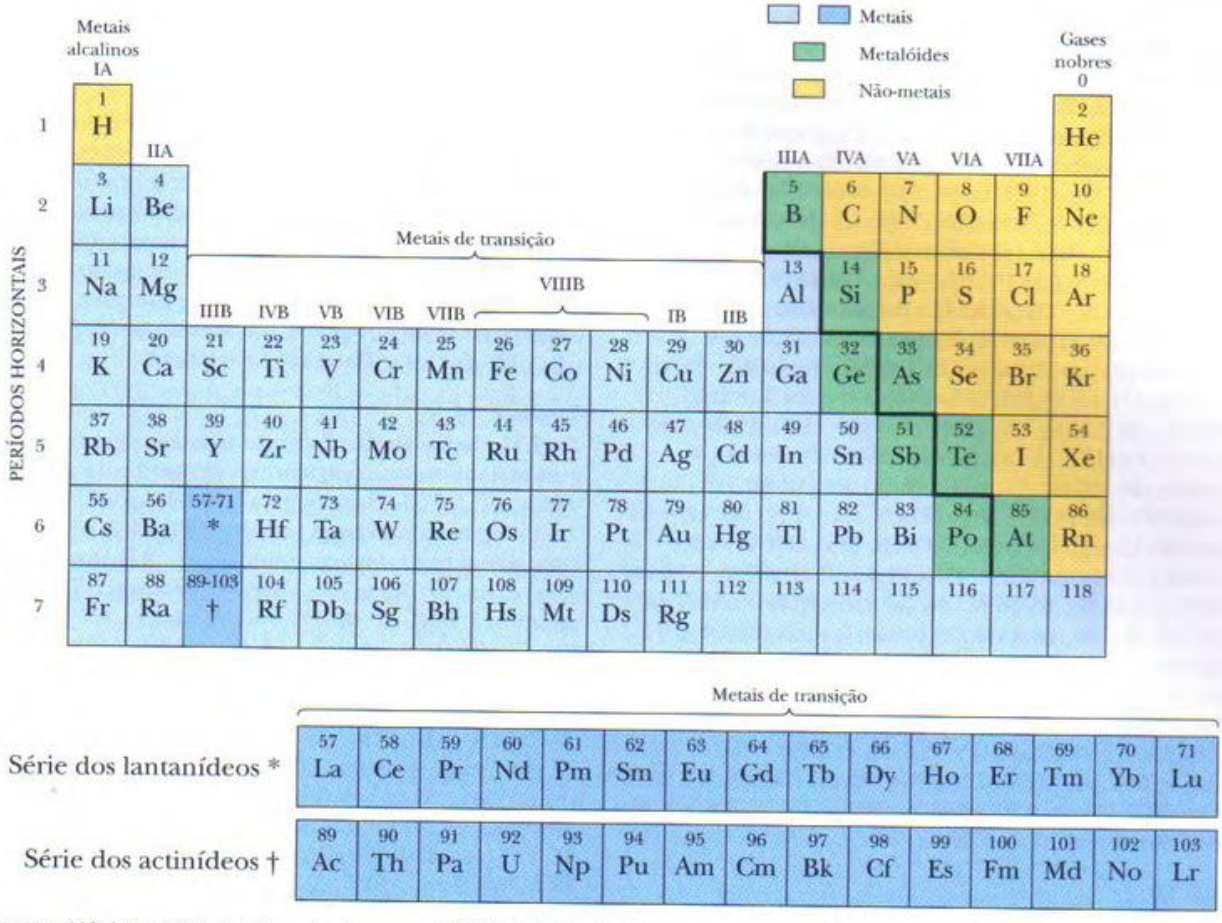
Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando estes se encontram no estado molecular mais comum, como $H_2$, He, $O_2$, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores à pressão constante.

*Fonte*: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3ª edição, 1998, Clarendon Press, Oxford. Veja também www.webelements.com para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

# Tabela Periódica dos Elementos

G







Os elementos 112, 114 e 116 foram descobertos, mas até 2007 ainda não haviam recebido nomes. Veja www.webelements.com para informações mais atualizadas e possíveis novos elementos.

# Respostas

## dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares

### Capítulo 12

**T** **1.** *c, e, f* **2.** (a) não; (b) no ponto de aplicação de $\vec{F}_1$, perpendicular ao plano da figura; (c) 45 N **3.** *d* **P** **1.** *a* e *c* (as forças e os torques se equilibram) **3.** (a) 12 kg; (b) 3 kg; c) 1 kg **5.** (a) 1 e 3, 2; (b) todas iguais; (c) 1 e 3, 2 (zero) **7.** aumenta **9.** (a) em *C* (para eliminar da equação do torque as forças aplicadas a este ponto); (b) positivo; (c) negativo; (d) igual **PR** **1.** (a) 1,00 m; (b) 2,00 m; (c) 0,987 m; (d) 1,97 m **3.** 7,92 kN **5.** (a) 9,4 N; (b) 4,4 N **7.** (a) 1,2 kN; (b) para baixo; (c) 1,7 kN; (d) para cima; (e) o de trás; (f) o da frente **9.** (a) $2,8 \times 10^2$ N; (b) $8,8 \times 10^2$ N; (c) 71° **11.** 74,4 g **13.** (a) 5,0 N; (b) 30 N; (c) 1,3 m **15.** 8,7 N **17.** (a) 2,7 kN; (b) para cima; (c) 3,6 kN; (d) para baixo **19.** (a) 0,64 m; (b) aumentar **21.** 13,6 N **23.** (a) 1,9 kN; (b) para cima; (c) 2,1 kN; (d) para baixo **25.** (a) 192 N; (b) 96,1 N; (c) 55,5 N **27.** (a) 6,63 kN; (b) 5,74 kN; (c) 5,96 kN **29.** 2,20 m **31.** (a) $(-80\text{ N})\hat{i} + (1,3 \times 10^2\text{ N})\hat{j}$; (b) $(80\text{ N})\hat{i} + (1,3 \times 10^2\text{ N})\hat{j}$ **33.** (a) 445 N; (b) 0,50; (c) 315 N **35.** (a) 60,0°; (b) 300 N **37.** 0,34 **39.** (a) desliza; (b) 31°; (c) tomba; (d) 34° **41.** (a) 211 N; (b) 534 N; (c) 320 N **43.** (a) $6,5 \times 10^6$ N/m$^2$; (b) $1,1 \times 10^{-5}$ m **45.** (a) 866 N; (b) 143 N; (c) 0,165 **47.** (a) 0,80; (b) 0,20; (c) 0,25 **49.** (a) $1,4 \times 10^9$ N; (b) 75 **51.** (a) $1,2 \times 10^2$ N; (b) 68 N **53.** 76 N **55.** (a) 8,01 kN; (b)3,65 kN; (c) 5,66 kN **57.** 71,7 N **59.** (a) *L*/2; (b) *L*/4; (c) *L*/6; (d) *L*/8; (e) 25*L*/24 **61.** (a) $1,8 \times 10^7$ N; (b) $1,4 \times 10^7$ N; (c) 16 **63.** 0,29 **65.** 60° **67.** (a) 270 N; (b) 72 N;(c) 19° **69.** (a) 106 N; (b) 64,0° **71.** $2,4 \times 10^9$ N/m$^2$ **73.** (a) 88 N; (b) $(30\hat{i} + 97\hat{j})$ N **75.** (a) $a_1 = L/2, a_2 = 5L/8, h = 9L/8$; (b) $b_1 = 2L/3, b_2 = L/2, h = 7L/6$ **77.** (a) *BC, CD, DA;* (b) 535 N; (c) 757 N **79.** (a) 1,38 kN; (b) 180 N **81.** (a) $\mu < 0,57$; (b) $\mu > 0,57$ **83.** *L*/4 **85.** (a) $(35\hat{i} + 200\hat{j})$ N; (b) $(-45\hat{i} + 200\hat{j})$ N; (c) $1,9 \times 10^2$ N

### Capítulo 13

**T** **1.** todos iguais **2.** (a) 1, 2 e 4, 3; (b) da horizontal **3.** (a) aumenta; (b) negativo **4.** (a) 2; (b) 1 **5.** (a) a trajetória 1 (a redução de *E* (tornando-a mais negativa) reduz o valor de *a*); (b) menor (a redução de *a* resulta em uma redução de *T*) **P** **1.** $Gm^2/r^2$, para cima **3.** *b* e *c*, *a* (zero) **5.** $3GM^2/d^2$, para a esquerda **7.** (a) $+y$; (b) sim, gira no sentido anti-horário até apontar para a partícula *B* **9.** 1, 2 e 4, 3 **11.** *b*, *d* e *f* (os três empatados) *e*, *c*, *a* **PR** **1.** 19 m **3.** 1/2 **5.** $-5,00d$ **7.** $2,60 \times 10^5$ km **9.** 0,8 m **11.** (a) $M = m$; (b) 0 **13.** $8,31 \times 10^{-9}$ N **15.** (a) $-1,88d$; (b) $-3,90d$; (c) $0,489d$ **17.** $2,6 \times 10^6$ m **19.** (a) 17 N; (b) 2,4 **21.** (a) 7,6 m/s$^2$; (b) 4,2 m/s$^2$ **23.** $5 \times 10^{24}$ kg **25.** (a)9,83 m/s$^2$; (b) 9,84 m/s$^2$; (c) 9,79 m/s$^2$ **27.** (a) $(3,0 \times 10^{-7}$ N/kg)*m*; (b) $(3,3 \times 10^{-7}$ N/kg)*m*; (c) $(6,7 \times 10^{-7}$ N/kg · m)*mr* **29.** (a) 0,74;(b)3,8 m/s$^2$; (c) 5,0 km/s **31.** (a)0,0451; (b) 28,5 **33.** $5,0 \times 10^9$ J **35.** (a) 0,50 pJ; (b) −0,50 pJ **37.** (a) 1,7 km/s; (b) $2,5 \times 10^5$ m; (c) 1,4 km/s **39.** (a) 82 km/s; (b) $1,8 \times 10^4$ km/s **41.** $-4,82 \times 10^{-13}$ J **43.** $6,5 \times 10^{23}$ kg **45.** $5 \times 10^{10}$ estrelas **47.** (a) $6,64 \times 10^3$ km; (b) 0,0136 **49.** (a) 7,82 km/s; (b) 87,5 min **51.** (a) $1,9 \times 10^{13}$ m; (b) $3,6R_P$ **55.** 0,71 ano **57.** $5,8 \times 10^6$ m **59.** $(GM/L)^{0.5}$ **61.** (a) 2,8 anos; (b) $1,0 \times 10^{-4}$ **63.** (a) $3,19 \times 10^3$ km; (b) a energia para fazer o satélite subir **65.** (a) $r^{1,5}$; (b) $r^{-1}$; (c) $r^{0,5}$; (d) $r^{-0,5}$ **67.** (a) 7,5 km/s; (b) 97 min; (c) $4,1 \times 10^2$ km; (d) 7,7 km/s; (e) 93 min; (f) $3,2 \times 10^{-3}$ N; (g) não; (h) sim **69.** 1,1 s **71.** (a) $1,0 \times 10^3$ kg; (b) 1,5 km/s **73.** $-0,044\hat{j}$ $\mu$N **75.** (a) $2,15 \times 10^4$ s; (b) 12,3 km/s; (c) 12,0 km/s; (d) $2,17 \times 10^{11}$ J; (e) $-4,53 \times 10^{11}$ J; (f) $-2,35 \times 10^{11}$ J; (g) $4,04 \times 10^7$ m; (h) $1,22 \times 10^3$ s; (i) a elíptica **77.** 0,37$\hat{j}$ $\mu$N **79.** 29 pN **81.** $2,5 \times 10^4$ km **83.** (a) $2,2 \times 10^{-7}$ rad/s; (b) 89 km/s **85.** $3,2 \times 10^{-7}$ N **87.** (a) 0; (b) $1,8 \times 10^{32}$ J; (c) $1,8 \times 10^{32}$ J; (d) 0,99 km/s **89.** $GM_Tm/12R_T$ **91.** (a) $1,4 \times 10^6$ m/s; (b) $3 \times 10^6$ m/s$^2$ **93.** $2\pi r^{1,5}G^{-0,5}(M + m/4)^{-0,5}$ **95.** $2,4 \times 10^4$ m/s **97.** −1,87 GJ **99.** (a) $GMmx(x^2 + R^2)^{-3/2}$; (b) $[2GM(R^{-1} - (R^2 + x^2)^{-1/2})]^{1/2}$ **101.** (a) $Gm^2/R_i$; (b) $Gm^2/2R_i$; (c) $(Gm/R_i)^{0,5}$; (d) $2(Gm/R_i)^{0,5}$; (e) $Gm^2/R_i$; (f) $(2Gm/R_i)^{0,5}$; (g) O referencial do centro de massa é um referencial inercial, e nele a lei de conservação da energia pode ser aplicada como no Capítulo 8; o referencial ligado ao corpo A é não-inercial, e a lei de conservação de energia não pode ser aplicada como no Capítulo 8. A resposta correta é do item (d). **103.** (a) $1,9 \times 10^{11}$ m; (b) $4,6 \times 10^4$ m/s

### Capítulo 14

**T** **1.** são todas iguais **2.** (a) são todas iguais (a força gravitacional a que o pingüim está submetido é a mesma);(b) $0,95\rho_0$; $\rho_0$; $1,1\rho_0$ **3.** 13 cm$^3$/s, para fora **4.** (a) todas iguais; (b) 1, 2 e 3, 4 (quanto mais larga, mais lenta); (c) 4, 3, 2, 1 (quanto mais larga e mais baixa, maior a pressão) **P** **1.** *b*, *a* e *d* (zero), *c* **3.** (a) desce; (b) desce **5.** (a) desce; (b) desce; (c) permanece o mesmo **7.** *B, C, A* **9.** (a) 1 e 4; (b) 2; (c) 3 **PR** **1.** $1,1 \times 10^5$ Pa **3.** $2,9 \times 10^4$ N **5.** 0,074 **7.** (b) 26 kN **9.** $1,08 \times 10^3$ atm **11.** $7,2 \times 10^5$ N **13.** $-2,6 \times 10^4$ Pa **15.** (a) 94 torr; (b) $4,1 \times 10^2$ torr; (c) $3,1 \times 10^2$ torr **17.** (a) $1,0 \times 10^3$ torr; (b) $1,7 \times 10^3$ torr **19.** 0,635 J **21.** 44 km **23.** $4,69 \times 10^5$ N **25.** 739,26 torr **27.** (a) 7,9 km; (b)16 km **29.** 8,50 kg **31.** (a) $2,04 \times 10^{-2}$ m$^3$; (b) 1,57 kN **33.** 5 **35.** (a) $6,7 \times 10^2$ kg/m$^3$; (b) $7,4 \times 10^2$ kg/m$^3$ **37.** (a) 1,2 kg; (b) $1,3 \times 10^3$ kg/m$^3$ **39.** (a) 0,10; (b) 0,083 **41.** 57,3 cm **43.** 0,126 m$^3$ **45.** (a) 1,80 m$^3$; (b) 4,75 m$^3$ **47.** (a) 637,8 cm$^3$; (b) 5,102 m$^3$; (c) $5,102 \times 10^3$ kg **49.** 8,1 m/s **51.** (a) 3,0 m/s; (b) 2,8 m/s **53.** 66 W **55.** (a) 2,5 m/s; (b) $2,6 \times 10^5$ Pa **57.** (a) 3,9 m/s; (b) 88 kPa **59.** (a) $1,6 \times 10^{-3}$ m$^3$/s; (b) 0,90 m **61.** $1,4 \times 10^5$ J **63.** (a) 74 N; (b) $1,5 \times 10^2$ m$^3$ **65.** (a) 35 cm; (b) 30 cm; (c) 20 cm **67.** (b) $2,0 \times 10^2$ m$^3$/s **69.** (a) 0,0776 m$^3$/s; (b) 69,8 kg/s **71.** $1,1 \times 10^2$ m/s **73.** 44,2 g **75.** 45,3 cm$^3$ **77.** (a) 3,2 m/s; (b) $9,2 \times 10^4$ Pa; (c) 10,3 m **79.** $5,11 \times 10^{-7}$ kg **81.** $1,07 \times 10^3$ g **83.** $6,0 \times 10^2$ kg/m$^3$ **85.** 1,5 g/cm$^3$

### Capítulo 15

**T** **1.** (plote *x* em função de *t*) (a) $-x_m$; (b) $+x_m$; (c) 0 **2.** a (*F* deve ter a forma da Eq. 15-10) **3.** (a) 5 J; (b) 2 J; (c) 5 J **4.** são todos iguais (na Eq. 15-29, *I* é proporcional a *m*) **5.** 1, 2, 3 (a razão *m*/*b* faz diferença, mas não o valor de *k*) **P** **1.** (a) 2; (b) positiva; (c) entre 0 e $+x_m$ **3.** a e b **5.** (a) são todas iguais; (b) 3 e depois 1 e 2 empatadas; (c) 1, 2, 3 (zero); (d) 1, 2, 3 (zero); (e) 1, 3, 2 **7.** (a) entre *D* e *E*; (b) entre $3\pi/2$ rad e $2\pi$ rad **9.** (a) maior; (b) igual; (c) igual; (d) maior (e) maior **11.** *b* (período infinito, não oscila), c, *a* **PR** **1.** 37,8 m/s$^2$ **3.** (a) 1,0 mm; (b) 0,75 m/s; (c) $5,7 \times 10^2$ m/s$^2$ **5.** (a) 0,50 s; (b) 2,0 Hz; (c) 18 cm **7.** (a) 0,500 s; (b) 2,00 Hz; (c) 12,6 rad/s; (d) 79,0 N/m; (e) 4,40 m/s; (f) 27,6 N **9.** (a) 498 Hz; (b) maior **11.** (a) 3,0 m; (b) −49 m/s; (c) $-2,7 \times 10^2$ m/s$^2$; (d) 20 rad; (e) 1,5 Hz; (f) 0,67 s **13.** 39,6 Hz **15.** (a) 5,58 Hz; (b) 0,325 kg; (c) 0,400 m **17.** 3,1 cm **19.** (a) 0,18/1; (b) no mesmo sentido **21.** (a) 25 cm; (b) 2,2 Hz **23.** 54 Hz **25.** (a) 0,525 m; (b) 0,686 s **27.** 37 mJ

**29.** (a) 0,75; (b) 0,25; (c) $2^{-0,5}x_m$ **31.** (a) 2,25 Hz; (b) 125 J; (c) 250 J; (d) 86,6 cm **33.** (a) 3,1 ms; (b) 4,0 m/s; (c) 0,080 J; (d) 80 N; (e) 40 N **35.** (a) 1,1 m/s; (b) 3,3 cm **37.** (a) 2,2 Hz; (b) 56 cm/s; (c) 0,0 kg; (d) 20,0 cm **39.** (a) 39,5 rad/s; (b) 34,2 rad/s; (c) 124 rad/s$^2$ **41.** (a) 1,64 s; (b) igual **43.** (a) 0,205 kg · m$^2$; (b) 47,7 cm; (c) 1,50 s **45.** 0,366 s **47.** 8,77 s **49.** (a) 0,53 m; (b) 2,1 s **51.** 0,0653 s **53.** (a) 0,845 rad; (b) 0,0602 rad **55.** (a) 2,26 s; (b) aumenta; (c) permanece o mesmo **57.** (a) 14,3 s; (b) 5,27 **59.** 6,0% **61.** (a) $F_m/b\omega$, (b) $F_m/b$ **63.** 5,0 cm **65.** (a) 1,2 J; (b) 50 **67.** 1,53 m **69.** (a) 16,6 cm; (b) 1,23% **71.** (a) $2,8 \times 10^3$ rad/s; (b) 2,1 m/s; (c) 5,7 km/s$^2$ **73.** (a) 0,735 kg · m$^2$; (b) 0,0240 N · m; (c) 0,181 rad/s **75.** (a) 0,35 Hz; (b) 0,39 Hz; (c) 0 (não há oscilações) **77.** (a) 7,90 N/m; (b) 1,19 cm; (c) 2,00 Hz **79.** 1,6 kg **81.** (a) 3,5 m; (b) 0,75 s **83.** 7,2 m/s **85.** (a) 1,23 kN/m; (b) 76,0 N **87.** (a) 1,1 Hz; (b) 5,0 cm **89.** (a) $1,3 \times 10^2$ N/m; (b) 0,62 s; (c) 1,6 Hz; (d) 5,0 cm; (e) 0,51 m/s **91.** (a) 3,2 Hz; (b) 0,26 m; (c) $x = (0,26\text{ m})\cos(20t - \pi/2)$, com $t$ em segundos **93.** 0,079 kg · m$^2$ **95.** (a) 0,44 s; (b) 0,18 m **97.** (a) 245 N/m; (b) 0,284 s **99.** 50 cm **101.** (a) $8,11 \times 10^{-5}$ kg · m$^2$; (b) 3,14 rad/s **103.** 14,0° **105.** (a) 0,30 m; (b) 0,28 s; (c) $1,5 \times 10^2$ m/s$^2$; (d) 11 J **107.** (a) 0,45 s; (b) 0,10 m acima e 0,20 m abaixo; (c) 0,15 m; (d) 2,3 J **109.** $7 \times 10^2$ N/m **111.** (a) $F/m$; (b) $2F/mL$; (c) 0

## Capítulo 16

**T** **1.** a, 2; b, 3; c, 1 (compare com a fase da Eq. 16-2 e veja a Eq. 16-5) **2.** (a) 2, 3, 1 (veja a Eq. 16-12); (b) 3 e depois 1 e 2 empatados (determine a amplitude de $dy/dt$) **3.** (a) permanece igual (é independente de $f$); (b) diminui ($\lambda = v/f$); (c) aumenta; (d) aumenta **4.** 0,20 e 0,80, 0,60, 0,45 **5.** (a) 1; (b) 3; (c) 2 **6.** (a) 75 Hz; (b) 525 Hz **P** **1.** $a$, para cima; $b$, para cima; $c$, para baixo; $d$, para baixo; $e$, para baixo; $f$, para baixo; $g$, para cima; $h$, para cima **3.** (a) 1, 4, 2, 3; (b) 1, 4, 2, 3 **5.** (a) 0; 0,2 comprimento de onda; 0,5 comprimento de onda (zero); (b) $4P_{méd,1}$ **7.** intermediária (mais próxima de totalmente destrutiva) **9.** $c$, $a$, $b$ **11.** $d$ **PR** **1.** (a) 3,49 m$^{-1}$; (b) 31,5 m/s **3.** (a) 0,680 s; (b) 1,47 Hz; (c) 2,06 m/s **5.** 1,1 ms **7.** (a) 11,7 cm; (b) $\pi$ rad **9.** (a) 64 Hz; (b) 1,3 m; (c) 4,0 cm; (d) 5,0 m$^{-1}$; (e) $4,0 \times 10^2$ s$^{-1}$; (f) $\pi/2$ rad; (g) negativo **11.** (a) 3,0 mm; (b) 16 m$^{-1}$; (c) $2,4 \times 10^2$ s$^{-1}$; (d) negativo **13.** (a) negativa; (b) 4,0 cm; (c) 0,31 cm$^{-1}$; (d) 0,63 s$^{-1}$; (e) $\pi$ rad; (f) negativo; (g) 2,0 cm/s; (h) −2,5 cm/s **15.** 129 m/s **17.** (a) 0,12 mm; (b) 141 m$^{-1}$; (c) 628 s$^{-1}$; (d) positivo **19.** (a) 15 m/s; (b) 0,036 N **21.** (a) 5,0 cm; (b) 40 cm; (c) 12 m/s; (d) 0,033 s; (e) 9,4 m/s; (f) 16 m$^{-1}$; (g) $1,9 \times 10^2$ s$^{-1}$; (h) 0,93 rad; (i) positivo **23.** 2,63 m **27.** 3,2 mm **29.** 0,20 m/s **31.** $1,41y_m$ **33.** (a) 9,0 mm; (b) 16 m$^{-1}$; (c) $1,1 \times 10^3$ s$^{-1}$; (d) 2,7 rad; (e) positivo **35.** 5,0 cm **37.** 84° **39.** (a) 3,29 mm; (b) 1,55 rad; (c) 1,55 rad **41.** (a) 7,91 Hz; (b) 15,8 Hz; (c) 23,7 Hz **43.** (a) 82,0 m/s; (b) 16,8 m; (c) 4,88 Hz **45.** (a) 144 m/s; (b) 60,0 cm; (c) 241 Hz **47.** (a) 105 Hz; (b)158 m/s **49.** 260 Hz **51.** (a) 0,25 cm; (b) $1,2 \times 10^2$ cm/s; (c) 3,0 cm; (d) 0 **53.** (a) 0,50 cm; (b) 3,1 m$^{-1}$; (c) $3,1 \times 10^2$ s$^{-1}$; (d) negativo **55.** (a) 2,00 Hz; (b) 2,00 m; (c) 4,00 m/s; (d) 50,0 cm; (e) 150 cm; (f) 250 cm; (g) 0; (h) 100 cm; (i) 200 cm **57.** 0,25 m **59.** (a) 324 Hz; (b) 8 **61.** (a) $0,83y_1$; (b) 37° **63.** (a) 0,31 m; (b) 1,64 rad; (c) 2,2 mm **65.** 1,2 rad **67.** (a) 3,77 m/s; (b) 12,3 N; (c) 0; (d) 46,4 W; (e) 0; (f) 0; (g) ±0,50 cm **69.** (a) $2\pi y_m/\lambda$; (b) não **71.** (a) 1,00 cm; (b) $3,46 \times 10^3$ s$^{-1}$; (c) 10,5 m$^{-1}$; (d) positivo **73.** (a) 75 Hz; (b) 13 ms **75.** (a) 240 cm; (b) 120 cm; (c) 80 cm **77.** (a) 144 m/s; (b) 3,00 m; (c) 1,50 m; (d) 48,0 Hz; (e) 96,0 Hz **79.** (a) 2,0 mm; (b) 95 Hz; (c) +30 m/s; (d) 31 cm; (e) 1,2 m/s **81.** 36 N **83.** (a) 300 m/s; (b) não **85.** (a) 1,33 m/s; (b) 1,88 m/s; (c) 16,7 m/s$^2$; (d) 23,7 m/s$^2$ **87.** (a) 0,16 m; (b) $2,4 \times 10^2$ N; (c) $y(x, t) = (0,16\text{ m})\,\text{sen}[(1,57\text{ m}^{-1})x]\,\text{sen}[(31,4\text{ s}^{-1})t]$ **89.** (a) $[k\,\Delta\ell(\ell + \Delta\ell)/m]^{0,5}$ **91.** (a) 0,52 m; (b) 40 m/s; (c) 0,40 m **93.** (c) 2,0 m/s; (d) $-x$

## Capítulo 17

**T** **1.** começando a diminuir (exemplo: desloque mentalmente as curvas da Fig. 17-7 para a direita, a partir do ponto $x = 42$ m) **2.** (a) 1 e 2,3 (veja a Eq. 17-28); (b) 3 e depois 1 e 2 empatados (veja a Eq. 17-26) **3.** o segundo (veja as Eqs. 17-39 e 17-41) **4.** $a$, maior; $b$, menor; $c$, indefinido; $d$, indefinido; $e$, maior; $f$, menor **P** **1.** $C$ e depois $A$ e $B$ empatados **3.** (a) 0; 0,2 comprimento de onda; 0,5 comprimento de onda (zero); (b) $4P_{méd,1}$ **5.** 150 Hz e 450 Hz **7.** $E$, $A$, $D$, $C$, $B$ **9.** 1, 4, 3, 2 **PR** **1.** (a) 2,6 km; (b) $2,0 \times 10^2$ **3.** (a) 79 m; (b) 41 m; (c) 89 m **5.** 40,7 m **7.** $1,9 \times 10^3$ km **9.** (a) 76,2 $\mu$m; (b) 0,333 mm **11.** 0,23 ms **13.** (a) $2,3 \times 10^2$ Hz; (b) maior **15.** 960 Hz **17.** (a) 14; (b) 14 **19.** (a) 343 Hz; (b) 3; (c) 5; (d) 686 Hz; (e) 2; (f) 3 **21.** (a) 143 Hz; (b) 3; (c) 5; (d) 286 Hz; (e) 2; (f) 3 **23.** (a) 0; (b) totalmente construtiva; (c) aumenta; (d) 128 m; (e) 63,0 m; (f) 41,2 m **25.** 15,0 mW **27.** 36,8 nm **29.** (a) $1,0 \times 10^3$; (b) 32 **31.** 0,76 $\mu$m **33.** 2 $\mu$W **35.** (a) $5,97 \times 10^{-5}$ W/m$^2$; (b) 4,48 nW **37.** (a) 0,34 nW; (b) 0,68 nW; (c) 1,4 nW; (d) 0,88 nW; (e) 0 **39.** (a) 833 Hz; (b) 0,418 m **41.** (a) 2; (b) 1 **43.** (a) 405 m/s; (b) 596 N; (c) 44,0 cm; (d) 37,3 cm **45.** (a) 3; (b) 1129 Hz; (c) 1506 Hz **47.** 45,3 N **49.** 12,4 m **51.** 2,25 ms **53.** 0,020 **55.** 0 **57.** (a) 526 Hz; (b) 555 Hz **59.** 155 Hz **61.** (a) 1,022 kHz; (b) 1,045 kHz **63.** 41 kHz **65.** (a) 485, Hz; (b) 500,0 Hz; (c) 486,2 Hz; (d) 500,0 Hz **67.** (a) 2,0 kHz; (b) 2,0 kHz **69.** (a) 42°; (b) 11 s **71.** (a) 2,10 m; (b) 1,47 m **73.** (a) 21 nm; (b) 35 cm; (c) 24 nm; (d) 35 cm **75.** 0,25 **77.** (a) $9,7 \times 10^2$ Hz; (b) 1,0 kHz; (c) 60 Hz, não **79.** (a) 39,7 $\mu$W/m$^2$; (b) 171 nm; (c) 0,893 Pa **81.** (a) 10 W; (b) 0,032 W/m$^2$; (c) 99 dB **83.** (a) 7,70 Hz; (b) 7,70 Hz **85.** (a) 59,7; (b) $2,81 \times 10^{-4}$ **87.** (a) 5,2 kHz; (b) 2 **89.** 2,1 m **91.** 1 cm **93.** (a) $3,6 \times 10^2$ m/s; (b) 150 Hz **95.** (a) 0; (b) 0,572 m; (c) 1,14 m **97.** 171 m **99.** (a) 11 ms; (b) 3,8 m **101.** (a) para a direita; (b) 0,90 m/s; (c) menor **103.** (a) $5,5 \times 10^2$ m/s; (b) $1,1 \times 10^3$ m/s; (c) 1 **105.** 400 Hz **107.** (a) 14; (b) 12 **109.** (b) 0,8 a 1,6 $\mu$s **111.** $4,8 \times 10^2$ Hz

## Capítulo 18

**T** **1.** (a) são todos iguais; (b) 50°X, 50°Y, 50°W **2.** (a) 2 e 3, 1, 4; (b) 3, 2 e, em seguida, 1 e 4 empatados (por analogia com as Eqs. 18-9 e 18-10, suponha que a variação da área é proporcional à área inicial) **3.** $A$ (veja a Eq. 18-14) **4.** $c$ e $e$ (maximizam a área limitada por um ciclo no sentido horário) **5.** (a) são todas iguais ($\Delta E_{int}$ não depende da trajetória, mas apenas de $i$ e $f$); (b) 4, 3, 2, 1 (comparando as áreas sob as curvas); (c) 4, 3, 2, 1 (veja a Eq. 18-26) **6.** (a) nula (ciclo fechado); (b) negativa ($W$ é negativo; veja a Eq. 18-26). **7.** $b$ e $d$, $a$, $c$ (mesmo valor de $P_{cond}$; veja a Eq. 18-32) **P** **1.** $B$ e, em seguida, $A$ e C empatados **3.** $c$ e, em seguida, $a$, $b$ e $d$ empatados **5.** (a) ambos no sentido horário; (b) ambos no sentido horário **7.** $c$, $b$, $a$ **9.** (a) $f$, porque a temperatura do gelo não pode aumentar até o ponto de congelamento e depois diminuir; (b) $b$ e $c$ no ponto de congelamento da água, $d$ acima, $e$ abaixo; (c) em $b$, o líquido congela parcialmente e o gelo não derrete; em $c$ o líquido não congela e o gelo não derrete; em $d$ o líquido não congela e o gelo derrete totalmente; em $e$, o líquido congela totalmente e o gelo não derrete **11.** (a) maior; (b) 1, 2, 3; (c) 1, 3, 2; (d) 1, 2, 3; (e) 2, 3, 1 **PR** **1.** 348 K **3.** 1,366 **5.** (a) 320°F; (b) −12,3°F **7.** −92,1°X **9.** 29 cm$^3$ **11.** 2,731 cm **13.** 49,87 cm$^3$ **15.** 0,26 cm$^3$ **17.** 360°C **19.** 0,13 mm **21.** 7,5 cm **23.** 94,6 L **25.** 42,7 kJ **27.** 160 s **29.** 33 g **31.** 3,0 min **33.** 33 m$^2$ **35.** 13,5 C° **37.** 742 kJ **39.** (a) 5,3°C; (b) 0; (c) 0°C; (d) 60 g **41.** (a)

0°C; (b) 2,5°C **43.** −30 J **45.** (a) $1,2 \times 10^2$ J; (b) 75 J; (c) 30 J **47.** 60 J **49.** (a) 6,0 cal; (b) −43 cal; (c) 40 cal; (d) 18 cal; (e) 18 cal **51.** 1,66 kJ/s **53.** (a) 16 J/s; (b) 0,048 g/s **55.** (a) 1,23 kW; (b) 2,28 kW; (c) 1,05 kW **57.** 0,50 min **59.** (a) $1,7 \times 10^4$ W/m$^2$; (b) 18 W/m$^2$ **61.** −4,2°C **63.** 1,1 m **65.** 0,40 cm/h **67.** 10% **69.** $4,5 \times 10^2$ J/kg·K **71.** 0,432 cm$^3$ **73.** (a) $11p_1V_1$; (b) $6p_1V_1$ **75.** $4,83 \times 10^{-2}$ cm$^3$ **77.** 23 J **79.** $3,1 \times 10^2$ J **81.** 10,5°C **83.** 79,5°C **85.** 8,6 J **87.** 333 J **89.** (a) 90 W; (b) $2,3 \times 10^2$ W; (c) $3,3 \times 10^2$ W **91.** (a) $1,87 \times 10^4$; (b) 10,4 h **93.** (a) −45 J; (b) +45 J **95.** (a) 80 J; (b) 80 J **97.** −6,1 nW **99.** 1,17 C°

## Capítulo 19

**T** **1.** todos, menos *c* **2.** (a) são todos iguais; (b) 3, 2, 1 **3.** o gás *A* **4.** 5 (a maior variação de *T*) e, em seguida, 1, 2, 3 e 4 empatados **5.** 1, 2, 3 ($Q_3 = 0$, $Q_2$ é produzido pelo trabalho $W_2$, mas $Q_1$ é produzido por um trabalho maior $W_1$ e aumenta a temperatura do gás) **P** **1.** 20 J **3.** *d*, *a* e *b*, *c* **5.** (a) 3; (b) 1; (c) 4; (d) 2; (e) sim **7.** a volume constante **9.** (a) 1, 2, 3, 4; (b) 1, 2, 3 **PR** **1.** (a) 0,0127 mol; (b) $7,64 \times 10^{21}$ átomos **3.** 25 moléculas/cm$^3$ **5.** 186 kPa **7.** (a) 0,0388 mol; (b) 220°C **9.** (a) $3,14 \times 10^3$ J; (b) cedido **11.** 360 K **13.** 5,60 kJ **15.** (a) 1,5 mol; (b) $1,8 \times 10^3$ K; (c) $6,0 \times 10^2$ K; (d) 5,0 kJ **17.** $2,0 \times 10^5$ Pa **19.** $1,8 \times 10^2$ m/s **21.** (a) 511 m/s; (b) −200°C; (c) 899°C **23.** 1,9 kPa **25.** (a) $5,65 \times 10^{-21}$ J; (b) $7,72 \times 10^{-21}$ J; (c) 3,40 kJ; (d) 4,65 kJ **27.** (a) $6,76 \times 10^{-20}$ J; (b) 10,7 **29.** (a) $6 \times 10^9$ km **31.** (a) $3,27 \times 10^{10}$ moléculas/cm$^3$; (b) 172 m **33.** (a) 420 m/s; (b) 458 m/s; (c) sim **35.** (a) 6,5 km/s; (b) 7,1 km/s **37.** (a) $1,0 \times 10^4$ K; (b) $1,6 \times 10^5$ K; (c) $4,4 \times 10^2$ K; (d) $7,0 \times 10^3$ K; (e) não; (f) sim **39.** (a) 7,0 km/s; (b) $2,0 \times 10^{-8}$ cm; (c) $3,5 \times 10^{10}$ colisões/s **41.** (a) 0,67; (b) 1,2; (c) 1,3; (d) 0,33 **43.** a) 0; (b) +374 J; (c) +374 J; (d) $+3,11 \times 10^{-22}$ J **45.** 15,8 J/mol · K **47.** (a) $6,6 \times 10^{-26}$ kg; (b) 40 g/mol **49.** (a) 3,49 kJ; (b) 2,49 kJ; (c) 997 J; (d) 1,00 kJ **51.** 8,0 kJ **53.** (a) 6,98 kJ; (b) 4,99 kJ; (c) 1,99 kJ; (d) 2,99 kJ **55.** (a) 14 atm; (b) $6,2 \times 10^2$ K **57.** −15 J **59.** −20 J **61.** (a) diatômico; (b) 446 K; (c) 8,10 mol **63.** (a) 3,74 kJ; (b) 3,74 kJ; (c) 0; (d) 0; (e) −1,81 kJ; (f) 1,81 kJ; (g) −3,22 kJ; (h) −1,93 kJ; (i) −1,29 kJ; (j) 520 J; (k) 0; (l) 520 J; (m) 0,0246 m$^3$; (n) 2,00 atm; (o) 0,0373 m$^3$; (p) 1,00 atm **65.** (a) 900 cal; (b) 0; (c) 900 cal; (d) 450 cal; (e) 1200 cal; (f) 300 cal; (g) 900 cal; (h) 450 cal; (i) 0; (j) −900 cal; (k) 900 cal; (l) 450 cal **67.** 349 K **69.** (a) −374 J; (b) 0; (c) +374 J; (d) $+3,11 \times 10^{-22}$ J **71.** $7,03 \times 10^9$ s$^{-1}$ **73.** (a) 2,00 atm; (b) 333 J; (c) 0,961 atm; (d) 236 J **75.** (a) monoatômica; (b) $2,7 \times 10^4$ K; (c) $4,5 \times 10^4$ mol; (d) 3,4 kJ; (e) $3,4 \times 10^2$ kJ; (f) 0,010 **77.** (a) 8,0 atm; (b) 300 K; (c) 4,4 kJ; (d) 3,2 atm; (e) 120 K; (f) 2,9 kJ; (g) 4,6 atm; (h) 170 K; (i) 3,4 kJ **79.** (a) 38 L; (b) 71 g **81.** (a) $3/v_0^3$; (b) $0,750v_0$; (c) $0,775v_0$ **83.** (a) − 2,37 kJ; (b) 2,37 kJ **85.** −3,0 J **87.** (b) 125 J; (c) absorvida

## Capítulo 20

**T** **1.** a, b, c **2.** menor (*Q* é menor) **3.** c, b, a **4.** a, d, c, b **5.** b **P** **1.** *a* e *c* empatados e depois *b* e *d* empatados **3.** *b*, *a*, *c*, *d* **5.** permanece constante **7.** A, primeira; B, primeira e segunda; C, segunda; D, nenhuma **9.** (a) permanece a mesma; (b) aumenta; (c) diminui **PR** **1.** 14,4 J/K **3.** (a) $5,79 \times 10^4$ J; (b) 173 J/K **5.** (a) 9,22 kJ; (b) 23,1 J/K; (c) 0 **7.** (a) 57,0°C; (b) −22,1 J/K; (c) +24,9 J/K; (d) ,+2,8 J/K **9.** (a) −710 mJ/K; (b) +710 mJ/K; (c) +723 mJ/K; (d) −723 mJ/K; (e) +13 mJ/K; (f) 0 **11.** (a) 320 K; (b) 0; (c) +1,72 J/K **13.** (a) 0,333; (b) 0,215; (c) 0,644; (d) 1,10; (e) 1,10; (f) 0; (g) 1,10; (h) 0; (i) −0,889; (j) −0,889; (k) −1,10; (l) −0,889; (m) 0; (n) 0,889; (o) 0 **15.** +0,76 J/K **17.** (a) −943 J/K; (b) +943 J/K; (c) sim **19.** −1,18 J/K **21.** (a) 0,693; (b) 4,50; (c) 0,693; (d) 0; (e) 4,50; (f) 23,0 J/K; (g) −0,693; (h) 7,50; (i) −0,693; (j) 3,00; (k) 4,50; (l) 23,0 J/K **23.** (a) 266 K; (b) 341 K **25.** (a) 23,6%; (b) $1,49 \times 10^4$ J **27.** 97 K **29.** (a) 1,47 kJ; (b) 554 J; (c) 918 J; (d) 62,4% **31.** (a) 2,27 kJ; (b) 14,8 kJ; (c) 15,4%; (d) 75,0%; (e) maior **33.** (a) 33 kJ; (b) 25 kJ; (c) 26 kJ; (d) 18 kJ **35.** (a) 3,00; (b) 1,98; (c) 0,660; (d) 0,495; (e) 0,165; (f) 34,0% **37.** 20 J **39.** 440 W **41.** 2,03 **43.** 0,25 hp **47.** (a) $W = N!/(n_1!n_2!n_3!)$;(b)$[(N/2)!(N/2)!]/[(N/3)!(N/3)!(N/3)!]$; (c) $4,2 \times 10^{16}$ **49.** (a) 87 m/s; (b) $1,2 \times 10^2$ m/s; (c) 22 J/K **51.** (a) 78%; (b) 82 kg/s **53.** (a) 40,9°C; (b) −27,1 J/K; (c) 30,5 J/K; (d) 3,4 J/K **55.** $1,18 \times 10^3$ J/K **57.** (a) 0; (b) 0; (c) −23,0 J/K; (d) 23,0 J/K **59.** (a) 25,5 kJ; (b) 4,73 kJ; (c) 18,5% **61.** 0,141 J/K · s **63.** (a) 42,6 kJ; (b) 7,61 kJ **65.** (a) 4,45 J/K; (b) não **67.** (a) l; (b) l; (c) 3; (d) 10; (e) $1,5 \times 10^{-23}$ J/K; (f) $3,2 \times 10^{-23}$ J/K **69.** +3,59 J/K **71.** (a) 1,95 J/K; (b) 0,650 J/K; (c) 0,217 J/K; (d) 0,072 J/K; (e) diminui **73.** (a) $1,26 \times 10^{14}$; (b) $4,71 \times 10^{13}$; (c) 0,37; (d) $1,01 \times 10^{29}$; (e) $1,37 \times 10^{28}$; (f) 0,14; (g) $9,05 \times 10^{58}$; (h) $1,64 \times 10^{57}$; (i) 0,018; (j) diminui

# Índice

As figuras estão identificadas pelos números das páginas em *itálico*; as tabelas estão indicadas por um t após o número da página.


## A

absorção de calor por sólidos e líquidos, 191-194
aceleração. *Veja também* força; velocidade
  da gravidade (**ag**), 32
    variação com a altitude, 32t
  de queda livre (*g*) medida com um pêndulo físico, 97
  movimento harmônico simples, 89, *89*
  princípio de equivalência (com a gravitação), 45
aço
  coeficiente de dilatação térmica, 189t
  condutividade térmica, 200t
  curva tensão-deformação, 13
  inoxidável, condutividade térmica, 200t
  módulo de elasticidade volumétrico, 14
  propriedades elásticas, 14t
  velocidade do som no, 151t
adiabática, 236, *236*
$\vec{a}_g$ (aceleração gravitacional), 32
  variação com a altitude, 32t
água. *Veja também* gelo
  calores
    de transformação, 192, 193t
    específicos, 191t
  do mar
    calores específicos, 191t
    massa específica, 59t
    velocidade do som na, 151t
  massa específica, 59t
  módulo de elasticidade volumétrico, 14, 151
  ponto triplo, 184
  pontos de ebulição e congelamento em graus Celsius e Fahrenheit, 186t
  propriedades térmicas, 189
  velocidade
    do som na, 151, 151t
    média quadrática à temperatura ambiente, 222t
alpinismo
  escalada de uma chaminé, 20, *20*
  pinça, 21, *21*, 26
alumínio
  calores específicos, 191t
  coeficiente de dilatação linear, 189t
  condutividade térmica, 200t
  propriedades elásticas, 14t
  velocidade do som no, 151t
ambiente, 190
amônio, calor específico molar a volume constante, 230t
amortecedores de massa, 94
amplitude
  angular
    pêndulo simples, 96
  da aceleração no movimento harmônico simples, 89
  da pressão, ondas sonoras, 154, *155*
  da velocidade
    movimento harmônico simples, 89
    oscilações forçadas, 103, *103*
  do deslocamento
    ondas sonoras, 154, *154*
    oscilações forçadas, 103, *103*
  movimento harmônico simples, 88, *88*
  ondas, 119, *119*
análise dimensional, 124
anãs brancas, 39t
  massa específica do núcleo, 59t
anel de Einstein, 46, *46*
ângulo
  de fase, movimento harmônico simples, 88, *88*, 90
  do cone de Mach, 170, *170*
antinós, 134, *134*, 136
aproximação de Stirling, 265
aquecedor(es)
  de ambiente, 260
  solar, 208
ar
  condutividade térmica, 200t
  massa específica, 59t
  módulo de elasticidade volumétrico, 151
  velocidade do som no, 151, 151t
areia movediça, 85
argônio, calor específico molar a volume constante, 230t
atmosfera (atm), 60
automóveis, pressão dos pneus. *Veja também* carros de corrida, 60t
avalanche de areia, som produzido por uma, 179
avião a jato, ondas de choque produzidas por um, 170

## B

balanço elástico, 112
balão
  capacidade de levantamento, 244
  variação de entropia ao encher um, 247
barômetro de mercúrio, 60, *61*, 64
batimentos, 164, *164*
bebidas com gás, formação de névoa ao serem abertas, 215, *215*
besouros *Melanophila*, detecção de calor, 182, *182*, 202
blocos
  em equilíbrio estático estável, 2, 3, 7
  flutuantes, 69
bola de beisebol, ponto doce, 114
Boltzmann, Ludwig, 264
Brahe, Tycho, 40
British thermal unit (Btu), 191
buracos negros, 28
  horizonte de eventos, 34
  lente gravitacional causada por, 46, *46*
  miniburacos negros, 49
  supermaciços, 28, 43

## C

Calisto
  ângulo com Júpiter do ponto de vista da Terra, 99, *100*
  parâmetros da órbita, 53t
calor(es). *Veja também* termodinâmica, 259
  absorção por sólidos e líquidos, 191-194
  de fusão, 193
    de algumas substâncias, 193t
  de transformação, 192-194
    de algumas substâncias, 193t
  de vaporização, 193
    de algumas substâncias, 193t
  definição, 190
  e temperatura, 190
  específico, 191
    a pressão constante, 192
    a volume constante, 192
    de algumas substâncias, 191t
    molar, 192
      a pressão constante, 230-232
      a volume constante, 229
      de alguns materiais, 191t
      e graus de liberdade, 232-235, *233*
  grandeza dependente da trajetória, 196
  primeira lei da termodinâmica, 196
  sinal, 190
caloria (cal), 191
Caloria (Cal) (nutrição), 191
calorímetro de fluxo, 214
câmara anecóica, 180
canhão SHARP (Super High Altitude Research Project), 56
capacidade
  de levantamento, 244
  térmica, 191
carros de corrida
  pegar o vácuo, 76
  sustentação negativa, 75, *76*
cascavel, sensores de radiação térmica, 202
cauda de altas velocidades, 227
célula de ponto triplo, 184, *185*
centro
  de gravidade, 5, *5*
  de massa e centro de gravidade, 5
  de oscilação, pêndulo físico, 97, 114
Ceres, velocidade de escape, 39t
Chichen Itza, eco musical em, 149, *149*, 153, *153*
chumbo
  calores
    de transformação, 193t
    específicos, 191t
  coeficiente de dilatação térmica, 189t
  condutividade térmica, 200t
chuva, distribuição de velocidades das moléculas de água, 227
ciclo
  de Carnot, 255, 256
  de um motor térmico, 255
  de um movimento harmônico simples, 88
  termodinâmico, 196, *196*, *198*
cilindro, escoamento de um fluido ao redor de um, 70
circunferência de referência, 100
cobre
  calores
    de transformação, 193t
    específicos, 191t
  coeficiente de dilatação linear, 189t
  condutividade térmica, 200t
coeficiente
  de desempenho de refrigeradores, 260
  de dilatação
    linear, 188
      de alguns materiais, 189t
    volumétrica, 189
colete à prova de balas, 147, *147*
cometa de Halley, 42
compressão
  hidrostática, 14
  isotérmica, 218
    máquina de Carnot, 255, *255*
compressibilidade, 14, 59
comprimento de onda, 119, *119*
  de uma corda esticada, 125
  sonoras, 154
concreto
  coeficiente de dilatação linear, 189t
  propriedades elásticas, 14, 14t
condensação, 193
condicionadores de ar, 260
condições iniciais, 91
condução, 200, *200*
  de calor, 200, *200*
condutividade térmica, 200
  de alguns materiais, 200t
condutor de calor, 200
  bom, 200

mau, 200
cone de Mach, 170, *170*
configuração
em mecânica estatística, 262-264
mais provável, 264
constante
de amortecimento, movimento harmônico simples, 101
de Boltzmann, 217
de fase
movimento harmônico simples, 88, *88*
ondas, 120, *120*
de Stefan-Boltzmann, 202
de torção, 94
dos gases ideais, 217
gravitacional (*G*), 29
convecção, 201
atmosférica, 201
cordas esticadas, 151
energia e potência de ondas progressivas em, 126-127, *126*
equação de onda, 128
harmônicas, 138
ondas
estacionárias, 134-136, *134*, *135*
transversais em, *116*, 117
ressonância, 136-139, *136*
velocidade de onda, 124-126, *125*
corpos
de prova, 13
elasticidade de corpos rígidos reais, 12
elásticos, 12
crosta da Terra, 51, *51*
massa específica, *33*, 59t
curvas tensão-deformação, 12, *13*
curvatura do espaço, 45, 46

## D

De Pólo a Pólo (George Griffith), 35
decibel, 158
defasagem
movimento harmônico simples, 90
ondas, 130
deformação, 12, *12*, 13
densidade linear de uma corda esticada, 124, 125
derivada parcial, 123, 155
deslocamento. *Veja também* trabalho
de fase
movimento harmônico simples, 90
ondas, 130
sonoras, 156
movimento harmônico simples, 88, *88*, 89
ondas
em uma corda, 119, *119*
progressivas, 121
oscilado harmônico amortecido, 101, *101*
diagrama fasorial, 132-134, *133*
diamante, coeficiente de dilatação linear, 189t
diferença de fase
e o tipo de interferência resultante, 131t
movimento harmônico simples, 90
ondas, 130
sonoras, 156
diferença de percurso, ondas sonoras, 156
diferenciais inexatas, 197
dilatação
linear, 188, *189*
térmica, 188, *189*
volumétrica, 188
dióxido
de carbono
calor específico molar a volume constante, 230t
velocidade média quadrática à temperatura ambiente, 222t
de enxofre, velocidade média quadrática à temperatura ambiente, 222t
distância
do afélio, 42
do periélio, 42
distribuição de velocidades das moléculas, 225-228, *226*
*downforce*, 75

## E

ebulição, 192-193
eco musical, 149, *149*, 153
edifícios
freqüência angular natural, 103
que oscilam por causa do vento, 86, *86*, 93, 137
efeito
Doppler, 165-169
detector em movimento, fonte parada, 166, *166*, 167
fonte em movimento, detector parado, 167, 168
Leidenfrost, 211
solo, 75
eficiência
de máquina(s)
de Carnot, 257
de Stirling, 258
térmicas reais, 258, 261
eficiência térmica
máquina de Carnot, 257
máquina de Stirling, *258*
Einstein, Albert e a gravitação. *Veja também* relatividade, 45, 46
elasticidade, 2, 12-15, *12*
e velocidade da onda em uma corda esticada, 124
elástico, variação de entropia ao esticar um, 247, *247*, 253
embolia gasosa em viagens de avião, 79
emissão otoacústica espontânea, 175
emissividade, 202
energia. *Veja também* trabalho
de translação, gases ideais, 222
específica, 72
movimento harmônico simples, 93, *93*
onda progressiva em uma corda esticada, 126, *126*, 127
satélites em órbita, 44, 45
como propriedade de estado, 249
interna, 183
de um gás ideal, 229
e a primeira lei da termodinâmica, 197
mecânica
movimento harmônico simples, 93, *93*
oscilador mecânico amortecido, 101
satélites em órbita, 44, *44*
no movimento harmônico simples, 93, *93*
onda progressiva em uma corda esticada, 126-127, *126*
potencial
elástica, onda progressiva em uma corda esticada, 126, *126*, 127
gravitacional, 36-40, *36*
e força gravitacional, 38
e velocidade de escape, 38
movimento harmônico simples, 93, *93*
satélites em órbita, 44, 45
térmica, 183
engenharia hidráulica, 58
entropia
como função de estado, 249, 250
e a segunda lei da termodinâmica, 253
e probabilidade, 264
e processos irreversíveis, 248
força associada, 254
máquinas térmicas, 255-259
refrigeradores, 259
visão estatística, 262-264
equação
de Bernoulli, 72-76
de continuidade, 70, *71*
de onda, 128
equilíbrio
condições, 3
definição, 2
estático, 2, *2*, 3
condições, 3
estável, 2, 3
estruturas indeterminadas, 11, *11*
exemplos, 6-11
fluidos, 61, *61*
instável, *2*
táticas para a solução de problemas, 10
para rotações, 3
para translações, 3
térmico, 184
equipartição de energia, 233
equivalência de gravidade e aceleração, 45
escala
Celsius de temperatura, 186, *186*
centígrada de temperatura, *186*
de temperatura, 183, *183*, 186
comparação, *186*
Fahrenheit, 186, *186*
Kelvin de temperatura, 183, *183*, *186*
escoamento
incompressível, 69
irrotacional, 70, 73
laminar, 69
não-viscoso, 69
turbulento, 69
escorpião da areia, detecção de um besouro por ondas na superfície da areia, 141
espaço interestelar, massa específica, 59t
espaço-tempo, 45
espuma de poliuretano, condutividade térmica, 200t
estado, 192
final, 195, *195*, 229
gasoso, 192
inicial, 195, *195*, 229
líquido, 192
sólido, 192
estrelas. *Veja também* buracos negros; Sol
anãs brancas, 39t, 59t
de nêutrons, 52
massa específica do núcleo, 59t
velocidade de escape, 39t
detecção de planetas invisíveis em torno de, 53
massa específica de algumas, 59t
S2 no centro da Via Láctea, 27, *27*, 42, *43*
estrondo sônico, 170
estruturas indeterminadas, equilíbrio, 11, *11*
etanol, calores específicos, 191t
Europa, parâmetros da órbita, 53t
excentricidade de órbita, 40, *41*
dos planetas do Sistema Solar, 42t
e energia orbital, 44
expansão
adiabática, 198, *198*
de um gás ideal, 235-238, *236*
isotérmica, 218
máquina de Carnot, 255, *255*
variação de entropia, 250, *250*
livre
gases ideais, 237, 249-251, *249*, *250*
primeira lei da termodinâmica para, 198t, 199
extensômetro, 13, *14*

## F

fase (de uma onda)
cálculo de funções trigonométricas para fases muito grandes, 113, *123*
movimento harmônico simples, 88, *88*
ondas, 119, *119*
sonoras, 157
fase (de uma substância), 193
fasores, 132-134, *133*
ferro
condutividade térmica, 200t
massa específica, 59t
fibra de vidro, condutividade térmica, 200t
fluidos
definição, 58
em repouso, 61-63, *62*
equação
de Bernoulli, 72-76
de continuidade, 70, *71*
ideais, movimento, 69, *70*
macaco hidráulico, 65, *65*
massa específica, 58
medida de pressão, 63, *64*
movimento de, 69, *69*
peso aparente nos, 67
pressão, 59
princípio
de Arquimedes, 66-69, *66*
de Pascal, 65, *65*
reais, 69
flutuação, *66*, *67*
Fobos, 52
fonte
pontual, 150
sonora isotrópica, 158
força. *Veja também* aceleração; momento linear; trabalho
associada à entropia, 253
atrativa, 29
de amortecimento, movimento harmônico simples, 101

de arrasto
movimento harmônico simples amortecido, 101
viscoso, 70
de empuxo, 66-69, *66*
de tração
e elasticidade, 13
e velocidade de onda em uma corda esticada, 125
gravitacional
centro de gravidade, 5, *5*
e a lei da gravitação de Newton, 28-30, *29*
e energia potencial, 38
e o princípio de superposição, 30-32
pêndulos, 96, *96*
formas de onda, 116, 117, 120
frentes de onda, 150, *150*
freqüência, 120
angular
movimento harmônico simples, 88, *88*
natural, 103
ondas, 120
sonoras, 154
oscilador harmônico amortecido, 101
de ressonância, 136, *136*, 137
sons musicais, 162, *162*
movimento harmônico simples, 87, *88*
ondas, 120, *120*
em uma corda esticada, 125
sonoras, 154
fulcro, 18
função
de estado, entropia como, 250
distribuição de probabilidade, 225
fusão, 192

## G

*g*, aceleração de queda livre, medida com pêndulo físicos, 97
*G*, constante gravitacional, 29
galáxias, 28
como lentes gravitacionais, 46, *46*
de Andrômeda, 28, *28*
Galileu, 52
Ganimedes, parâmetros da órbita, 53t
gases. *Veja também* teoria cinética dos gases, 216
como fluidos, 58
compressibilidade, 59
condutividade térmica de alguns, 200t
confinados a um cilindro com um êmbolo móvel, 195, *196*
ideais, 217
calores específicos molares, 228-232
a pressão constante, 230-232
a volume constante, 229
e graus de liberdade, 232
energia
cinética de translação, 222
interna, 229
expansão
adiabática, 235-238
livre, 249-251, *249*, *250*
trabalho
realizado a pressão constante, 219
realizado a temperatura constante, 218, *218*
realizado a volume constante, 219
velocidade
mais provável das moléculas, 227
média das moléculas, 226
média quadrática, 220-222, *220*, 222t, 227
velocidade do som em alguns, 151t
gelo
coeficiente de dilatação linear, 189t
massa específica, 59t
no ponto triplo, 184
propriedades térmicas, 189
*g*-LOC (perda de consciência induzida por *g*), dos pilotos de caça, 80
Grande Atrator, 28
Grande Nuvem de Magalhães, 28
grandezas
dependentes da trajetória, 196
independentes da trajetória, energia potencial gravitacional, 37
granito
calores específicos, 191t
velocidade do som no, 151t
graus de liberdade, moléculas de um gás ideal, 233
gravitação, 28
Lei de Newton, 28-30, *29*, 40
na visão de Einstein, 45, 46
nas proximidades da superfície da Terra, 32-34
no interior da Terra, 35
perto da superfície da Terra, 33
gráviton, 46
Grupo Local, 28

## H

HEAR (Hearing Education and Awareness for Rockers), *161*
hélio, *233*
calor específico molar
a volume constante, 230t
e graus de liberdade, 233t
condutividade térmica, 200t
velocidade
do som, 151t
média quadrática à temperatura ambiente, 222t
hertz, 87
hidrogênio
calores de transformação, 193t
condutividade térmica, 200t
velocidade
do som, 151t
média quadrática à temperatura ambiente, 222t
horizonte de eventos, 34

## I

icebergs, 213
intensidade de ondas sonoras, 158, *158*
interferência, 130-132, *130*, *131*
de ondas, 130-132, *130*, *131*
sonoras, 156-157, *156*
intermediária, 131, *131*, 131t
ondas sonoras, 157
totalmente construtiva, 131, *131*, 131t, *134*
ondas sonoras, 156
totalmente destrutiva, 131, *131*, 131t, *134*
ondas sonoras, 156
Invar, coeficiente de dilatação linear, 189t
inverso do mol, 217
Io, parâmetros da órbita, 53t
isolante térmico, 200
bom, 200
isopor, massa específica, 59t
isoterma, 218, *218*

## J

joule (J), 191
juntas de dilatação, 188
Júpiter, 53t
anéis, 56
lei dos períodos de Kepler, 42t
parâmetros das órbitas de quatro satélites, 53t
satélites observados por Galileu, 52
velocidade de escape, 39t

## K

kelvins, 183, 185, *186*, 188
Kepler, Johannes, 40

## L

lá
de concerto, 164
de pedra, condutividade térmica, 200t
latão
calores específicos, 191t
coeficiente de dilatação linear, 189t
condutividade térmica, 200t
lei
da gravitação de Newton, 28-30, *29*, 40
das áreas (segunda de Kepler), 40, *41*
das órbitas (primeira de Kepler), 40, *40*
de distribuição de velocidades de Maxwell, 225-228, *226*
dos gases ideais, 217
dos períodos (terceira de Kepler), 41, *41*
para os planetas do Sistema Solar, 42t
zero da termodinâmica, 183, *184*
lente gravitacional, 46, *46*
libra por polegada quadrada (psi), 60
limiar de audição, 159t
limite
de elasticidade, de alguns materiais, 14t
de ruptura, 13, *13*
de alguns materiais, 14t
elástico, 13, *13*
linhas de fluxo, 70, *70*
no escoamento de fluidos, 70, *70*
líquidos
absorção de calor, 191-194
como fluidos, 58
compressibilidade, 14, 59
dilatação térmica, 189
massa específica de alguns, 59t
velocidade do som em, 151t
Lua, 28
possível efeito sobre seres humanos, 49
velocidade de escape, 39t
luz, 116
efeito Doppler, 165
ultravioleta, 116
visível, 116

## M

macaco hidráulico, 65, *65*
madeira, propriedades elásticas, 14t
manômetro de tubo aberto, 64, *64*
manto (da Terra), 51, *51*
massa específica, *33*
máquina(s)
de Stirling, 258, *258*
térmicas, 255-259
de Carnot, 255, *255*, 261
eficiência, 257, 261
de Stirling, 258, *258*
eficiência, 255, 257, 261
ideais, 255
perfeita, 257, *257*
reais, eficiência, 257, 261
Marte
diâmetro médio, 51
distância média do Sol, 52
lei dos períodos de Kepler, 42t
movimento relativo no céu (movimento retrógrado), 40, *40*
massa. *Veja também* centro de massa
e velocidade de onda em uma corda esticada, 124
molar, 216
molecular, 217
massa específica
de alguns materiais, 59t
de fluidos, 58
de materiais escolhidos, 14t
linear de uma corda esticada, 124, 125
Maxwell, James Clerk, 225, 233
mecânica estatística, 262-264
medidor
de pressão, 60
venturi, 83
membrana de um tímpano, ondas estacionárias, *137*
mercúrio (metal)
calores
de transformação, 193t
específicos, 191t
massa específica, 59t
Mercúrio (planeta), lei dos períodos de Kepler, 42t
metais
coeficientes de dilatação linear, 189t
condutividade térmica de alguns, 200t
rede cristalina, 12, *12*
velocidade do som em, 151t
metano, *233*
calor específico molar e graus de liberdade, 233t
microestados, 262-264
microondas, 116
efeito Doppler, 165
milímetro de mercúrio (mm Hg), 60
miniburacos negros, 49
modo
de oscilação, 136, 137
fundamental, 137, 162
módulo
de cisalhamento, 14
de elasticidade, 13

volumétrico, 14, 151
de Young, 13
de alguns materiais, 14t
moléculas
diatômicas, 230
calores específicos molares a volume constante, 230t
graus de liberdade, 232, 233t, *233*
monoatômicas, 229
calores específicos molares a volume constante, 230t
graus de liberdade, 232, 233t, *233*
poliatômicas, 230
calores específicos molares a volume constante, 230t
graus de liberdade, 232, 233t, *233*
momento
angular no equilíbrio, 2
linear em equilíbrio, 2
montanhas
efeito da atração gravitacional, 50
raízes que penetram no manto, 80
morcegos, uso de ondas ultra-sônicas, 169
movimento
circular uniforme e movimento harmônico simples, 100, *100*
harmônico, 88
simples, 87-90, *87*, *88*
aceleração, 89, *89*
amortecido, 101, *101*, *102*
angular, 94, *94*
e movimento circular uniforme, 100, *100*
energia, 93, *93*
identificação, 92
lei do, 90-92
ondas produzidas por um, 117
pêndulos, 95-99, *96*
velocidade, 88, *88*, 89, *89*
longitudinal, 117
periódico, 88
transversal, 117
mudança de fase, 193
multiplicidade de configurações na mecânica estatística, 263

## N

Netuno
lei dos períodos de Kepler, 42t
sistema de anéis, 56
Newton, Isaac, 28, 40
nitrogênio
calor específico molar a volume constante, 230t
velocidade média quadrática à temperatura ambiente, 222t
nível
de compensação, 80
sonoro, 159
alguns níveis sonoros, 159t
nós, 134, *134*, 136
núcleo
da Terra, 51, *51*
massa específica, *33*, 59t
pressão, 60t
do Sol
distribuição de velocidade dos fótons no, 227
massa específica, 59t
pressão, 60t
número
de Avogadro, 216
de Loschmidt, 246
de Mach, 170
de onda, 119
ondas sonoras, 154
harmônico, 137
sons musicais, 162, *162*

## O

oceano, pressão na fossa mais profunda, 60t
onda(s)
adiantadas, 133
atrasadas, 133
comprimento de onda e freqüência, 119
de choque, 170, *170*
de matéria, 116
de radar, 116
de rádio, 116
efeito Doppler, 165
de televisão, 116
do mar, 116
eletromagnéticas, 116
velocidade de propagação, 116
em fase, 130, 132
esféricas, 150
estacionárias, 134
e ressonância, 136-139, *136*
reflexões em uma interface, 135, *135*
fasores, 132-134, *133*
longitudinais, 116-118, *117*, 150
mecânicas, 116
P, 173, *173*
planas, 150
princípio de superposição para, 129, *129*
progressivas, 117
energia e potência, 126-127, *126*
sonoras, 153-156, *153*
velocidade, 121-123, *120*
pulsada, 116, *116*
resultante, 129, 130
S, 173, *173*
senoidais, 120, *120*
sísmicas, 116
produzidas por explosões no Kursk, 117, *118*
sonoras, 116, *117*
batimentos, 164, *164*
efeito Doppler, 165-169, *166*, *167*, *168*
em fase, 156
fontes de ondas sonoras musicais, 161-164, *161*, *162*
interferência, 156-157, *156*
ondas progressivas, 153-156, *153*
velocidade, 150-153, 151t
velocidade supersônica, 170, *170*
tipos de, 116
total, 129
transversais, 116, *116*
transversais e longitudinais, 116, 117, 150
órbita geoestacionária, 52
oscilações. *Veja também* pêndulos; movimento harmônico simples; ondas, 87
forçadas, 103
livres, 103
osciladores
forçados, 103, *103*
harmônicos simples. *Veja também* pêndulos
amortecido, 101, *101*
angulares, 94, *94*
lineares, 90-92, *90*
osso, propriedades elásticas, 14t
oxigênio, *233*
calor específico molar a volume constante, 230t
calor específico molar e graus de liberdade, 233t
calores de transformação, 193t
distribuição de velocidades moleculares a 300 K, 225
velocidade média quadrática à temperatura ambiente, 222t

## P

partícula de referência, 100
pascal (Pa), 60, 151
pêndulo como oscilador harmônico simples angular, 94, *94*
de torção, 94, *94*
debaixo d'água (amortecido), *101*
físico, 97, *97*
simples, 95-99, *96*
perda de audição, 161
período
movimento harmônico simples, 88, *88*, 89
ondas, 120, *120*
sonoras, 154
oscilador harmônico simples linear, 90
peso
aparente em fluidos, 67
do pêndulo, 95
piche, 58
pico
central, 264
de ressonância, 103
pinho, condutividade térmica, 200t
pistas de dança, oscilações ressonantes, 137
placa composta, condução através de uma, 200, *201*
planetas
detecção de planetas invisíveis, 53
leis de Kepler, 40-42
Plutão, lei dos períodos de Kepler, 42t
polias, estruturas fibrosas, 26, *26*
poliestireno, propriedades elásticas, 14t
Ponte do Milênio, oscilações, 115, *115*, 137
ponto
de congelamento, 187
de ebulição, 192-193
de algumas substâncias, 193t
de fusão, 192
de algumas substâncias, 193t
doce no beisebol e outros esportes, 114
triplo da água, 184
posição. *Veja também* deslocamento
de equilíbrio, pêndulo simples, 96
movimento harmônico simples, 87
postulado da entropia, 248
potência
média
de máquinas térmicas, 258
de uma onda progressiva em uma corda esticada, 127
onda progressiva em uma corda esticada, 126-127, *126*
prata
calores
de transformação, 193t
específicos, 191t
condutividade térmica, 200t
pressão(ões)
absoluta, 62
arterial, sistólica normal, 60t
atmosférica, 60t
como propriedade de estado, 249
e a lei dos gases ideais, 217-220
e a velocidade média quadrática de um gás ideal, 220-222
fluidos, 58, *59*
hidrostáticas, 61-63
medida, 63, *64*
monométrica, 62
ponto triplo da água, 184
trabalho realizado por um gás ideal a pressão constante, 219
primeira lei
da termodinâmica, 196
casos especiais, 198-200, 197t
de Kepler (lei das órbitas), 40, *41*
primeiro harmônico, 137
sons musicais, 162, *162*
princípio
de Arquimedes, 66-69, *66*
de equivalência, 45
de Pascal, 65, *65*
de superposição
para a gravitação, 30-32
para ondas, 129, *130*
probabilidade e entropia, 264
processos
a pressão constante, 195, *195*
resumo, 238, 238t
trabalho realizado por gases ideais, 219
a temperatura constante
resumo, 238, 238t
trabalho realizado por gases ideais, 218, *218*
a volume constante, 196, *196*
primeira lei da termodinâmica para, 198, 198t
resumo, 238, 238t
trabalho realizado por gases ideais, 219
adiabáticos
primeira lei da termodinâmica para, 198, 198t
resumo, 238, 238t
cíclicos, primeira lei da termodinâmica para, 198, 198t
irreversíveis. *Veja também* entropia, 248
e a segunda lei da termodinâmica, 253
isobáricos, resumo, 238, 238t
isocóricos, resumo, 238, 238t
isotérmicos, resumo, 238, 238t
reversíveis, 249-251
termodinâmicos, 195, *195*
resumo gráfico, 238
unidirecionais, 248
propriedades
de estado, 249
elásticas de alguns materiais, 14t
prospecção sísmica, 150

## Q

quartzo fundido, coeficiente de dilatação linear, 189t
quasars, *46*

## R

radiação térmica, 202
radiador de corpo negro, 202
raios, 150, *150*
raios X, 116
*Rana catesbeiana* (rã-touro), gritos de acasalamento emitidos pelos tímpanos, 175
rede cristalina, 12, *12*
reflexão(ões)
  dura, de ondas progressivas em uma interface, 136, *136*
  em uma interface, 135, *135*
refrigeradores, 259, *260*
  de Carnot, 260, 261
  ideais, 260
  perfeitos, *260*, 261
relatividade, teoria da, geral, 45
reservatório térmico, 195, *195*
resistência térmica, 200
ressonância
  e ondas estacionárias, 136-139, *136*
  oscilações forçadas, 103

## S

S2, estrela no centro da Via Láctea, 27, *27*, 42, *43*
Sagittarius A*, 42, *43*
sangue, massa específica, 59t
satélites
  energia potencial gravitacional, 36
  leis de Kepler, 40-42
  órbita(s)
    e energia, 43-45, *44*
    geoestacionária, 52
Saturno
  lei dos períodos de Kepler, 42t
  sistema de anéis, 56
segunda lei
  da termodinâmica, 253
  de Kepler (lei das áreas), 40, *41*
segundo harmônico, 137
  sons musicais, 162, *162*
semi-eixo maior de órbitas, 40, *41*
  planetas do Sistema Solar, 42t
série harmônica, 137
sinal do calor, 190
Sirius B, velocidade de escape, 39t
sistema(s), 190
  asteróide-satélite, 53, *53*
  bloco-mola
    sistemas oscilatórios, 90-92, *90*
      amortecidos, 101, *101*
  fechados, entropia, 253
sobrepressão, pressão manométrica, 64
Sol
  células de convecção, 202
  distribuição de velocidades dos fótons no núcleo, 227
  massa específica no centro do, 59t
  período de revolução em torno do centro da galáxia, 52
  pressão no centro do, 60t
  velocidade de escape, 39t
solidificação, 192
sólidos
  absorção de calor, 191-194
  calores específicos de alguns, 191t
  compressibilidade, 14
  condutividade térmica de alguns, 200t
  dilatação térmica, 188, *189*
  velocidade do som nos, 151t
som(ns)
  emitidos pelos pingüins, 165
  musicais, 161-164
  produzido pelos cachalotes, 178, *179*
sonar, 150
submarinos
  Kursk, 117, *118*
  sonar, 150
substância de trabalho, 255
Superaglomerado Local, 28
supernova, 39t
super-resfriamento, 269
surfe, 57, *57*, 68, *68*
sustentação negativa em carros de corrida, 75, *76*

## T

taxa de condução, 200
temperatura, 183
  como propriedade de estado, 249
  de gás ideal, *186*
  definição, 184
  e a lei dos gases ideais, 217-220
  e a lei zero da termodinâmica, 183, *184*
  e a velocidade média quadrática de um gás ideal, 220-222
  e calor, 190
  medida, 184-186
  trabalho realizado por um gás ideal a temperatura constante, 218, *218*
tempos, 255
  natureza direcional, 248
tensão, 12, *13*
  compressiva, 13
  de cisalhamento, 12, *13*, 14
  hidrostática, 12, *13*, 14
  trativa, 12, *13*
teorema das cascas, 29
teoria
  cinética dos gases. *Veja também* gases
    calor específico molar e graus de liberdade, 233
    distribuição de velocidades das moléculas, 225-228, *226*
    e a teoria quântica, 233, 235
    e o número de Avogadro, 216
    energia cinética de translação, 222
    livre caminho médio, 223, *223*
    velocidade
      mais provável das moléculas, 227
      média das moléculas, 226
      média quadrática, 220-222, *220*, 222t, 227
  da relatividade geral, 45
  quântica, 233, 235
terceira lei de Kepler (lei dos períodos), 41, *41*
  para os planetas do Sistema Solar, 42t
terceiro harmônico, 137
  sons musicais, 162, *162*
termodinâmica. *Veja também* entropia; processos irreversíveis, 183
  lei zero, 183, *184*
  linguagem da, 259
  primeira lei, 196-200
  segunda lei, 253
termômetro(s), 183, 184
  clínicos e meteorológicos, 188
  de gás a volume constante, 185, *185*
  de mercúrio, *188*
termoscópio, 183, *183*
Terra. *Veja também* crosta; manto; núcleo, 28
  diâmetro médio, 51
  distribuição não-uniforme de massa, 33, *33*, 34
  excentricidade da órbita, 40
  forma elipsoidal, 33
  gravitação nas proximidades da superfície, 32-34, *33*
  interior da, 51, 265
  lei de Kepler dos períodos, 42t
  massa específica
    em função da distância do centro, 33
    média, 59t
  nível de compensação, 80
  órbitas e energias dos satélites, 43-45, *43*
  rotação, 33, *34*
  velocidade de escape, 38, 39t
terremotos
  freqüência angular natural de edifícios, 103, *103*
  ondas S e P, 173
  oscilações de edifícios, 87
tira bimetálica, 188, *188*
torr, 60
Torre de Pisa, 1, *1*, 10
trabalho
  como grandeza que depende da trajetória, 196
  definição, 259
  e calor, 191, 195
  líquido por ciclo, máquina de Carnot, 256
  máquina de Carnot, 256
  primeira lei da termodinâmica, 196
  realizado por um gás ideal
    a pressão constante, 219
    a temperatura constante, 218, *218*
    a volume constante, 219
traçador para observar o escoamento de um fluido, 70, *70*
transferência de calor, 200-204
  *por radiação*, *202*
tubo
  de fluxo, 71, *71*
  de Pitot, 84
tungstênio, calores específicos, 191t
turbina a jato, nível sonoro, 159t

## U

ultra-som
  medida da velocidade do sangue, 180
  uso pelos morcegos, 169
ultra-sonografia, 150, *150*
universo, temperatura logo após o Big Bang, 183
urânio, massa específica do núcleo, 59t
Urano, lei dos períodos de Kepler, 42t

## V

vácuo
  massa específica do melhor vácuo em laboratório, 59t
  pegar o, 76
  pressão do melhor vácuo em laboratório, 60t
valor de R, 200, *201*
vaporização, 192
variação(ões)
  de entropia, 249-251, *248*
    máquina de Carnot, 256
    máquina de Stirling, 258
  de temperatura, 187
vazão, 71
  mássica, 71
velocidade(s). *Veja também* aceleração; força; energia cinética
  ao longo da linha de visada, 53
  das moléculas, distribuição de Maxwell de, 225-228, *226*
  de escape, 38
    para alguns astros, 39t
  de onda, 121-123, *120*
    em uma corda esticada, 124-126, *125*
    ondas sonoras, 154
  do som, 150-153
    e velocidade média quadrática em um gás, 222
    em vários meios, 151t
  mais provável das moléculas de um gás, 227
  média
    de moléculas de gás, 226
    quadrática de um gás ideal, 220-222, *220*, 227
      de algumas substâncias, 222t
      e a distribuição de velocidades das moléculas, 227
  movimento harmônico simples, 88, *88*, 89, *89*
  ondas progressivas, 121-123
vento
  adiabático, 244
  *chinook*, 244
Vênus, lei dos períodos de Kepler, 42t
*Vespa mandarinia japonica*, 210
Via Láctea, 28
  indícios de um buraco negro no centro da, 27, 42, *43*
vidro
  calores específicos, 191t
  coeficiente de dilatação térmica, 189t
  condutividade térmica, 200t
  de janela, condutividade térmica, 200t
  propriedades elásticas, 14t
  Pyrex, coeficiente de dilatação linear, 189t
  quebrado por ondas sonoras, *158*
volume
  como uma propriedade de estado, 249
  e a lei dos gases ideais, 217-220
  trabalho realizado por um gás ideal a volume constante, 219

## Z

zero absoluto, 183

Cromosete
Gráfica e editora Ltda.

**Impressão e acabamento**
Rua Uhland, 307 - Vila Ema
03283-000 - São Paulo - SP
**Tel/Fax:** (011) 6104-1176
**Email:** adm@cromosete.com.br

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

## Algumas Propriedades Físicas

| | |
|---|---|
| ***Ar*** (seco, a 20°C e 1 atm) | |
| Massa específica | 1,21 kg/m$^3$ |
| Calor específico a pressão constante | 1010 J/kg · K |
| Razão entre os calores específicos | 1,40 |
| Velocidade do som | 343 m/s |
| Rigidez dielétrica | $3 \times 10^6$ V/m |
| Massa molar efetiva | 0,0289 kg/mol |
| ***Água*** | |
| Massa específica | 1000 kg/m$^3$ |
| Velocidade do som | 1460 m/s |
| Calor específico a pressão constante | 4190 J/kg · K |
| Calor de fusão (0°C) | 333 kJ/kg |
| Calor de vaporização (100°C) | 2260 kJ/kg |
| Índice de refração ($\lambda$ = 589 nm) | 1,33 |
| Massa molar | 0,0180 kg/mol |
| ***Terra*** | |
| Massa | $5,98 \times 10^{24}$ kg |
| Raio médio | $6,37 \times 10^6$ m |
| Aceleração de queda livre na superfície da Terra | 9,8 m/s$^2$ |
| Atmosfera-padrão | $1,01 \times 10^5$ Pa |
| Período de um satélite a uma altitude de 100 km | 86,3 min |
| Raio da órbita geossíncrona | 42 200 km |
| Velocidade de escape | 11,2 km/s |
| Momento dipolar magnético | $8,0 \times 10^{22}$ A · m$^2$ |
| Campo elétrico médio na superfície | 150 V/m, para baixo |
| ***Distância até*** | |
| A Lua | $3,82 \times 10^8$ m |
| O Sol | $1,50 \times 10^{11}$ m |
| A estrela mais próxima | $4,04 \times 10^{16}$ m |
| O centro da nossa galáxia | $2,2 \times 10^{20}$ m |
| A galáxia de Andrômeda | $2,1 \times 10^{22}$ m |
| O limite do universo observável | $\sim 10^{26}$ m |

## Alfabeto Grego

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alfa | A | $\alpha$ | Iota | I | $\iota$ | Rô | P | $\rho$ |
| Beta | B | $\beta$ | Capa | K | $\kappa$ | Sigma | $\Sigma$ | $\sigma$ |
| Gama | $\Gamma$ | $\gamma$ | Lambda | $\Lambda$ | $\lambda$ | Tau | T | $\tau$ |
| Delta | $\Delta$ | $\delta$ | Mi | M | $\mu$ | Ípsilon | Y | $\upsilon$ |
| Epsílon | E | $\epsilon$ | Ni | N | $\nu$ | Fi | $\Phi$ | $\phi, \varphi$ |
| Zeta | Z | $\zeta$ | Csi | $\Xi$ | $\xi$ | Qui | X | $\chi$ |
| Eta | H | $\eta$ | Ômicron | O | $o$ | Psi | $\Psi$ | $\psi$ |
| Teta | $\Theta$ | $\theta$ | Pi | $\Pi$ | $\pi$ | Ômega | $\Omega$ | $\omega$ |

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
BIBLIOTECA

## Algumas Constantes Físicas*

| | | |
|---|---|---|
| Velocidade da luz | $c$ | $2{,}998 \times 10^{8}$ m/s |
| Constante gravitacional | $G$ | $6{,}673 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² |
| Constante de Avogadro | $N_A$ | $6{,}022 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ |
| Constante universal dos gases | $R$ | 8,314 J/mol · K |
| Relação entre massa e energia | $c^2$ | $8{,}988 \times 10^{16}$ J/kg |
| | | 931,49 MeV/u |
| Permissividade elétrica do vácuo | $\varepsilon_0$ | $8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m |
| Permeabilidade magnética do vácuo | $\mu_0$ | $1{,}257 \times 10^{-6}$ H/m |
| Constante de Planck | $h$ | $6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s |
| | | $4{,}136 \times 10^{-15}$ eV · s |
| Constante de Boltzmann | $k$ | $1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K |
| | | $8{,}617 \times 10^{-5}$ eVK |
| Carga elementar | $e$ | $1{,}602 \times 10^{-19}$ C |
| Massa do elétron | $m_e$ | $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg |
| Massa do próton | $m_p$ | $1{,}673 \times 10^{-27}$ kg |
| Massa do nêutron | $m_n$ | $1{,}675 \times 10^{-27}$ kg |
| Massa do dêuteron | $m_d$ | $3{,}344 \times 10^{-27}$ kg |
| Raio de Bohr | $a$ | $5{,}292 \times 10^{-11}$ m |
| Magnéton de Bohr | $\mu_B$ | $9{,}274 \times 10^{-24}$ J/T |
| | | $5{,}788 \times 10^{-5}$ eV/T |
| Constante de Rydberg | $R$ | $1{,}097\,373 \times 10^{7}$ m$^{-1}$ |

*Uma lista mais completa, que mostra também os melhores valores experimentais, está no Apêndice B.

## Alguns Fatores de Conversão*

***Massa e Massa Específica***
1 kg = 1000 g = $6{,}02 \times 10^{26}$ u
1 slug = 14,59 kg
1 u = $1{,}661 \times 10^{-27}$ kg
1 kg/m³ = $10^{-3}$ g/cm³

***Comprimento e Volume***
1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft
1 mi = 1,61 km = 5280 ft
1 in = 2,54 cm
1 nm = $10^{-9}$ m = 10 Å
1 pm = $10^{-12}$ m = 1000 fm
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 m³ = 1000 L = 35,3 ft³ = 264 gal

***Tempo***
1 d = 86 400 s
1 ano = 365 d 6 h = $3{,}16 \times 10^{7}$ s

***Ângulos***
1 rad = 57,0° = 0,159 rev
$\pi$ rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

***Velocidade***
1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mi/h
1 km/h = 0,621 mi/h = 0,278 m/s

***Força e Pressão***
1 N = $10^{5}$ dina = 0,225 lb
1 lb = 4,45 N
1 t = 2000 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dina/cm²
= $1{,}45 \times 10^{-4}$ lb/in²
1 atm = $1{,}01 \times 10^{5}$ Pa = 14,7 lb/in²
= 76,0 cm Hg

***Energia e Potência***
1 J = $10^{7}$ erg = 0,2389 cal = 0,738 ft · lb
1 kW · h = $3{,}6 \times 10^{6}$ J
1 cal = 4,1868 J
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 hp** = 746 W = 550 ft·lb/s

***Magnetismo***
1 T = 1 Wb/m² = $10^{4}$ gauss

*Uma lista mais completa está no Apêndice D.
**A unidade de potência hp é uma abreviatura do inglês *horsepower*, que não corresponde exatamente ao cavalo-va
que é igual a 735,5 W (N.T.)

## Sobre a capa

A capa é uma imagem de Eric J. Heller que mostra as trajetórias de elétrons em uma superfície com irregularidades microscópicas. Os 100.000 elétrons partem do canto superior direito e se espalham para formar um desenho complexo ao se dirigirem para o canto inferior esquerdo.

O movimento dos elétrons é tratado em vários capítulos deste livro, e é especialmente importante na discussão sobre centelhas elétricas. Algumas centelhas são inofensivas, como os clarões azuis produzidos quando alguém mastiga uma pastilha de gaultéria em um quarto escuro (Capítulo 21). Outras centelhas podem ser muito perigosas, como as descargas eletrostáticas que podem causar a explosão de um pó industrial (Capítulo 25).

## Ocupe Seu Lugar — O Espetáculo Vai Começar!

Esta 8ª edição de **Fundamentos de Física** contém centenas de exemplos interessantes extraídos da vida real, no espírito do livro de Jearl Walker **O Circo Voador da Física**. A primeira edição de **O Circo Voador da Física**, no mercado há mais de 30 anos em 10 idiomas, tornou-se um clássico para estudantes de física, professores de física e o público em geral. A segunda edição, lançada nos Estados Unidos em 2007, foi publicada recentemente em português pela LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional.

gen Grupo Editorial Nacional | LTC
www.ltceditora.com.br

ISBN 978-85-216-1606-1
9 788521 616061